Понятие размерности евклидова пространства можно обобщать на произвольные топологические пространства разными способами. Самые классические обобщения — это размерности ind, Ind и dim. Теория размерности первоначально была построена для метризуемых компактов и затем распространена на сепарабельные метризуемые пространства. На топологические пространства она обобщается только частично. В частности, фундаментальная теорема теории размерности сепарабельных метризуемых пространств[1], которая утверждает, что для таких пространств размерности ind, Ind и dim совпадают, не выполняется ни в классе всех метризуемых пространств, ни в классе всех компактов. Таким образом, для общих топологических пространств мы фактически имеем три теории трёх разных размерностей, дополненные утверждениями о соотношениях между разными размерностями для разных классов пространств.

Теория размерностей включает большое количество примеров, обычно сложных, и теорем, как правило трудных и довольно специальных.

Определения и основные свойства размерностей ind, Ind и dim

Определения размерностей ind и Ind основаны на уже знакомом нам понятии границы множества и более общем понятии перегородки между множествами.

Определение. Пусть X — топологическое пространство, $A, B \subset X$ и $A \cap B = \varnothing$. Замкнутое множество $F \subset X$ называется *перегородкой* между множествами A и B, если существуют открытые множества $U, V \subset X$, удовлетворяющие условиям $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \varnothing$ и $X \setminus F = U \cup V$. В случае, когда одно из множеств A и B одноточечно, говорят о перегородке между точкой и множеством.

Например, если $x \in X$, $F \subset X$ — замкнутое множество, $x \notin F$ и U — открытая окрестность точки x, для которой $\overline{U} \subset X \setminus F$, то граница $\operatorname{Fr} U = \overline{U} \setminus \operatorname{Int} U$ множества U является перегородкой между $\{x\}$ и F, так что $X \in T_3$ тогда и только тогда, когда между любой точкой и не содержащим её замкнутым множеством имеется перегородка. Точно так же если $A, B \subset X$ — замкнутые множества, $A \cap B = \varnothing$ и U — открытое множество, для которого $A \subset U$ и $\overline{U} \subset X \setminus B$, то $\operatorname{Fr} U$ — перегородка между A и B, так что $X \in T_4$ тогда и только тогда, когда между любыми двумя непересекающимися замкнутыми множествами имеется перегородка.

Определение. *Малая индуктивная размерность* $\operatorname{ind} X$ топологического пространства X определяется по индукции так:

① $\operatorname{ind} X = -1$, если $X = \varnothing$;

② $\operatorname{ind} X \leqslant n$, $n \geqslant 0$, если каковы бы ни были точка $x \in X$ и не содержащее её замкнутое множество F, у точки x есть открытая окрестность U, для которой $\overline{U} \subset X \setminus F$ и $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n - 1$;

③ $\operatorname{ind} X = n$, $n \geqslant 0$, если $\operatorname{ind} X \leqslant n$ и неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n - 1$ не выполнено;

④ $\operatorname{ind} X = \infty$, если неравенство $\operatorname{ind} X \leqslant n$ не выполнено ни для какого целого $n \geqslant -1$.

Малая индуктивная размерность называется также *размерностью Менгера–Урысона.*

Ниже всегда считается, что ∞ больше любого целого числа.

Замечание 1. Непосредственно из определения вытекает, что любое пространство X конечной размерности $\operatorname{ind} X$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_3.

Иногда в определение размерности $\operatorname{ind} X$ включают требование регулярности пространства X. В этом случае считается, что малая индуктивная размерность нерегулярных пространств не определена.

[1] т.е. пространств со счётной базой.

Ясно, что если пространства X и Y гомеоморфны, то $\operatorname{ind} X = \operatorname{ind} Y$, т.е. размерность ind — топологический инвариант. Ясно также, что T_1-пространство X нульмерно тогда и только тогда, когда $\operatorname{ind} X = 0$.

Теорема 1. *Размерность* ind *монотонна: для всякого пространства X и любого его подпространства Y выполнено неравенство* $\operatorname{ind} Y \leqslant \operatorname{ind} X$.

