Задание N 7[1]

A. *Пространства непрерывных отображений (S 25.1x.), Компактно-открытая топология (Определение 25.2x.), Метрика равномерной сходимости (Определение 25.4x.), Отображения $X \times Y \to Z$ и $X \to C(X, Y)$ (Определение 25.6x.), Пути (Определение 14.1.), Петли (Определение 32.1.).*

7.1. $C(X, Y)$ — множество непрерывных отображений из пространства X в пространство Y. Когда мощность множества $C(X, Y)$ совпадает с мощностью пространства Y?

7.2. Можно ли в определении компактно-открытой топологии на множестве отображений заменить компактные подмножества на конечные подмножества?

7.3. Пусть X — метризуемое пространство. Доказать, что множество путей (петель) в компактно-открытой топологии метризуемо.

7.4. Доказать, что пространство гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ имеет две компоненты связности.

Дополнительные задачи.

7.1x. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, Y — метрическое пространство. Доказать, что компактно-открытая топология на множестве $C(X, Y)$ совпадает с топологией равномерной сходимости.

7.2x. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство, а Y — полное метрическое пространство. Тогда множество $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии является полным метрическим пространством.

7.3x. Пусть X — метризуемое компактное пространство, Y — сепарабельное метризуемое пространство. Доказать, что множество $C(X, Y)$ в компактно-открытой топологии сепарабельно.

7.4x. Семейство функций $\mathcal{F} \subset C(X)$ на метрическом пространстве X называется равностепенно непрерывным в точке x, если для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \epsilon$ для любых $f \in \mathcal{F}$, $t \in X$, $\rho(x, t) < \delta$.

(Теорема Арцела–Асколи.) Докажите, что замкнутое подмножество $\mathcal{F} \subset C(K)$, где K — метризуемый компакт, компактно в том и только том случае, когда оно равностепенно непрерывно в каждой точке K и ограничено.

B. *Гомотопия отображений (Определение 30.2), Гомотопическая эквивалентность (Определение 39.1), Стягиваемое пространство (Определение 39.6).*

7.5. Докажите гомотопность любых непрерывных не сюръективных отображений $f, g : X \to \mathbb{S}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

7.6. Будут ли гомотопны любые два непрерывных отображения в линейно связное пространство?

7.7. Когда гомотопны два постоянных отображения?

7.8. Если $h : A \to X, f, f' : X \to Y, g : Y \to B$ — непрерывные отображения, и $F : X \times I \to Y$ — гомотопия между f и f', то $g \circ F \circ (h \times id)$ — гомотопия между $g \circ f \circ h$ и $g \circ f' \circ h : A \to B$, где id — тождественное отображение отрезка I.

7.9. Непрерывные отображения $f, g : X \to Y \times Z$ гомотопны в том и только том случае, если гомотопны пары композиций $pr_Y \circ f$, $pr_Y \circ g$ и $pr_Z \circ f$, $pr_Z \circ g$, где pr_Y и pr_Z — проекции в произведении на соответствующие сомножители.

7.10. Докажите, что все отображения отрезка в сферу S^2 гомотопны.

7.11. Докажите, что у гомотопически эквивалентных пространств совпадает число компонент (линейной) связности.

7.12. Найдите счетное число попарно гомотопически эквивалентных пространств, не являющихся попарно гомеоморфными.

7.13. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) окружности S^1 и плоскости с выкинутой точкой $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$;

(2) окружности S^1 и ленты Мебиуса.

7.14. Докажите, что стягиваемое пространство линейно связно. Верна ли обратная импликация?

7.15. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между их гомотопическими классами отображений в произвольное пространство.

7.16. Докажите, что если пространства X и Y гомотопически эквивалентны, то существует взаимно однозначное соответствие между гомотопическими классами отображений произвольного пространства Z в X и Y соответственно.

7.17. Доказать, что для линейно связного пространства X следующие условия эквивалентны:

(1) X — стягиваемо;

(2) $\pi(X, Y)$ тривиально для любого линейно связного пространства Y;

(3) $\pi(Y, X)$ тривиально для любого пространства Y.

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

7.18. Сколько гомотопических классов отображений стягиваемого пространства в произвольное пространство?

7.19. Докажите, что произведение $X \times Y$ пространств X и Y стягиваемо в том и только том случае, если пространства X и Y стягиваемы. Верен ли аналогичный результат для счетного (произвольного) числа сомножетелей?

7.20. Докажите, что любое линейное пространство над полем вещественных чисел стягиваемо.

7.21. Докажите, что ректракт стягиваемого пространства стягиваем.

7.22. Доказать, что $\mathrm{Con}(X)$ стягиваем для любого пространства X.

Дополнительные задачи.

7.5х. Докажите гомотопическую эквивалентность:

(1) тора T^2 с замкнутыми дисками B^2, приклеенными по границе с меридианом и по границе с параллелью, и сферы S^2;

(2) пространства невырожденных матриц $GL(n,\mathbb{R})$ и ортогональных матриц $O(n)$.

7.6х. Докажите, что бесконечномерная сфера S^∞ (сфера в гильбертовом пространстве) стягиваема.

7.7х. Доказать, что любая связная конечномерная группа Ли (множество, на котором заданы согласованные структуры группы и гладкого многообразия) гомотопически эквивалентна компактной группе Ли.

