

Компакты

Покрытия

Определение. Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. *Покрытие* множества Y — это любое индексированное семейство $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств X , которое *покрывает* Y , т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathcal{C} \supset Y$.

Если X — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют *открытым* (*замкнутым*, *открыто-замкнутым*) покрытием.

Пусть \mathcal{C}' — ещё одно покрытие множества Y . Говорят, что \mathcal{C}' *вписано* в \mathcal{C} , и пишут $\mathcal{C}' \leq \mathcal{C}$ или $\mathcal{C}' \prec \mathcal{C}$, если всякий элемент C' покрытия \mathcal{C}' содержится в некотором $C \in \mathcal{C}$. Покрытие \mathcal{C}' *комбинаторно вписано* в \mathcal{C} или является *ужатием* покрытия \mathcal{C} , если оба покрытия заиндексированы элементами одного и того же множества A (т.е. $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathcal{C}' = \{C'_\alpha : \alpha \in A\}$) и $C'_\alpha \subset C_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Частный случай вписанного покрытия — подпокрытие: семейство $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ называется *подпокрытием* покрытия \mathcal{C} , если оно само является покрытием, т.е. $\bigcup \mathcal{C}' \supset Y$.

Как правило, мы будем рассматривать ситуации, когда $Y = X$.

Покрытие \mathcal{C}' , вписанное в другое покрытие \mathcal{C} , мельче этого другого покрытия в том отношении, что каждый элемент покрытия \mathcal{C}' меньше некоторого элемента покрытия \mathcal{C} (содержится в нём); иногда так и говорят — что покрытие \mathcal{C}' мельче покрытия \mathcal{C} , а покрытие \mathcal{C} крупнее покрытия \mathcal{C}' . Однако, вообще говоря, ни отношение вписанности, ни обратное ему отношение не является порядком — не хватает антисимметричности, хотя транзитивность и рефлексивность присутствуют. Зато обратное отношение \succ является направлением на множестве всех (всех открытых, всех замкнутых, всех открыто-замкнутых) покрытий, поскольку, каковы бы ни были покрытия \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 одного и того же множества Y , семейство $\mathcal{C} = \{C_1 \cap C_2 : C_1 \in \mathcal{C}_1, C_2 \in \mathcal{C}_2\}$ тоже является покрытием множества Y , причём оно вписано в \mathcal{C}_1 и в \mathcal{C}_2 , а если \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 открыты (замкнуты, открыто-замкнуты), то этим же свойством обладает и \mathcal{C} . Заметим также, что среди всех покрытий произвольного множества всегда есть самое мелкое — это покрытие одноточечными подмножествами.

Замечание 1. Иногда вместо покрытия множества X удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Из законов де Моргана немедленно вытекает, что *семейство \mathcal{C} подмножеств множества X является покрытием множества X тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus C : C \in \mathcal{C}\}$ имеет пустое пересечение.*

Компактные пространства и их свойства

Мы будем часто пользоваться этим замечанием и начнём прямо сейчас: мы приведём сразу два равносильных определения важнейшего топологического свойства — компактности¹, эквивалентность которых вытекает как раз из этого замечания.

Определение. Топологическое пространство *компактно*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются *компактами*.

Определение'. Топологическое пространство *компактно*, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

¹В отечественной литературе долгое время вместо терминов «компактный» и «компакт» использовались термины «бикompактный» и «бикompакт», а компактными назывались метризуемые бикompакты.

Как уже было сказано, эти определения равносильны: если \mathcal{U} — открытое покрытие пространства X , которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{U}\}$ состоит из замкнутых множеств (поскольку все $U \in \mathcal{U}$ открыты), центрировано (если бы существовало конечное подсемейство $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ с пустым пересечением, то согласно важному замечанию множества $\{X \setminus F : F \in \mathcal{F}'\}$ образовывали бы конечное подпокрытие покрытия \mathcal{U}) и имеет пустое пересечение (потому что \mathcal{U} — покрытие). Точно так же если \mathcal{F} — центрированное семейство замкнутых подмножеств X и $\bigcap \mathcal{F} = \emptyset$, то $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ — открытое покрытие² X , и в силу центрированности семейства \mathcal{F} из него нельзя выделить конечное подпокрытие.

Весьма полезно также и следующее простое замечание.