Доказательство. Если $\operatorname{ind} X = \infty$, то доказывать нечего. Предположим, что $\operatorname{ind} X < \infty$, и применим индукцию. Для $\operatorname{ind} X = -1$ доказываемое утверждение тривиально. Предположим, что $\operatorname{ind} X = n \geqslant 0$ и для меньших n утверждение верно. Пусть $x \in Y$ и U — окрестность точки x в Y, и пусть U_1 — окрестность точки x в X, для которой $U_1 \cap Y = U$. Поскольку $\operatorname{ind} X = n$, найдётся открытая окрестность V_1 точки x со свойствами $\overline{V}_1 \subset U_1$ и $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V_1 \leqslant n-1$. По индуктивному предположению $\operatorname{ind}(\operatorname{Fr} V_1 \cap Y) \leqslant n-1$. Осталось заметить, что $V_1 \cap Y$ — открытая окрестность точки x в Y, $\overline{V_1}^Y = \overline{V_1}^X \cap Y \subset U_1 \cap Y = U$, $\operatorname{Int}_Y V_1 = V_1 \cap Y = \operatorname{Int}_X V_1 \cap Y$ и $\operatorname{Fr}_Y V_1 = \overline{V_1 \cap Y}^Y \setminus \operatorname{Int}_Y V_1 = \big(\overline{V_1 \cap Y}^X \cap Y\big) \setminus \big(\operatorname{Int}_X V_1 \cap Y\big) = \operatorname{Fr}_X V_1 \cap Y$. ■

В следующем предложении собраны очевидные, но полезные переформулировки определения малой индуктивной размерности.

Предложение 1. *Для пространства X следующие условия равносильны:*

① $\operatorname{ind} X \leqslant n$, *где* $0 \leqslant n < \infty$;

② *для любой окрестности U любой точки $x \in X$ найдутся открытая окрестность V той же точки x и замкнутое множество F со свойствами $V \subset F \subset U$ и* $\operatorname{ind}(F \setminus V) \leqslant n-1$;

③ *между любой точкой $x \in X$ и любым замкнутым множеством $F \not\ni x$ имеется перегородка C, для которой* $\operatorname{ind} C \leqslant n-1$.

Доказательство. Для доказательства импликации ① $\Longrightarrow$ ② достаточно взять окрестность V точки x, для которой $\overline{V} \subset X \setminus (X \setminus U) = U$ и $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V = n-1$, и положить $F = \overline{V}$.

Докажем, что ② $\Longrightarrow$ ③. Положим $U = X \setminus F$. Согласно условию ② найдутся окрестность V точки x и замкнутое множество G, для которых $V \subset G \subset U$ и $\operatorname{ind}(G \setminus V) \leqslant n-1$. Ясно, что $G \setminus V$ — перегородка между x и F.

Наконец, докажем импликацию ③ $\Longrightarrow$ ①. Пусть F — замкнутое множество, не содержащее точку $x \in X$, и пусть C — перегородка между $\{x\}$ и F. По определению перегородки $X \setminus C = U \cup V$, где множества U и V открыты, $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Ясно, что $\overline{U} \subset X \setminus V$. Значит, $\operatorname{Fr} U \subset C$, и по теореме 1 имеем $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} U \leqslant \operatorname{ind} C$. ■

Определение. *Большая индуктивная размерность* $\operatorname{Ind} X$ топологического пространства X определяется по индукции так:

① $\operatorname{Ind} X = -1$, если $X = \varnothing$;

② $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, $n \geqslant 0$, если, каковы бы ни были непересекающиеся замкнутые множества F и G, у множества F есть открытая окрестность U, для которой $\overline{U} \subset X \setminus G$ и $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} U \leqslant n-1$;

③ $\operatorname{Ind} X = n$, $n \geqslant 0$, если $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ и неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n-1$ не выполнено;

④ $\operatorname{Ind} X = \infty$, если неравенство $\operatorname{Ind} X \leqslant n$ не выполнено ни для какого целого $n \geqslant -1$.

Большая индуктивная размерность называется также *размерностью Брауэра–Чеха.*

Замечание 2. Из определения вытекает, что любое пространство X конечной размерности $\operatorname{Ind} X$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_4.

Иногда в определение размерности $\operatorname{Ind} X$ включают требование нормальности пространства X. В этом случае считается, что большая индуктивная размерность ненормальных пространств не определена.

Ясно, что если пространства X и Y гомеоморфны, то $\operatorname{Ind} X = \operatorname{Ind} Y$, т.е. размерность Ind — топологический инвариант. Кроме того, в нормальном пространстве любые непересекающиеся замкнутые множества F и G отделимы окрестностями, поэтому нормальное пространство X сильно нульмерно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ind} X = 0$.

Теорема 2. *Размерность* Ind *монотонна по замкнутым подпространствам: для всякого пространства X и любого его замкнутого подпространства Y выполнено неравенство* $\operatorname{Ind} Y \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, и мы его опустим.

Доказательство следующего предложения тоже аналогично доказательству соответствующего утверждения для размерности ind, и его мы тоже опустим.

