Компакты

Покрытия

Определение. Пусть X — произвольное множество и $Y \subset X$. *Покрытие* множества Y — это любое индексированное семейство $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств X, которое *покрывает* Y, т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$.

Если X — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют *открытым* (*замкнутым*, *открыто-замкнутым*) покрытием.

Пусть $\mathscr{C}'$ — ещё одно покрытие множества Y. Говорят, что $\mathscr{C}'$ *вписано* в $\mathscr{C}$, и пишут $\mathscr{C}' \le \mathscr{C}$ или $\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$, если всякий элемент C' покрытия $\mathscr{C}'$ содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$. Покрытие $\mathscr{C}'$ *комбинаторно вписано* в $\mathscr{C}$ или является *ужатием* покрытия $\mathscr{C}$, если оба покрытия заиндексированы элементами одного и того же множества A (т.е. $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathscr{C}' = \{C'_\alpha : \alpha \in A\}$) и $C'_\alpha \subset C_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Частный случай вписанного покрытия — подпокрытие: семейство $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ называется *подпокрытием* покрытия $\mathscr{C}$, если оно само является покрытием, т.е. $\bigcup \mathscr{C}' \supset Y$.

Как правило, мы будем рассматривать ситуации, когда $Y = X$.

Покрытие $\mathscr{C}'$, вписанное в другое покрытие $\mathscr{C}$, мельче этого другого покрытия в том отношении, что каждый элемент покрытия $\mathscr{C}'$ меньше некоторого элемента покрытия $\mathscr{C}$ (содержится в нём); иногда так и говорят — что покрытие $\mathscr{C}'$ мельче покрытия $\mathscr{C}$, а покрытие $\mathscr{C}$ крупнее покрытия $\mathscr{C}'$. Однако, вообще говоря, ни отношение вписанности, ни обратное ему отношение не является порядком — не хватает антисимметричности, хотя транзитивность и рефлексивность присутствуют. Зато обратное отношение $\succ$ является направлением на множестве всех (всех открытых, всех замкнутых, всех открыто-замкнутых) покрытий, поскольку, каковы бы ни были покрытия $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ одного и того же множества Y, семейство $\mathscr{C} = \{C_1 \cap C_2 : C_1 \in \mathscr{C}_1,\, C_2 \in \mathscr{C}_2\}$ тоже является покрытием множества Y, причём оно вписано в $\mathscr{C}_1$ и в $\mathscr{C}_2$, а если $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ открыты (замкнуты, открыто-замкнуты), то этим же свойством обладает и $\mathscr{C}$. Заметим также, что среди всех покрытий произвольного множества всегда есть самое мелкое — это покрытие одноточечными подмножествами.

Замечание 1. Иногда вместо покрытия множества X удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Из законов де Моргана немедленно вытекает, что *семейство $\mathscr{C}$ подмножеств множества X является покрытием множества X тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ имеет пустое пересечение.*

Компактные пространства и их свойства

Мы будем часто пользоваться этим замечанием и начнём прямо сейчас: мы приведём сразу два равносильных определения важнейшего топологического свойства — компактности[1], эквивалентность которых вытекает как раз из этого замечания.

Определение. Топологическое пространство *компактно*, если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются *компактами*.

Определение′. Топологическое пространство *компактно*, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

[1] В отечественной литературе долгое время вместо терминов «компактный» и «компакт» использовались термины «бикомпактный» и «бикомпакт», а компактами назывались метризуемые бикомпакты.

Как уже было сказано, эти определения равносильны: если $\mathscr{U}$ — открытое покрытие пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus U : U \in \mathscr{U}\}$ состоит из замкнутых множеств (поскольку все $U \in \mathscr{U}$ открыты), центрировано (если бы существовало конечное подсемейство $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ с пустым пересечением, то согласно важному замечанию множества $\{X \setminus F : F \in \mathscr{F}'\}$ образовывали бы конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$) и имеет пустое пересечение (потому что $\mathscr{U}$ — покрытие). Точно так же если $\mathscr{F}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств X и $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$, то $\mathscr{U} = \{X \setminus F : F \in \mathscr{F}\}$ — открытое покрытие[2] X, и в силу центрированности семейства $\mathscr{F}$ из него нельзя выделить конечное подпокрытие.

