## Топологические произведения

Топологическое произведение двух пространств $X$ и $Y$ — это декартово произведение $X \times Y$ с топологией, порождённой базой

$$\mathscr{B} = \{U \times V : U \text{ открыто в } X,\, V \text{ открыто в } Y\}.$$

Точно так же определяется и произведение произвольного конечного числа пространств.

Здесь мы рассмотрим топологическое произведение произвольного семейства топологических пространств.

Напомним, что декартово произведение произвольного семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — это множество

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\}$$

и что элементы $f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ принято записывать в виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ — $\alpha$-я координата элемента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ для каждого $\alpha \in A$. Напомним также, что каноническая проекция произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ на сомножитель $X_\beta$, где $\beta \in A$, — это отображение $\pi_\beta\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

В случае, когда множества $X_\alpha$ снабжены топологией, естественно попытаться определить каким-нибудь очевидным образом топологию и на произведении $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. Первое, что приходит в голову, — объявить базой топологии $X$ всевозможные произведения вида $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое $U_\alpha$ открыто в $X_\alpha$. Топология, которая получается в результате, называется *ящичной топологией*, и произведение $X$ с этой топологией обозначается $\mathop{\square}\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Однако такой способ определения топологии не вполне удачен — произведение бесконечного числа недискретных пространств редко обладает хорошими свойствами. Например, такое произведение никогда не бывает метризуемым (и даже никогда не удовлетворяет первой аксиоме счётности), редко бывает связным, никогда не сепарабельно и т.п. (Зато с использованием ящичных произведений было построено множество полезных контрпримеров в топологии.) Кроме того, диагональное произведение непрерывных отображений не всегда непрерывно относительно ящичной топологии, а его непрерывность, как мы увидим, очень важна.

Помимо всего прочего, произведение топологических пространств с ящичной топологией не является произведением в смысле теории категорий, где произведение объектов $X_\alpha$, $\alpha \in A$, определяется как объект $X$ вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ (называемых *каноническими проекциями*) с тем свойством, что для любого объекта $Y$ этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f\colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha\colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\colon Y \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным. Впоследствии мы увидим, что произведения пространств с определённой ниже тихоновской топологией отвечают этому требованию; более того, ни для какой другой топологии оно не выполнено.

Обычно произведения топологических пространств рассматриваются с топологией, не столь очевидной, как ящичная, но более естественной в разных отношениях. Она называется *топологией произведения* или *тихоновской топологией* и определяется как самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Такая топология существует на произведении любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ топологических пространств; она порождена предбазой, состоящей из всех множеств вида

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\beta \in U_\beta\},$$

где $\beta \in A$ — любой фиксированный индекс, а $U_\beta$ — любое открытое множество в $X_\beta$. Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются *топологическими* или *тихоновскими произведениями*. В дальнейшем мы будем рассматривать произведения именно с этой топологией. Иногда, особенно если речь идёт о пространствах функций, т.е. подпространствах произведений вида $\mathbb{R}^X$, топологию произведения называют *топологией поточечной сходимости*: последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, определённых на $X$, поточечно сходится к функции $f$, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдётся такое $N(x) \in \mathbb{N}$, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N(x)$, а это как раз и означает сходимость в тихоновской топологии.

Ясно, что для конечных произведений тихоновская топология (впрочем, как и ящичная) совпадает с той, что была введена в начале раздела. Очевидно также, что евклидова топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с топологией произведения на $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$.

Мы начнём с нескольких общих замечаний о тихоновских произведениях. В дальнейшем мы для краткости иногда будем писать просто $\prod X_\alpha$ вместо $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ и $(x_\alpha)$ вместо $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

**Предложение 1.** *Для любого семейства пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ все множества вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое $U_\alpha$ — открытое подмножество пространства $X_\alpha$ и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов $\alpha$, образуют базу топологического произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.*

*Более того, если для каждого $\alpha$ зафиксирована некоторая база $\mathscr{B}_\alpha$ пространства $X_\alpha$, то множества вида $\prod_{\alpha\in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ для конечного числа индексов $\alpha$ и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех остальных индексов, тоже образуют базу топологического произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.*