Предложение 1. Пусть X — топологическое пространство и \mathcal{B} — любая база его топологии. Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое его покрытие элементами базы \mathcal{B} содержит конечное подпокрытие.

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства X . Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U_{\alpha(x)}$ покрытия \mathcal{U} , содержащий эту точку, и зафиксируем элемент базы $V_x \in \mathcal{B}$, который содержит точку x и содержится в выбранном элементе покрытия $U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ представляет собой открытое покрытие пространства X элементами базы \mathcal{B} . По предположению оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Поскольку каждое множество V_{x_i} содержится в соответствующем $U_{\alpha(x_i)}$, имеем $U_{\alpha(x_1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$, так что $\{U_{\alpha(x_1)}, \dots, U_{\alpha(x_n)}\}$ — конечное подпокрытие покрытия \mathcal{U} . ■

Компактность можно определить эквивалентным образом и на языке сходимости ультрафильтров.

Теорема 1. Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.

Доказательство. Необходимость. Существование ультрафильтра \mathcal{U} на X , который не сходится ни к одной точке $x \in X$, означает, что у любой точки $x \in X$ есть открытая окрестность U_x , не принадлежащая ультрафильтру \mathcal{U} . Эти окрестности образуют открытое покрытие компактного пространства X ; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. По основному свойству ультрафильтров имеем $U_{x_i} \in \mathcal{U}$ для некоторого $i \leq m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathcal{U}$ для всех i . Значит, ультрафильтра, который не сходится ни к какой точке, существовать не может.

Достаточность. Если существует открытое покрытие \mathcal{V} пространства X , которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathcal{F} = \{X \setminus V : V \in \mathcal{V}\}$ центрировано. Семейство \mathcal{F} содержится в некотором ультрафильтре \mathcal{U} на X . По условию \mathcal{U} сходится к некоторой точке x . Пусть V — содержащий эту точку элемент покрытия \mathcal{V} . Тогда $V \in \mathcal{U}$, поскольку $\mathcal{U} \rightarrow x$, и $X \setminus V \in \mathcal{U}$ по определению семейства $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. Этого быть не может — любые два элемента любого фильтра обязаны пересекаться. Значит, всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие. ■

Теорема 2. Всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто.

²По определению покрытие должно быть индексированным семейством. Однако на индексное множество никаких ограничений не накладывается, и в данном случае можно считать, что это множество \mathcal{F} , т.е. что семейство \mathcal{U} индексировано элементами F этого множества. Вообще, любое семейство можно трактовать как индексированное своими собственными элементами, так что любое семейство множеств, объединение которых содержит данное множество, можно рассматривать как покрытие этого множества. В дальнейшем мы не будем останавливаться на подобных деталях.

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, $K \subset X$ — его компактное подпространство и $x \notin K$. Имеем $\bigcap \{\bar{U} : U \text{ — окрестность точки } x\} = \{x\}$, и, поскольку $x \notin K$, семейство

$$\mathcal{U} = \{X \setminus \bar{U} : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

представляет собой открытое покрытие компакта K . Пусть $\{X \setminus \bar{U}_1, \dots, X \setminus \bar{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда множество $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность точки x , не пересекающая K , а это означает, что $x \notin \bar{K}$. Следовательно, $\bar{K} = K$, т.е. множество K замкнуто. ■

Теорема 3. *Любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $X \subset K$ — его замкнутое подпространство. Рассмотрим любое центрированное семейство \mathcal{F} замкнутых подмножеств пространства X . Поскольку X замкнуто в K , \mathcal{F} является также и центрированным семейством замкнутых подмножеств K , так что $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. ■

Следствие 1. *Компактное пространство не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств.*

Теорема 4. *Любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет точку накопления.*

Доказательство. Пусть A — подмножество компактного пространства, не имеющее точек накопления. Тогда у любой точки $x \in \bar{A}$ найдётся открытая окрестность U_x в X , пересечение которой с A конечно. Подпространство \bar{A} компактного пространства X компактно по теореме 3, и семейство $\{U_x \cap \bar{A} : x \in \bar{A}\}$ является его открытым покрытием. Выделим из него конечное подпокрытие $\{U_{x_1} \cap \bar{A}, \dots, U_{x_k} \cap \bar{A}\}$. Из того, что $U_{x_1} \cap \bar{A} \cup \dots \cup U_{x_k} \cap \bar{A} = \bar{A}$ и все множества $U_{x_i} \cap \bar{A}$ конечны, вытекает, что множество \bar{A} (а значит, и A) конечно. ■