Весьма полезно также и следующее простое замечание.

Предложение 1. *Пусть X — топологическое пространство и $\mathscr{B}$ — любая база его топологии. Пространство X компактно тогда и только тогда, когда любое его покрытие элементами базы $\mathscr{B}$ содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. В доказательстве нуждается только достаточность. Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — любое открытое покрытие пространства X. Для каждой точки $x \in X$ выберем элемент $U_{\alpha(x)}$ покрытия $\mathscr{U}$, содержащий эту точку, и зафиксируем элемент базы $V_x \in \mathscr{B}$, который содержит точку x и содержится в выбранном элементе покрытия $U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ представляет собой открытое покрытие пространства X элементами базы $\mathscr{B}$. По предположению оно содержит конечное подпокрытие $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$. Поскольку каждое множество V_{x_i} содержится в соответствующем $U_{\alpha(x_i)}$, имеем $U_{\alpha(x_1)} \cup \dots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$, так что $\{U_{\alpha(x_1)}, \dots, U_{\alpha(x_n)}\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. ■

Компактность можно определить эквивалентным образом и на языке сходимости ультрафильтров.

Теорема 1. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве X сходится.*

Доказательство. Необходимость. Существование ультрафильтра $\mathscr{U}$ на X, который не сходится ни к одной точке $x \in X$, означает, что у любой точки $x \in X$ есть открытая окрестность U_x, не принадлежащая ультрафильтру $\mathscr{U}$. Эти окрестности образуют открытое покрытие компактного пространства X; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. По основному свойству ультрафильтров имеем $U_{x_i} \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \le m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathscr{U}$ для всех i. Значит, ультрафильтра, который не сходится ни к какой точке, существовать не может.

Достаточность. Если существует открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства X, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus V : V \in \mathscr{V}\}$ центрировано. Семейство $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. По условию $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x. Пусть V — содержащий эту точку элемент покрытия $\mathscr{V}$. Тогда $V \in \mathscr{U}$, поскольку $\mathscr{U} \to x$, и $X \setminus V \in \mathscr{U}$ по определению семейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$. Этого быть не может — любые два элемента любого фильтра обязаны пересекаться. Значит, всякое открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие. ■

Теорема 2. *Всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто.*

[2]По определению покрытие должно быть индексированным семейством. Однако на индексное множество никаких ограничений не накладывается, и в данном случае можно считать, что это множество $\mathscr{F}$, т.е. что семейство $\mathscr{U}$ индексировано элементами F этого множества. Вообще, любое семейство можно трактовать как индексированное своими собственными элементами, так что любое семейство множеств, объединение которых содержит данное множество, можно рассматривать как покрытие этого множества. В дальнейшем мы не будем останавливаться на подобных деталях.

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, $K \subset X$ — его компактное подпространство и $x \notin K$. Имеем $\bigcap\{\overline{U} : U$ — окрестность точки $x\} = \{x\}$, и, поскольку $x \notin K$, семейство

$$\mathscr{U} = \{X \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

представляет собой открытое покрытие компакта K. Пусть $\{X \setminus \overline{U}_1, \dots, X \setminus \overline{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда множество $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность точки x, не пересекающая K, а это означает, что $x \notin \overline{K}$. Следовательно, $\overline{K} = K$, т.е. множество K замкнуто. ■

Теорема 3. *Любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.*

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $X \subset K$ — его замкнутое подпространство. Рассмотрим любое центрированное семейство $\mathscr{F}$ замкнутых подмножеств пространства X. Поскольку X замкнуто в K, $\mathscr{F}$ является также и центрированным семейством замкнутых подмножеств K, так что $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$. ■

Следствие 1. *Компактное пространство не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств.*

Теорема 4. *Любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет точку накопления.*

