Задание N 6[1]

C. *Связность (Определение 12.1), Компонента связности (Определение 12.4), Вполне несвязные пространства (Определение 12.5), Линейная связность (Определение 14.2), Компонента линейной связности (Определение 14.5).*

6.1. Докажите, что объединение семейства попарно пересекающихся связных подмножеств связно.

6.2. Пусть $A\cap B$ и $A\cup B$ — связные множества. Верно ли, что A и B — связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

6.3. Пусть $A\cap B$ и $A\cup B$ — линейно связные множества. Верно ли, что A и B — линейно связные множества? А если, дополнительно, оба множества открыты (замкнуты)?

6.4. Верно ли, что пересечение связных множеств связно? Будет ли счетное пересечение связных множеств A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно?

6.5. Докажите, что счетное пересечение связных компактных подмножеств хаусдорфова пространства A_n таких, что $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ связно.

6.6. Будет ли внутренность (линейно) связного множества (линейна) связна?

6.7. Будет ли замыкание линейно связного множества линейно связно?

6.8. Будет ли прообраз при непрерывном отображении связного множества связен, если прообраз любой точки связен?

6.9. Непрерывное отображение $f: X \to Y$ монотонно, если все прообразы $f^{-1}(y)$ точек связны. Докажите, что при монотонном фактороотображении прообраз открытого связного множества связен.

6.10. Доказать, что произведение (линейно) связных пространств (линейно) связно.

6.11. Пусть I и O — замкнутая и открытая компоненты линейной связности компакта $X =$ "$\sin 1/x$". Докажите, что если при непрерывном отображении $f: X \to X$ существует точка $x \in O$, для которой $f(x) \in I$, то и $f(X) \subset I$.

6.12. Докажите, что счетное нормальное пространство несвязно. Оцените снизу мощность бесконечного нормального связного пространства.

6.13. Доказать связность отрезка, пространств $\mathbb{R}^n$ и сфер S^n, $n \in \mathbb{N}$.

6.14. Доказать, что открытое подмножество прямой $\mathbb{R}^1$ имеет счетное число компонент связности.

6.15. Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, не гомеоморфны.

6.16. Докажите, что канторово множество и прямая Зоргенфрея вполне несвязны.

6.17. Докажите, что для подмножеств прямой связность и линейная связность эквивалентны.

6.18. Найти компоненты связности и линейной связности следующих подпространств вещественных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A$ — ортогональная матрица $\}$;

(c) $\mathrm{Symm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : A^T = A\}$?

Дополнительные задачи.

6.1x. Верно ли утверждение, что функция на отрезке непрерывна в том и только том случае, если образ любого отрезка отрезок?

6.2x. Постройте счетное хаусдорфово связное пространство.

6.3x. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существует единственная прямая, параллельная фиксированной прямой l, которая делит A на два множества равной площади.

6.4x. Докажите, что если A и B — открытые связные ограниченные множества на плоскости, то существует прямая, которая делит каждое из множеств A и B на два множества равной площади.

6.5x. Докажите, что если A — открытое связное ограниченное множество на плоскости, то существуют две перпендикулярные прямые, которые делят A на четыре множества равной площади.

6.6x. Найти компоненты связности и линейной связности следующих подпространств комплексных матриц:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{U}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A$ — унитарная матрица $\}$;

(c) $\mathrm{Herm}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{C}) : A^T = \bar{A}\}$?

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

6.7x. Доказать, что связный компакт нельзя представить в виде объединение счётного числа непустых попарно непересекающихся связных замкнутых подмножеств. Можно ли отказаться от условия компактности?

6.8x. **Веер Кнастера-Куратовского.** Рассмотрим прямоугольную систему координат Oxy на плоскости $\mathbb{R}^2$. На отрезке $[0,1]$ оси Ox рассмотрим стандартное канторово множество $\mathcal{C}$. Соединим прямолинейным отрезком каждую точку x множества $\mathcal{C}$ с точкой $a = (1/2, 1/2)$ плоскости $\mathbb{R}^2$ и обозначим этот отрезок через $[a, x]$. Если точка $x \in \mathcal{C}$ первого рода (т.е. она является концом смежного к $\mathcal{C}$ интервала), то на отрезке $[a, x]$ берём все точки, у которых вторая координата рациональна, в противном случае на отрезке $[a, x]$ берём все точки, у которых вторая координата иррациональна. Все выбранные точки и составляют веер Кнастера-Куратовского, который обозначим через $\mathcal{K}$. Доказать связность построенного пространства. Является ли подмножество $\mathcal{K} \setminus \{a\} \subset \mathcal{K}$ вполне несвязным? а индуктивно-нульмерным?

6.9x. Доказать, что множество точек гильбертова пространства ℓ_2 все координаты которых рациональны вполне несвязно, но не индуктивно-нульмерно.

6.10x. Докажите, что любой индуктивно-нульмерный метризуемый компакт без изолированных точек гомеоморфен канторову множеству.

6.11x. Докажите, что любое счетное метризуемое пространство без изолированных точек гомеоморфно пространству рациональных чисел.

6.12x. Точка x связного пространства X называется разбивающей, если $X \setminus \{x\}$ — несвязно. Докажите, что если сепарабельный связный метризуемый компакт имеет ровно две неразбивающие точки, то X гомеоморфно отрезку $[0, 1]$.

6.13x. Построить пространство, все точки которого разбивающие порядка n, $n \in \mathbb{N}$. Может ли пространство быть компактным? метризуемым?

6.14x. Докажите, что связный и локально связный метризуемый компакт линейно связен.

6.15x. Докажите, что любое непрерывное отображение компакта $X = "\sin 1/x"$ на себя имеет неподвижную точку.

6.16x. Приведите пример двух связных компактов, каждый из которых нельзя сюръективно и непрерывно отобразить на другой.

6.17x. Докажите, что любое открытое связное подмножество $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, линейно связно. Можно ли откзаться от требования открытости?

6.18x. Существуют ли три связных открытых подмножества плоскости с общей границей?

6.19x. Докажите, что любое связное конечное пространство линейно связно.