Теорема 5. *Всякий непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $f: K \xrightarrow{\text{на}} \xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим любое открытое покрытие \mathcal{U} пространства X . Очевидно, $\{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ — открытое покрытие пространства K . Оно содержит конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$, и $\{U_1, \dots, U_n\}$ — конечное подпокрытие покрытия \mathcal{U} . ■

Следствие 2. *Всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.*

Доказательство. Пусть $f: K \rightarrow X$ — непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово. По теореме 3 любое замкнутое множество $F \subset K$ компактно, а по теореме 5 образ любого компактного множества компактен и, значит, замкнут в X (по теореме 2); следовательно, отображение f замкнуто. ■

Следствие 3. *Любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

Это следствие можно сформулировать по-другому: если K — компакт с топологией \mathcal{T} , то любая хаусдорфова топология на K , более слабая, чем \mathcal{T} , совпадает с \mathcal{T} . Другими словами, топологию компакта нельзя ослабить.

Теорема 6. *Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.*

Доказательство. Если $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция, то $\{f^{-1}((-n, n)) : n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие пространства X , из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. ■

Перейдём к более сложным свойствам компактных пространств. Начнём с того, что всякий компакт нормален. Доказательство этого факта проводится поэтапно: сначала нужно показать, что всякое хаусдорфово компактное пространство регулярно, а затем — что всякое регулярное компактное пространство нормально.

Предложение 2. *Во всяком хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, K — компактное подмножество X и $x \in X \setminus K$. Для каждой точки $y \in K$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Открытое покрытие $\{U_y : y \in K\}$ компакта K содержит конечное подпокрытие $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$. Ясно, что $U = \bigcup_{i \leq n} U_{y_i}$ — открытая окрестность множества K , $V = \bigcap_{i \leq n} V_{y_i}$ — открытая окрестность точки x и $U \cap V = \emptyset$. ■

Из этого предложения и теоремы 3 немедленно вытекает регулярность всякого компакта.

Предложение 3. *Во всяком T_3 -пространстве любые два непересекающихся множества, одно из которых компактно, а другое замкнуто, имеют непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Пусть $X \in T_3$, K — компактное подмножество пространства X , F — замкнутое подмножество пространства X и $K \cap F = \emptyset$. Для каждой точки $x \in K$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_x \ni x$ и $V_x \supset F$. Открытое покрытие $\{U_x : x \in K\}$ множества K содержит конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Ясно, что $U = \bigcup_{i \leq n} U_{x_i}$ — открытая окрестность множества K , $V = \bigcap_{i \leq n} V_{x_i}$ — открытая окрестность множества F и $U \cap V = \emptyset$. ■

Объединяя предложения 2 и 3 и вспоминая теорему 3 (что в компактном пространстве все замкнутые подмножества компактны), мы приходим к такому выводу.

Теорема 7. *Всякий компакт нормален.*

Предложения 2 и 3 иллюстрируют тезис, что компакты во многом похожи на конечные пространства. Во всяком случае, с точки зрения аксиом отделимости T_2 и T_3 компактные подмножества ведут себя как точки. Для аксиомы $T_{3\frac{1}{2}}$ верно аналогичное утверждение.

Предложение 4. *Во всяком $T_{3\frac{1}{2}}$ -пространстве X для любых непересекающихся компактного множества K и замкнутого множества F существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, тождественно равная 0 на K и 1 на F .*

Доказательство. Для каждой точки $x \in K$ возьмём непрерывную функцию $f_x: X \rightarrow [0, 1]$, принимающую значение 0 в точке x и тождественно равную 1 на F , и положим $U_x = f_x^{-1}([0, \frac{1}{2}))$. Из открытого покрытия $\{U_x : x \in K\}$ компактного множества K выделим конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Функция $g = \min(f_1, \dots, f_n)$, определённая правилом $g(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, непрерывна, причём $g(K) \subset [0, \frac{1}{2})$ и $g(F) \subset \{1\}$. Осталось положить $f(x) = \max\{2(g(x) - \frac{1}{2}), 0\}$ для всех $x \in X$. ■

Теорема Тихонова о компактности произведений

Теорему Тихонова о компактности произведений обычно называют просто теоремой Тихонова. Это одна из главных теорем не только общей топологии, но и всей математики. Она находит применения в самых разнообразных и неожиданных контекстах. Здесь мы ограничимся тем, что докажем её равносильность аксиоме выбора.