*Доказательство.* Из определения тихоновской топологии вытекает, что семейство всех множеств вида $\bigcap_{i\le k} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$, где $k \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ и каждое $U_{\alpha_i}$ открыто в $X_{\alpha_i}$, является базой топологического произведения $\prod X_\alpha$. Поэтому для доказательства первого утверждения достаточно заметить, что для любых $\beta \in A$ и $U_\beta \subset X_\beta$ имеем

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\beta \in U_\beta\} = \prod U_\alpha, \quad \text{где } U_\alpha = X_\alpha \text{ для } \alpha \ne \beta,$$

и что $\prod A_\alpha \cap \prod B_\alpha = \prod (A_\alpha \cap B_\alpha)$ для любых $A_\alpha, B_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in A$.

Второе утверждение сразу вытекает из первого. ■

**Определение.** База топологического произведения, описанная в первом утверждении предложения 1, называется *канонической базой*, а элементы этой базы — *каноническими открытыми множествами*[1].

**Упражнение.** Докажите, что все канонические проекции $\pi_\beta \colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta \in A$, любого топологического произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ являются открытыми отображениями.

**Предложение 2.** *Если $X_\alpha$, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для $\alpha \subset A$, то топология произведения на $\prod Y_\alpha$ совпадает с топологией, индуцированной из топологического произведения $\prod X_\alpha \supset \prod Y_\alpha$.*

[1] Не следует путать канонические открытые множества с *канонически открытыми* — так называются множества $U$ со свойством $U = \mathrm{Int}\overline{\mathrm{U}}$.

*Доказательство.* Достаточно заметить, что пересечение $\prod Y_\alpha$ с любым элементом канонической базы произведения $\prod X_\alpha$ является элементом канонической базы произведения $\prod Y_\alpha$ и каждый элемент канонической базы произведения $\prod Y_\alpha$ является пересечением с $\prod Y_\alpha$ некоторого элемента канонической базы произведения $\prod X_\alpha$. ∎

**Предложение 3.** *Пусть $X_\alpha$, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для $\alpha \in A$. Тогда замыкание произведения $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha \subset \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ в топологическом произведении $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ равно произведению замыканий множеств $Y_\alpha$ в $X_\alpha$:*

$$\overline{\prod Y_\alpha} = \prod \overline{Y}_\alpha.$$

*Доказательство.* По определению замыкания $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \overline{\prod Y_\alpha}$, если и только если для каждого элемента $\prod U_\alpha$ канонической базы $\prod X_\alpha$, содержащего $(x_\alpha)$, имеем $\prod U_\alpha \cap \prod Y_\alpha = \prod (U_\alpha \cap Y_\alpha) \neq \varnothing$, т.е. $U_\alpha \cap Y_\alpha \neq \varnothing$ для всех $\alpha$. В частности, для каждого $\alpha \in A$ и любой окрестности $U$ точки $x_\alpha$ в $X_\alpha$ должно выполняться условие $U \cap Y_\alpha \neq \varnothing$, а это и означает, что $x_\alpha \in \overline{Y}_\alpha$. Таким образом, $\overline{\prod Y_\alpha} \subset \prod \overline{Y}_\alpha$. Обратно, если $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod \overline{Y}_\alpha$, т.е. $x_\alpha \in \overline{Y}_\alpha$ для всех $\alpha$, то для любого $\alpha \in A$ и любой окрестности $V_\alpha$ точки $x_\alpha$ в $X_\alpha$ пересечение $V_\alpha \cap Y_\alpha$ содержит некоторую точку $y_\alpha$. Имеем $(y_\alpha) \in \prod V_\alpha \cap \prod Y_\alpha$. Таким образом, точка $(x_\alpha)$ принадлежит замыканию множества $\prod Y_\alpha \subset \prod X_\alpha$ даже в ящичной топологии и тем более в топологии произведения. ∎

**Следствие 1.** *Пусть $X_\alpha$, $\alpha \in A$, — непустые топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для $\alpha \in A$. Множество $\prod Y_\alpha$ плотно в топологическом произведении $\prod X_\alpha$ тогда и только тогда, когда $Y_\alpha$ плотно в $X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.*

**Замечание 1.** Предложение 3 не даёт описания оператора замыкания в $\prod X_\alpha$, потому что не все множества $Y \subset \prod X_\alpha$ можно представить в виде $\prod Y_\alpha$, где $Y_\alpha \subset X_\alpha$. Есть много замкнутых множеств в $\prod X_\alpha$, которые не являются произведениями никаких подмножеств пространств $X_\alpha$. Но если замкнутое множество $Y \subset \prod X_\alpha$ есть произведение некоторых множеств $Y_\alpha \subset X_\alpha$, то эти множества $Y_\alpha$ замкнуты в $X_\alpha$. Точно так же следствие 1 даёт критерий плотности в топологических произведениях лишь для множеств, которые сами являются произведениями.