Предложение 2. *Для пространства X следующие условия равносильны:*

① $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, *где* $0 \leqslant n < \infty$;

② *для любой окрестности U любого замкнутого множества $F \subset X$ найдутся открытая окрестность V того же множества F и замкнутое множество G со свойствами $V \subset G \subset U$ и* $\operatorname{Ind}(G \setminus V) \leqslant n - 1$;

③ *между любыми непересекающимися замкнутыми множествами F и G имеется перегородка C, для которой* $\operatorname{Ind} C \leqslant n - 1$.

Теорема 3. *Для любого T_1-пространства X выполнено неравенство* $\operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X$.

Доказательство. Если $\operatorname{Ind} X = \infty$, то доказывать нечего. Предположим, что $\operatorname{Ind} X = n < \infty$, где $n \in \{-1, 0, 2, \dots\}$, и применим индукцию по n. Для $n = -1$ утверждение тривиально. Пусть $n \geqslant 0$ и для меньших размерностей всё доказано. Рассмотрим точку $x \in X$ и не содержащее её замкнутое множество $F \subset X$. Поскольку $\operatorname{Ind} X \leqslant n$, имеется перегородка C между $\{x\}$ и F размерности $\operatorname{Ind} C \leqslant n - 1$. По индуктивному предположению $\operatorname{ind} C \leqslant n - 1$. ■

В определении размерности dim используется понятие порядка покрытия.

Определение. Пусть X — множество и $\mathscr{F}$ — индексированное[1)] семейство его подмножеств. Если существует n с тем свойством, что для каждой точки $x \in X$ число элементов семейства $\mathscr{F}$, содержащих x, не превосходит $n+1$, то наименьшее такое число называется *порядком* семейства $\mathscr{F}$ и обозначается $\operatorname{ord} \mathscr{F}$. Если такого n не существует, то порядок семейства $\mathscr{F}$ полагается равным бесконечности: $\operatorname{ord} \mathscr{F} = \infty$.

В частности, порядок семейства, не содержащего непустых множеств, равен -1, а семейство порядка 0 состоит из попарно непересекающихся множеств, не все из которых пусты.

Очевидно, порядок семейства $\mathscr{F}$ — это наибольшее целое число n с тем свойством, что $\mathscr{F}$ содержит $n+1$ множеств с непустым пересечением (если оно существует; если такого числа n нет, то $\operatorname{ord} \mathscr{F} = \infty$). Следовательно, если $\mathscr{F} = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$, $\operatorname{ord} \mathscr{F} \leqslant n$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+2} \in A$ — любые попарно различные индексы, то $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_{n+2}} = \varnothing$.

Определение. *Лебегова размерность* $\dim X$ топологического пространства X определяется как наименьшее число n с тем свойством, что в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие порядка не больше n, если оно существует. Если такого числа нет, то лебегова размерность пространства X полагается равной бесконечности: $\dim X = \infty$.

[1] Здесь индексированность важна: элементы семейства с разными индексами считаются разными, даже если они совпадают.

Очевидно, $\dim X = -1$ тогда и только тогда, когда $X = \varnothing$, и меньших значений размерность $\dim$ принимать не может. Ясно также, что размерность $\dim$ сохраняется гомеоморфизмами.

Замечание 3. В литературе встречаются и другие определения размерности $\dim$. Например, в книге Энгелькинга «Общая топология» размерность $\dim X$ определяется только для тихоновских пространств и словосочетание «открытое покрытие» в её определении везде заменяется на «функционально открытое покрытие». Однако чаще всего размерность $\dim$ понимается в смысле данного выше определения, а для размерности, определённой в книге Энгелькинга (через функционально открытые покрытия), обычно используется обозначение $\dim_0$. Можно доказать, что для любого тихоновского пространства X имеет место равенство $\dim_0 X = \dim \beta X$ и для нормальных пространств размерности $\dim$ и $\dim_0$ совпадают.

Предложение 3. *Для пространства X имеет место неравенство $\dim X \leqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ind} X \leqslant 0$ (и $X \in T_4$).*

Доказательство. Пусть $\dim X \leqslant 0$, множества $A, B \subset X$ замкнуты и $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим конечное открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X порядка $\operatorname{ord} \mathscr{U} \leqslant 0$, вписанное в покрытие $\{X \setminus A, X \setminus B\}$. Поскольку элементы покрытия $\mathscr{U}$ не пересекаются, открытые множества $U = \bigcup\{W \in \mathscr{U} : W \cap A \neq \varnothing\}$ и $U = \bigcup\{W \in \mathscr{U} : W \cap A = \varnothing\}$ тоже не пересекаются. Ясно, что $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cup V = X$. Значит, $\operatorname{Fr} U = \varnothing$.