То, что теорему Тихонова можно вывести из системы аксиом ZF и аксиомы выбора (т.е. из ZFC), ясно из существования её доказательства — по сути само это доказательство как раз и

есть её вывод. Осталось показать, как из системы ZF и теоремы Тихонова вывести аксиому выбора.

Напомним формулировку аксиомы выбора: для каждого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых множеств существует функция выбора, т.е. отображение $f: A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ с тем свойством, что $f(\alpha) \in X_\alpha$ для всякого $\alpha \in A$. Заметим, что всякая функция выбора — это просто элемент декартова произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, так что аксиома выбора равносильна утверждению, что декартово произведение непустого семейства непустых множеств непусто.

Итак, пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — непустое семейство непустых множеств. В каждом множестве X_α возьмём по точке x_α ; мы можем это сделать, поскольку все множества X_α непусты (однако без аксиомы выбора мы не можем утверждать, что все точки x_α образуют множество). Возьмём произвольную точку $*$ и положим $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{*\}$. Снабдим каждое множество Y_α топологией $\mathcal{T}_\alpha = \{\emptyset, Y_\alpha, X_\alpha, \{*\}\}$. Каждое Y_α с этой топологией компактно. По теореме Тихонова произведение $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$ тоже компактно (причём это произведение заведомо непусто, поскольку оно содержит, например, отображение $f: A \rightarrow \bigcup Y_\alpha$, принимающее постоянное значение $*$ во всех точках α). Для каждого $\alpha \in A$ положим $F_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$. По определению топологии произведения все проекции π_α непрерывны; значит, каждое множество F_α замкнуто в $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$, будучи прообразом замкнутого в Y_α множества X_α . Кроме того, семейство $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Действительно, для любых $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ пересечение $F_{\alpha_1} \cap \dots \cap F_{\alpha_n}$ содержит функцию $f: A \rightarrow \bigcup Y_\alpha$, определённую правилом $f(\alpha_i) = x_{\alpha_i}$ для $i \leq n$ и $f(\alpha) = *$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Такая функция существует, поскольку аксиомы ZF позволяют нам формировать конечные декартовы произведения (в частности, $A \times (\bigcup Y_\alpha)$) и выделять в них подмножества, определённые конкретными формулами.

Таким образом, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства $\prod_{\alpha \in A} Y_\alpha$. Поскольку это пространство компактно, пересечение $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$ непусто. Осталось заметить, что это пересечение совпадает с произведением $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Теорема (теорема Тихонова о компактности произведений). *Топологическое произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все X_α компактны.*

Доказательство. Необходимость немедленно вытекает из теоремы 5 и непрерывности всех канонических проекций $\pi_\beta: \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \rightarrow X_\beta$.

Для доказательства достаточности воспользуемся критерием компактности в терминах ультрафильтров. Пусть $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ — топологическое произведение семейства компактных пространств и \mathcal{U} — любой ультрафильтр на множестве $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Нам нужно показать, что \mathcal{U} сходится к некоторой точке. Для каждого $\alpha \in A$ положим $\mathcal{U}_\alpha = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathcal{U}\}$. Семейство \mathcal{U}_α является ультрафильтром на X_α , и поскольку X_α компактно, \mathcal{U}_α сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $\mathbf{x} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$ и покажем, что \mathcal{U} сходится к точке \mathbf{x} . Пусть U — любая окрестность точки \mathbf{x} в $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha$. По определению канонической окрестности найдётся такое конечное множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset A$, что $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Для каждого $i \leq n$ ультрафильтр \mathcal{U}_{α_i} сходится к x_{α_i} , поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathcal{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathcal{U}$. Из того, что пересечение конечного числа элементов любого фильтра принадлежит этому фильтру, вытекает, что $\prod_{\alpha \in A} V_\alpha = \bigcap_{i \leq n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathcal{U}$, а из того, что вместе с каждым своим элементом всякий фильтр содержит все бóльшие множества, — что $U \in \mathcal{U}$. Мы показали, что любая окрестность точки \mathbf{x} принадлежит ультрафильтру \mathcal{U} , а это и означает, что \mathcal{U} сходится к \mathbf{x} . ■