**Предложение 4.** *Пусть $X_\alpha$, $\alpha \in A$, — непустые топологические пространства.*

1. *Для каждого $\beta \in A$ пространство $X_\beta$ вкладывается в топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ в качестве подпространства.*
2. *Если все $X_\alpha$ — $T_1$-пространства, то для каждого $\beta \in A$ пространство $X_\beta$ вкладывается в $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ в качестве замкнутого подпространства.*

*Доказательство.* Выберем по точке $*_\alpha$ в каждом пространстве $X_\alpha$.

Для каждого $\beta \in A$ положим $X^*_\beta = \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, где $Y_\beta = X_\beta$ и $Y_\alpha = \{*_\alpha\}$ для $\alpha \neq \beta$. Очевидно, сужение $\pi_\beta\big|_{X^*_\beta} \colon X^*_\beta \to X_\beta$ — гомеоморфизм (оно взаимно однозначно, непрерывно по определению топологии произведения и факторно — это вытекает из теоремы ). Значит, отображение $\left(\pi_\beta\big|_{X^*_\beta}\right)^{-1}$, рассматриваемое как отображение в $\prod X_\alpha \supset X^*_\beta$, — гомеоморфное вложение.

Если все $X_\alpha$ являются $T_1$-пространствами, то каждое одноточечное множество $\{*_\alpha\}$ замкнуто в $X_\alpha$, и по предложению 3 подпространства $X^*_\beta$ замкнуты в $\prod X_\alpha$ для всех $\beta \in A$. ∎

При изучении топологических произведений особую важность приобретает вопрос о мультипликативности тех или иных топологических свойств.

**Определение.** Говорят, что топологическое свойство $\mathscr{P}$ *мультипликативно* (*конечно мультипликативно, счётно мультипликативно, κ-мультипликативно* для кардинала $\kappa$), если для любого индексного множества $A$ (любого конечного множества $A$, любого счётного множества $A$, любого множества $A$ мощности, не превосходящей $\kappa$) и любых топологических пространств $X_\alpha$, $\alpha \in A$, со свойством $\mathscr{P}$ топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ тоже обладает свойством $\mathscr{P}$.

Нормальность не мультипликативна и даже не конечно мультипликативна (прямая Зоргенфрея нормальна, но её квадрат не $T_4$-пространство). Однако другие аксиомы отделимости мультипликативны.

**Теорема 1.** *Топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме отделимости $T_i$, $i \le 3\frac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда $X_\alpha \in T_i$ для всех $\alpha \in A$.*

*Если $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ нормально, то все $X_\alpha$ нормальны.*

*Доказательство.* То, что произведение $T_i$-пространств является $T_i$-пространством для $i \le 2$, более или менее очевидно (для любых разных точек $(x_\alpha)$ и $(y_\alpha)$ в $\prod X_\alpha$ надо взять координату $\alpha$, для которой $x_\alpha \ne y_\alpha$, разделить точки $x_\alpha$ и $y_\alpha$ требуемым образом в $X_\alpha$ и применить $\pi_\alpha^{-1}$). Покажем, что произведение $T_3$-пространств удовлетворяет аксиоме $T_3$. Пусть $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ и $U$ — любая окрестность точки $(x_\alpha)$ в $\prod X_\alpha$. Возьмём элемент $\prod U_\alpha$ канонической базы произведения $\prod X_\alpha$, содержащийся в $U$ и содержащий $(x_\alpha)$. Число тех координат $\alpha$, для которых $U_\alpha \ne X_\alpha$, конечно; пусть это координаты $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Для каждого $i \le n$ найдём такую окрестность $V_{\alpha_i}$ точки $x_{\alpha_i}$ в $X_{\alpha_i}$, что $\overline{V}_{\alpha_i} \subset U_{\alpha_i}$. Для $\alpha \ne \alpha_i$, $i \le n$, положим $V_\alpha = X_\alpha$. Тогда $\prod V_\alpha$ — каноническая окрестность точки $(x_\alpha)$ и $\prod \overline{V}_\alpha \subset \prod U_\alpha \subset U$. По предложению 3 имеем $\overline{\prod V_\alpha} \subset U$, что доказывает выполнение аксиомы $T_3$.