Доказательство. Пусть A — подмножество компактного пространства, не имеющее точек накопления. Тогда у любой точки $x \in \overline{A}$ найдётся открытая окрестность U_x в X, пересечение которой с A конечно. Подпространство $\overline{A}$ компактного пространства X компактно по теореме 3, и семейство $\{U_x \cap \overline{A} : x \in \overline{A}\}$ является его открытым покрытием. Выделим из него конечное подпокрытие $\{U_{x_1} \cap \overline{A}, \dots, U_{x_k} \cap \overline{A}\}$. Из того, что $U_{x_1} \cap \overline{A} \cup \dots \cup U_{x_k} \cap \overline{A} = \overline{A}$ и все множества $U_{x_i} \cap \overline{A}$ конечны, вытекает, что множество $\overline{A}$ (а значит, и A) конечно. ■

Теорема 5. *Всякий непрерывный образ компактного пространства компактен.*

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $f\colon K \xrightarrow{\text{на}}\xrightarrow{\text{на}} X$ — непрерывное отображение. Рассмотрим любое открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства X. Очевидно, $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ — открытое покрытие пространства K. Оно содержит конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$, и $\{U_1, \dots, U_n\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$. ■

Следствие 2. *Всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто.*

Доказательство. Пусть $f\colon K \to X$ — непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово. По теореме 3 любое замкнутое множество $F \subset K$ компактно, а по теореме 5 образ любого компактного множества компактен и, значит, замкнут в X (по теореме 2); следовательно, отображение f замкнуто. ■

Следствие 3. *Любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.*

Это следствие можно сформулировать по-другому: *если K — компакт с топологией $\mathscr{T}$, то любая хаусдорфова топология на K, более слабая, чем $\mathscr{T}$, совпадает с $\mathscr{T}$.* Другими словами, *топологию компакта нельзя ослабить.*

Теорема 6. *Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.*

Доказательство. Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция, то $\{f^{-1}\big((-n, n)\big) : n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие пространства X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. ■

Перейдём к более сложным свойствам компактных пространств. Начнём с того, что всякий компакт нормален. Доказательство этого факта проводится поэтапно: сначала нужно показать, что всякое хаусдорфово компактное пространство регулярно, а затем — что всякое регулярное компактное пространство нормально.

Предложение 2. *Во всяком хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, K — компактное подмножество X и $x \in X \setminus K$. Для каждой точки $y \in K$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$. Открытое покрытие $\{U_y : y \in K\}$ компакта K содержит конечное подпокрытие $\{U_{y_1}, \dots, U_{y_n}\}$. Ясно, что $U = \bigcup_{i \le n} U_{y_i}$ — открытая окрестность множества K, $V = \bigcap_{i \le n} V_{y_i}$ — открытая окрестность точки x и $U \cap V = \varnothing$. ∎

Из этого предложения и теоремы 3 немедленно вытекает регулярность всякого компакта.

Предложение 3. *Во всяком T_3-пространстве любые два непересекающихся множества, одно из которых компактно, а другое замкнуто, имеют непересекающиеся окрестности.*

Доказательство. Пусть $X \in T_3$, K — компактное подмножество пространства X, F — замкнутое подмножество пространства X и $K \cap F = \varnothing$. Для каждой точки $x \in K$ зафиксируем непересекающиеся открытые множества $U_x \ni x$ и $V_x \supset F$. Открытое покрытие $\{U_x : x \in K\}$ множества K содержит конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Ясно, что $U = \bigcup_{i \le n} U_{x_i}$ — открытая окрестность множества K, $V = \bigcap_{i \le n} V_{x_i}$ — открытая окрестность множества F и $U \cap V = \varnothing$. ∎

Объединяя предложения 2 и 3 и вспоминая теорему 3 (что в компактном пространстве все замкнутые подмножества компактны), мы приходим к такому выводу.

Теорема 7. *Всякий компакт нормален.*

Предложения 2 и 3 иллюстрируют тезис, что компакты во многом похожи на конечные пространства. Во всяком случае, с точки зрения аксиом отделимости T_2 и T_3 компактные подмножества ведут себя как точки. Для аксиомы $T_{3\frac{1}{2}}$ верно аналогичное утверждение.