Пусть теперь $\operatorname{Ind} X = 0$ и $\mathscr{U} = \{U_1, \dots, U_k\}$ — открытое покрытие пространства X. Покажем, что в $\mathscr{U}$ можно вписать дизъюнктное открытое покрытие $\mathscr{V} = \{V_1, \dots, V_k\}$, причём так, что $V_i \subset U_i$ для $i \leqslant k$. Применим индукцию по k. Для $k = 1$ доказывать нечего. Пусть $k > 1$ и для меньших k утверждение верно. Пользуясь индуктивным предположением, впишем в покрытие $\{U_1, \dots, U_{k-2}, U_{k-1} \cup U_k\}$ дизъюнктное открытое покрытие $\{V_1, \dots, V_{k-2}, W\}$ так, что $V_i \subset U_i$ для $i \leqslant k-2$ и $W \subset U_{k-1} \cup U_k$. Поскольку это покрытие дизъюнктно и открыто, все его элементы (в частности, W) открыто-замкнуты. По теореме 2 и предложению 2 найдутся непересекающиеся открытые множества $V_{k-1}, V_k \subset W$ со свойствами $W \setminus U_k \subset V_{k-1}$, $W \setminus U_{k-1} \subset V_k$ и $V_{k-1} \cup V_k = W$. Ясно, что $V_{k-1} \subset U_{k-1}$, $V_k \subset U_k$ и $\{V_1, \dots, V_k\}$ — покрытие пространства X. ■

Следствие 1. *Нормальное пространство X сильно нульмерно, если и только если $\dim X = 0$.*

Замечание 4. Существуют ненормальные сильно нульмерные пространства. Поэтому, вообще говоря, сильная нульмерность слабее равносильных условий $\dim X = 0$ и $\operatorname{Ind} X = 0$. Однако для нормальных пространств все три условия совпадают, а компакты нормальны, так что X сильно нульмерно тогда и только тогда, когда $\dim \beta X = 0$ (здесь βX — максимальная (стоун-чеховская) компактификация пространства X).

Первоначальной целью введения топологических размерностей было доказательство теоремы (точнее, её следствия), что *для всякого натурального n $\dim[0,1]^n = n$ и $\dim \mathbb{R}^n = n$.*

Следствие. *Для $n \neq k$ пространства $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^k$ (также как и пространства $[0,1]^n$ и $[0,1]^k$) не гомеоморфны.*

Доказательство этой теоремы основано на важной технической теореме; она является главным инструментом и при доказательстве многих других фактов теории размерности $\dim$.

Теорема. *Для нормального пространства X и $n \geqslant 0$ следующие условия равносильны:*

① $\dim X \leqslant n$;

② *для любого семейства $\{(A_i, B_i) : i = 1, \dots, n+1\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X существуют перегородки C_i между A_i и B_i, $i \leqslant n+1$, удовлетворяющие условию $\bigcap_{i \leqslant n+1} C_i = \varnothing$;*

③ *для любого семейства* $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, n+1\}$ *пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства* X *существуют непересекающиеся открытые множества* $U_i \supset A_i$ *и* $V_i \supset B_i$, $i \leqslant n+1$, *удовлетворяющие условию* $\bigcup_{i \leqslant n+1}(U_i \cup V_i) = X$;

④ *для любого семейства* $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, n+1\}$ *пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства* X *существуют непересекающиеся замкнутые множества* $D_i \supset A_i$ *и* $E_i \supset B_i$, $i \leqslant n+1$, *удовлетворяющие условию* $\bigcup_{i \leqslant n+1}(D_i \cup E_i) = X$.

Семейство $\{(A_i, B_i) : i = 1, \ldots, n\}$ пар непересекающихся замкнутых подмножеств пространства X называется *несущественным*, если для него выполнено одно (любое) из условий ②–④ в теореме. В противном случае такое семейство называется *существенным*. Доказательство n-мерности куба $[0,1]^n$ основано на том, что семейство n пар его противоположных граней существенно, и на теореме Брауэра о неподвижной точке (согласно этой теореме для любого непрерывного отображения $[0,1]^n \to [0,1]^n$ существует неподвижная точка).

Мы докажем теорему о размерностях евклидовых пространств для куба.

Теорема 4. *Для любого натурального* n $\dim[0,1]^n = n$.