Выполнение аксиомы $T_{3\frac{1}{2}}$ для произведения $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств доказывается примерно так же: для точки $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ и любой её окрестности $U$ найдём каноническую окрестность $\prod U_\alpha \subset U$ точки $(x_\alpha)$. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ таковы, что $U_\alpha = X_\alpha$ для всех $\alpha \ne \alpha_i$, $i \le n$. Для каждого $i \le n$ возьмём непрерывную функцию $f_{\alpha_i} \colon X_{\alpha_i} \to [0,1]$, удовлетворяющую условиям $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = 0$ и $f_{\alpha_i}(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) \subset \{1\}$. Положим $g_{\alpha_i} = f_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}$ и $g = \max\{g_{\alpha_i} : i \le n\}$. Мы получили непрерывную функцию $g\colon \prod X_\alpha \to [0,1]$ с тем свойством, что $g\big((x_\alpha)\big) = 0$ и $g\big(\prod X_\alpha \setminus U\big) \subset g\big(\prod X_\alpha \setminus \prod U_\alpha\big) \subset \{1\}$, что и требовалось.

Мы показали, что для $i \le 3\frac{1}{2}$ произведение $T_i$-пространств тоже является $T_i$-пространством. То, что все сомножители в произведении, удовлетворяющем аксиоме $T_i$, где $i \le 3\frac{1}{2}$, удовлетворяют той же аксиоме, так же как и последнее утверждение (о нормальном произведении), вытекает из предложения 4. ∎

Следующая теорема — очевидное следствие предложения 1, и мы опускаем её доказательство.

**Теорема 2.** *Первая и вторая аксиомы счётности счётно мультипликативны.*

### Отображения топологических пространств в произведения

**Предложение 5.** *Отображение $f\colon X \to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда композиция $\pi_\alpha \circ f$ непрерывна для каждого $\alpha \in A$.*

*Доказательство.* Доказательства требует только непрерывность отображения $f$ в предположении непрерывности всех композиций $\pi_\alpha \circ f$. Рассмотрим предбазу

$$\mathscr{B} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\ U \text{ открыто в } X_\alpha\}$$

топологии произведения $\prod X_\alpha$. Для каждого $\alpha \in A$ имеем $f^{-1}\big(\pi_\alpha^{-1}(U)\big) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U)$, а это множество открыто в силу непрерывности отображения $\pi_\alpha \circ f$. Таким образом, прообраз при отображении $f$ каждого элемента предбазы $\mathscr{B}$ открыт. По предложению **??** отображение $f$ непрерывно. ∎

Из этого предложения вытекают две важные теоремы.

**Теорема 3.** *Декартово произведение $\prod_{\alpha\in A} f_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, непрерывно.*

*Доказательство.* Для каждого $\beta \in A$ обозначим каноническую проекцию произведения $\prod X_\alpha$ на $X_\beta$ через $\pi^X_\beta$, а каноническую проекцию произведения $\prod Y_\alpha$ на $Y_\beta$ — через $\pi^Y_\beta$. Очевидно, для всех $\beta \in A$ имеем

$$\pi^Y_\beta \circ \prod_{\alpha\in A} f_\alpha = f_\beta \circ \pi^X_\beta,$$

а отображения $f_\beta \circ \pi^X_\beta$ непрерывны как композиции непрерывных отображений. Осталось применить предложение 5. ■

**Теорема 4.** *Диагональное произведение $\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, одного и того же пространства $X$ в пространства $Y_\alpha$, $\alpha \in A$, непрерывно.*

Действительно, для каждого $\alpha \in A$ имеем $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$, так что теорема сразу вытекает из предложения 5.

Сделаем несколько полезных замечаний о произведениях отображений, которые пригодятся нам в дальнейшем.