C. *Фундаментальная группа (Определение 32.1 и Определение 32.3), Односвязность (Определение 32.6).*

7.23. Вычислить фундаментальную группу:

(1) дискретного пространства;

(3) $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$;

(3) S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

(4) $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

7.24. Докажите, что если пространство X односвязно, то любое непрерывное отображение $f : S^1 \to X$ продолжается до непрерывного отображения $\tilde{f} : D^2 \to X$.

7.25. Доказать, что для любого непрерывного отображения f пространств с отмеченными точками отображение f_* является гомоморфизмом их фундаментальных групп.
Доказать, что для любых гомотопных непрерывных отображений f и g пространств с отмеченными точками $f_* = g_*$.
Доказать, что фундаментальные группы гомотопически эквивалентных пространств изоморфны.

7.26. Докажите гомотопическую эквивалентность тора T^2 с вырезанным диском D^2 (т.е. ручки) и букета двух окружностей $S^1 \bigvee S^1$.

7.27. (Теорема Брауэра о неподвижной точке.) Докажите, что любое непрерывное отображение замкнутого диска B^2 в себя имеет неподвижную точку.

7.28. Доказать, что при любом гомеоморфизме B^2 точки из границы S^1 отображаются в точки из границы.

7.29. Доказать, что не существует ретракции замкнутого диска B^2 на граничную окружность S^1.

7.30. Доказать основную теорему алгебры: любой многочлен над полем комплексных чисел степени ≥ 1 имеет корень.

7.31. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества пространства X. Замкнутое подмножество C называется перегородкой между A и B в X, если $X \setminus C = O \cup U$, где
$O \cap U = \emptyset$, $A \subset O$, $B \subset U$.
Докажите, что любые две перегородки C_1, C_2 между $A_1 = \{0\} \times I$ и $A_2 = \{1\} \times I$, и $B_1 = I \times \{0\}$ и $B_2 = I \times \{1\}$ в I^2 соответственно, пересекаются.

7.32. Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^1 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^1$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

Дополнительные задачи.

7.8х. Пусть множества U и V открыты в X. Докажите, что если множества $U \cap V$ и $U \cup V$ односвязны, то и множества U и V односвязны.

7.9х. Привести пример линейно связного пространства, фундаментальная группа которого не абелева.

7.10х. Докажите формулу:

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0).$$

7.11х. Докажите, что фундаментальная группа любой топологической группы абелева.

7.12х. Привести пример односвязного линейно связного пространства, которое не стягиваемо.

7.13x. Верно ли, что пространство стягиваемо, если все его гомотопические группы (классы гомотопических эквивалентностей отображений сфер S^n в пространство) тривиальны?

7.14x. Докажите гомотопическую эквивалентность сферы S^2 с отождествленной парой точек и букета сферы и окружности $S^2 \bigvee S^1$.

7.15x. Докажите, что связный конечный граф гомотопически эквивалентен букету окружностей.

7.16x. Привести пример пространств X и Y, подмножества A пространства X и непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ таких, что $f|_A = g|_A$, которые гомотопны, но не A-гомотопны.

7.17x. Вычислить фундаментальную группу букета окружностей.

7.18x. Вычислить фундаментальные группы двумерных компактных поверхностей.

7.19x. Вычислить фундаментальные группы проективных пространств $\mathbb{R}P^n$, $n \geq 2$.

7.20x. Какие группы реализуются как фундаментальные группы связных конечных графов?

7.21x. Вычислить фундаментальную группу:

(a) $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$;

(b) $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$;

(c) $\mathrm{SU}(n, \mathbb{R})$.

7.22x. Пусть $f : S^1 \to S^1$ такое непрерывное отображение, что $f(t) \neq f(-t)$ для любой точки $t \in S^1$. Докажите, что $f \sim \mathrm{id}$.

7.23x. (Теорема Борсука–Улама.) Докажите, что для любой непрерывной функции $f : S^2 \to \mathbb{C}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f(t) = f(-t)$.

7.24x. Докажите, что для любой пары непрерывных функций $f_1, f_2 : S^2 \to \mathbb{R}$ существует точка $t \in S^2$ такая, что $f_1(t) = f_2(-t)$.

7.25x. Докажите, что $\mathbb{R}^2$ не гомеоморфно $\mathbb{R}^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 2$.

7.26x. Докажите, что не существует пространства X такого, что $X \times X$ гомеоморфно $\mathbb{R}$.

7.27x. Докажите, что в любом замкнутом покрытии $\{F, T\}$ окружности S^1 существует элемент, содержащий пару противоположных точек. Сформулируйте и докажите соответствующее утверждении для сферы S^2.

7.28x. Непрерывным касательным векторным полем на сфере $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ называется непрерывное отображение $V : S^2 \to \mathbb{R}^3$ такое, что $x \in S^2$ и $f(x)$ ортогональны.

(Теорема Пуанкаре.) У любого непрерывного касательного векторного поля V на сфере S^2 существует точка $x \in S^2$, в которой $V(x) = (0, 0, 0)$.

7.29x. Докажите, что для любого непрерывного отображения $f : S^2 \to S^2$ или существует неподвижная точка, или точка, для которой $f(x) = -x$.