Доказательство. Сперва покажем, что $\dim[0,1]^n \leqslant n$. Воспользуемся условием ② основной теоремы. Пусть $\{(A_i, B_i) : i \leqslant n+1\}$ — произвольное семейство пар попарно непересекающихся замкнутых подмножеств куба $[0,1]^n$. Пусть Q_i, $i \leqslant n+1$, — попарно непересекающиеся плотные подмножества прямой; например, можно положить

$$Q_i = \left\{\frac{a}{p_i^k} : k \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{Z},\ a \text{ не делится на } p_i\right\},$$

где $p_1, \ldots, p_{n+1}$ — любые различные простые числа.

Каждая точка $x \in A_i$ имеет в $\mathbb{R}^n$ открытую окрестность U_x вида $\prod\limits_{j \leqslant n}(a_j, b_j)$, где $a_j, b_j \in Q_i$, со свойством $\overline{U_x}^{\mathbb{R}^n} \cap B_i = \varnothing$. По крайней мере одна координата каждой точки границы $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_x$ множества U_x в $\mathbb{R}^n$ принадлежит множеству Q_i.

Множество A_i замкнуто в $[0,1]^n$ и потому компактно. Значит, из открытого покрытия $\{U_x : x \in A_i\}$ этого множества можно выделить конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_k}\}$. Положим $U_i = \bigcup\limits_{j \leqslant k} U_{x_j}$. Имеем

$$\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_i = \overline{U_i}^{\mathbb{R}^n} \setminus \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n} U_i \subset \bigcup_{j \leqslant k} \overline{U_{x_j}}^{\mathbb{R}^n} \setminus \bigcup_{j \leqslant k} \mathrm{Int}_{\mathbb{R}^n} U_{x_j} = \bigcup_{j \leqslant k} \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_{x_j}.$$

Значит, по меньшей мере одна координата любой точки границы $\mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_i$ принадлежит множеству Q_i.

Каждое пересечение $C_i = [0,1]^n \cap \mathrm{Fr}_{\mathbb{R}^n} U_i$ является перегородкой между A_i и B_i в $[0,1]^n$. Кроме того, $\bigcap\limits_{i \leqslant n+1} C_i = \varnothing$. Действительно, если $x \in \bigcap\limits_{i \leqslant n+1} C_i$, то для каждого $i \leqslant n+1$ у точки x должна найтись координата, принадлежащая множеству Q_i. Это невозможно, так как множества Q_i не пересекаются, а координат у точки x всего n.

Итак, между множествами A_i и B_i мы построили перегородки C_i с пустым пересечением. Согласно основной теореме имеем $\dim[0,1]^n \leqslant n$.

Теперь покажем, что $\dim[0,1]^n \geqslant n$. Воспользуемся условием ④. Предположим, что $\dim[0,1]^n \leqslant n-1$ и в качестве пар непересекающихся замкнутых множеств в $[0,1]^n$ рассмотрим пары противоположных граней куба: для $i \leqslant n$ положим

$$A_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n : x_i = 1\}$$

и

$$B_i = \{(x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n : x_i = 0\}.$$

По основной теореме найдутся непересекающиеся пары замкнутых множеств $D_i \supset A_i$ и $E_i \supset B_i$, которые в совокупности покрывают $[0,1]^n$: $\bigcup\limits_{i \leqslant n} (D_i \cup E_i) = [0,1]^n$.

Для каждого i возьмём непрерывную функцию $f_i \colon [0,1]^n \to [0,1]$ такую, что $f_i(D_i) \subset \{0\}$ и $f_i(E_i) \subset \{1\}$. Положим $f = \Delta_{i \leqslant n} f_i$. Отображение f непрерывно, и оно отображает куб $[0,1]^n$ в его границу, потому что $\bigcup\limits_{i \leqslant n} (D_i \cup E_i) = [0,1]^n$ и $f_i|_{D_i \cup E_i} \in \{0,1\}$ для каждого $i \leqslant n$. Если $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Fr}[0,1]^n$, то для некоторого $i \leqslant n$ имеем либо $x_i = 1$, либо $x_i = 0$. В первом случае $(x_1, \ldots, x_n) \in A_i$ и $f_i(x_i) = 0$, а во втором — $(x_1, \ldots, x_n) \in B_i$ и $f_i(x_i) = 1$. В любом случае i-я координата $f_i\big((x_1, \ldots, x_n)\big)$ точки $f\big((x_1, \ldots, x_n)\big)$ отличается от i-й координаты само́й точки $(x_1, \ldots, x_n)$. Значит, отображение f не имеет неподвижных точек, а такие точки должны существовать по теореме Брауэра. ■