**Замечание 2.** Для любого семейства отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, и любых множеств $X'_\alpha \subset X_\alpha$ и $Y'_\alpha \subset Y_\alpha$ выполнены равенства

$$\left(\prod f_\alpha\right)\left(\prod X'_\alpha\right) = \prod f_\alpha(X'_\alpha) \quad \text{и} \quad \left(\prod f_\alpha\right)^{-1}\left(\prod Y'_\alpha\right) = \prod f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha).$$

**Замечание 3.** Для любого пространства $X$, любого семейства отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, и любых множеств $X' \subset X$ и $Y'_\alpha \subset Y_\alpha$ выполнены соотношения

$$\Big(\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)(X') \subset \prod_{\alpha\in A} f_\alpha(X') \quad \text{и} \quad \Big(\mathop{\Delta}\limits_{\alpha\in A} f_\alpha\Big)^{-1}\Big(\prod_{\alpha\in A} Y'_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha).$$

**Замечание 4.** Для семейства отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, диагональное произведение $\Delta f_\alpha$ есть композиция отображения $i = \Delta^A \mathrm{id_X}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X^A}$ (диагонального произведения $|A|$ экземпляров тождественного отображения $X \to X$) и декартова произведения $\prod f_\alpha\colon X^A \to \prod Y_\alpha$. Образ $\Delta = i(X) \subset X^A$ называется *диагональю* произведения $X^A$. Легко видеть, что

$$\Delta = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X^A : x_\alpha = x_\beta \text{ для любых } \alpha,\beta \in A\} = \\ = \bigcap_{\beta,\gamma\in A} \{\mathbf{x} \in X^A : \pi_\beta(\mathbf{x}) = \pi_\gamma(\mathbf{x})\}.$$

Если $X$ — хаусдорфово топологическое пространство, то, поскольку все канонические проекции $X^A \to X$ непрерывны и пересечение замкнутых множеств замкнуто, по теореме **??** о замкнутости множества точек совпадения непрерывных отображений диагональ $\Delta$ замкнута в произведении $X^A$.

Теперь рассмотрим вложения топологических пространств в декартовы произведения.

**Определение.** Пусть $X$ — множество, $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство множеств и $\mathscr{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство отображений. Говорят, что $\mathscr{F}$ *разделяет точки* множества $X$, если для каждой пары различных точек $x, y \in X$ найдётся $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha(x) \ne f_\alpha(y)$.

Если $X$ и все $Y_\alpha$ — топологические пространства и для каждой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, не содержащего $x$, существует такой индекс $\alpha \in A$, что $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}Y_\alpha$, то говорят, что семейство $\mathscr{F}$ *разделяет точки и замкнутые множества* в пространстве $X$.

Заметим, что если $X$ — $T_0$-пространство, то любое семейство отображений, разделяющее точки и замкнутые множества в пространстве $X$, разделяет и точки.

**Теорема 5 (теорема о диагональном произведении).** *Если семейство непрерывных отображений $\mathscr{F} = \{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки пространства $X$, то диагональное произведение $f = \Delta f_\alpha\colon X \to \prod Y_\alpha$ — непрерывная инъекция. Если, сверх того, семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то $f$ — гомеоморфное вложение.*

*В частности, если существует $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha$ — гомеоморфное вложение, то $f$ тоже гомеоморфное вложение.*

Доказательство этой теоремы основано на следующей лемме.

**Лемма 1.** *Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств инъективно и одноэлементное семейство $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества, то $f$ — гомеоморфное вложение.*

*Доказательство.* Нам нужно доказать, что подотображение отображения $f$ с областью значений $f(X)$, т.е. отображение $\check{f}\colon X \to f(X)$, определённое правилом $\check{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, является гомеоморфизмом. Поскольку отображение $\check{f}$ непрерывно и взаимно однозначно по предположению, достаточно проверить, что оно замкнуто, или, другими словами, что для каждого замкнутого множества $F \subset X$ имеет место равенство

$$\check{f}(F) = \overline{\check{f}(F)}f(X), \qquad \text{т.е.} \qquad f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}Y. \tag{$\star$}$$

Пусть $F$ — замкнутое множество в $X$. Если $f(x) \in f(X) \setminus f(F)$, то $x \notin F$ и $f(x) \notin \overline{f(F)}Y$, поскольку $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Следовательно, правая часть равенства $(\star)$ содержится в левой. Обратное включение очевидно. ■

*Доказательство теоремы.* Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки, то для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует такое $f_\alpha \in \mathscr{F}$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Таким образом, $f(x) \neq f(y)$, а это и означает, что $f$ инъективно. Непрерывность $f$ следует из теоремы 4.

Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то семейство $\{f\}$ тоже обладает этим свойством, так как если $f(x) \in \overline{f(F)}$ для некоторого $F \subset X$, то

$$f_\alpha(x) = \pi_\alpha(f(x)) \in \pi_\alpha(\overline{f(F)}) \subset \overline{\pi_\alpha(f(F))} = \overline{f_\alpha(F)}$$

для каждого $\alpha \in A$ (здесь мы использовали непрерывность проекций). Осталось применить лемму. ■

**Следствие 2.** *Диагональ любой степени $X^A$ топологического пространства $X$ гомеоморфна этому пространству.*

Действительно, в силу доказанной теоремы диагональное произведение $i = \Delta^A \mathrm{id}_\mathrm{X}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}^\mathrm{A}$ тождественных отображений $\mathrm{id}_\mathrm{X}\colon \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ является гомеоморфным вложением, а диагональ — это образ пространства $X$ при отображении $i$.

Другое следствие теоремы о диагональном произведении отображений — отдельная важная теорема, известная как теорема Тихонова о вложении в тихоновский куб.

**Определение.** *Тихоновским кубом* называется топологическое произведение вида $[0,1]^\kappa$, где $\kappa$ — любой бесконечный кардинал. Тихоновский куб $[0,1]^{\aleph_0}$ называется также *гильбертовым кубом.*

**Теорема 6 (теорема Тихонова о вложении).** *Всякое тихоновское пространство веса $\kappa \geq \aleph_0$ вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^\kappa$.*

*Доказательство.* Пусть $X$ — тихоновское пространство и $w(X) = \kappa \geq \aleph_0$. Поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, семейство всех дополнений до прообразов 1 при непрерывных функциях $X \to [0,1]$ составляет базу пространства $X$, а поскольку $w(X) = \kappa$, из этой базы можно выделить базу $\mathscr{B}$ мощности $\kappa$. Пусть $\mathscr{B} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, где $|A| = \kappa$. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём непрерывную функцию $f_\alpha \colon X \to [0,1]$, для которой $U_\alpha = f_\alpha^{-1}\big([0,1)\big)$.

Семейство $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества: если $x \in X$ и $F \subset X$ — не содержащее точку $x$ замкнутое множество, то найдётся окрестность $U_\alpha \in \mathscr{B}$ этой точки, не пересекающая $F$. Соответствующая функция $f_\alpha$ переводит $F$ в 1, причём $f_\alpha(x) \neq 1$, поскольку $f_\alpha(U_\alpha) \subset [0,1)$ и $x \in U_\alpha$. Значит, $f(x) \notin \overline{f(F)}$.

Поскольку $X$ — $T_0$-пространство, семейство $\mathscr{F}$ разделяет также и точки. По теореме о диагональном произведении $\Delta\, f_\alpha \colon X \to [0,1]^A = [0,1]^\kappa$ — гомеоморфное вложение. ■

**Замечание 5.** Вес тихоновского куба $[0,1]^\kappa$ равен $\kappa$. Действительно, из того, что $w([0,1]) = \aleph_0$, немедленно вытекает, что каноническая предбаза (а значит, и каноническая база) произведения $[0,1]^\kappa$ имеет мощность $\kappa$. Значит, вес куба $[0,1]^\kappa$ не больше $\kappa$. Но он не может быть и меньше $\kappa$ — ведь мы только что доказали, что любое тихоновское пространство веса $\kappa$ (в частности, дискретное пространство мощности $\kappa$) вкладывается в $[0,1]^\kappa$, а вес подпространства не может быть больше веса самого пространства. Следовательно, $w([0,1]^\kappa) = \kappa$, и теорему о вложении в тихоновский куб можно сформулировать так: *любое бесконечное тихоновское пространство вкладывается в тихоновский куб того же веса.*