Предложение 4. *Во всяком $T_{3\frac{1}{2}}$-пространстве X для любых непересекающихся компактного множества K и замкнутого множества F существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, тождественно равная 0 на K и 1 на F.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in K$ возьмём непрерывную функцию $f_x\colon X \to [0,1]$, принимающую значение 0 в точке x и тождественно равную 1 на F, и положим $U_x = f_x^{-1}\bigl([0, \frac{1}{2})\bigr)$. Из открытого покрытия $\{U_x : x \in K\}$ компактного множества K выделим конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Функция $g = \min(f_1, \dots, f_n)$, определённая правилом $g(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, непрерывна, причём $g(K) \subset [0, \frac{1}{2})$ и $g(F) \subset \{1\}$. Осталось положить $f(x) = \max\bigl\{2\bigl(g(x) - \frac{1}{2}\bigr), 0\bigr\}$ для всех $x \in X$. ∎

Теорема Тихонова о компактности произведений

Теорема (теорема Тихонова о компактности произведений). *Топологическое произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все X_α компактны.*

Теорему Тихонова о компактности произведений обычно называют просто теоремой Тихонова. Это одна из главных теорем не только общей топологии, но и всей математики. Она находит применения в самых разнообразных и неожиданных контекстах. Здесь мы ограничимся тем, что докажем её равносильность аксиоме выбора.

То, что теорему Тихонова можно вывести из системы аксиом ZF и аксиомы выбора (т.е. из ZFC), ясно из существования её доказательства — по сути само это доказательство как раз и есть её вывод. Осталось показать, как из системы ZF и теоремы Тихонова вывести аксиому выбора.

Напомним формулировку аксиомы выбора: для каждого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ непустых множеств существует функция выбора, т.е. отображение $f\colon A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ с тем свойством, что $f(\alpha) \in X_\alpha$ для всякого $\alpha \in A$. Заметим, что всякая функция выбора — это просто элемент декартова произведения $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, так что аксиома выбора равносильна утверждению, что декартово произведение непустого семейства непустых множеств непусто.

Итак, пусть $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — непустое семейство непустых множеств. В каждом множестве X_α возьмём по точке x_α; мы можем это сделать, поскольку все множества X_α непусты (однако без аксиомы выбора мы не можем утверждать, что все точки x_α образуют множество). Возьмём произвольную точку $*$ и положим $Y_\alpha = X_\alpha \cup \{*\}$. Снабдим каждое множество Y_α топологией $\mathscr{T}_\alpha = \{\varnothing, Y_\alpha, X_\alpha, \{*\}\}$. Каждое Y_α с этой топологией компактно. По теореме Тихонова произведение $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$ тоже компактно (причём это произведение заведомо непусто, поскольку оно содержит, например, отображение $f\colon A \to \bigcup Y_\alpha$, принимающее постоянное значение $*$ во всех точках α). Для каждого $\alpha \in A$ положим $F_\alpha = \pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$. По определению топологии произведения все проекции π_α непрерывны; значит, каждое множество F_α замкнуто в $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$, будучи прообразом замкнутого в Y_α множества X_α. Кроме того, семейство $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ центрировано. Действительно, для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ пересечение $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_n}$ содержит функцию $f\colon A \to \bigcup Y_\alpha$, определённую правилом $f(\alpha_i) = x_{\alpha_i}$ для $i \le n$ и $f(\alpha) = *$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$. Такая функция существует, поскольку аксиомы ZF позволяют нам формировать конечные декартовы произведения (в частности, $A \times \bigl(\bigcup Y_\alpha\bigr)$) и выделять в них подмножества, определённые конкретными формулами.

Таким образом, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ — центрированное семейство замкнутых подмножеств пространства $\prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Поскольку это пространство компактно, пересечение $\bigcap_{\alpha\in A} F_\alpha$ непусто. Осталось заметить, что это пересечение совпадает с произведением $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$.