Задание N 5[1]

А. *Компактность (Определение 17.1), Секвенциальная компактность (Определение 18.1).*

5.1. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктные окрестности. Тем самым компактное хаусдорфово пространство нормально.

5.2. Доказать, что если в произведении пространств X и Y сомножитель Y компактен, то проекция $X \times Y \to X$ — замкнутое отображение.

5.3. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

5.4. Докажите, что отображение $f : X \to Y$, где Y — компактное хаусдорфово пространство, непрерывно в том и только том случае, если график отображения замкнут.

5.5. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α, $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств, U — окрестность $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\cap\{K_\alpha : \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

5.6. Докажите, что любое некомпактное метрическое пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подмножество.

5.7. Докажите, что на любом некомпактном метрическое пространстве X существует непрерывная функция $f : X \to (0, 1]$, для которой $\inf\{f(x) : x \in X\} = 0$.

5.8. Доказать, что любая непрерывная функция на метрическом компакте X равномерно непрерывна (т.е. для любой функции $f : X \to \mathbb{R}$ и любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что образ множества диаметра меньше δ имеет диаметр меньше ϵ).

5.9. (Теорема Лебега о покрытиях) Доказать, что для любого открытого покрытия ω метрического компакта X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ϵ вписано в покрытие ω. Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?

5.10. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) компактным пространством?

5.11. Какие подмножества прямой Зоргенфрея являются компактными?

5.12. Рассмотрите линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

5.13. Докажите, что подмножество $(0, 1] \times \{0\} \cup [0, 1) \times \{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности.

5.14. Докажите, что непрерывное биективное открытое (соответственно замкнутое) отображение является гомеоморфизмом.

5.15. Докажите, что непрерывное сюръективное открытое (соответственно замкнутое) отображение является факторотображением.

5.16. Пусть $f : X \to Y$ — замкнутое отображение, $A \subset Y$, U — открытая окрестность $f^{-1}(A)$ в X. Докажите, что существует открытая окрестность V множества A в Y такая, что $f^{-1}(V) \subset U$.

5.17. Установите гомеоморфность канторова множества и счетного произведения дискретных двоеточий.

5.18. Докажите, что канторово множество C однородно, т.е. для любых точек $x, y \in C$ существует гомеоморфизм $h : C \to C$, при котором $h(x) = y$.

5.19. Пусть X или канторово множество, или гильбертов куб $Q = [0, 1]^\infty$. Докажите, что X^n гомеоморфно X для любого $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

5.20. Какие из подмножеств пространства матриц $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^{n^2}$ компактны:

(a) $\mathrm{GL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\}$;

(b) $\mathrm{SL}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$;

(c) $\mathrm{O}(n) = \{A \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) : AA^T = E\}$?

5.21. Докажите, что для любого компактного подмножества K метрического пространства X существуют точки $x, y \in K$ такие, что $\mathrm{diam} X = \rho(x, y)$.

5.22. Метрическое пространство полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел. Подмножество A метрического пространства вполне ограничено, если для любого $\epsilon > 0$ из семейства открытых шаров радиуса ϵ, покрывающего A, можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее A. Доказать, что подмножество A полного метрического пространства X компактно в том и только том случае, если оно замкнуто и вполне ограничено. Показать, что условие вполне ограниченности нельзя заменить на условие ограниченности.

Дополнительные задачи.

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

5.1x. Будут ли компактами пространство Бэра, метризуемый еж?

5.2x. *"Компактный еж"*. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0,1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим топологию: на полуинтервалах $(0,1]_\lambda, \lambda \in \Lambda$ — обычная интервальная топология, базисными окрестностями $\{0\}$ являются объединения конечного числа полуинтервалов $[0, a(\lambda))_\lambda, 0 < a(\lambda), \lambda \in \Lambda_{Fin} \subset \Lambda$, и всех отрезков $[0,1]_\lambda$, $\lambda \in \Lambda \setminus \Lambda_{Fin}$. Показать, что топология корректно задана, компактный еж — компактен. Сравнить топологии метризуемого и компактного ежей.

5.3x. Доказать сепарабельность метрического пространства $C(K)$ (непрерывных функций на метризуемом компакте K с топологией равномерной сходимости).

5.4x. (Теорема Стоуна-Вейерштрасса) Доказать, что кольцо непрерывных вещественных функций на компактном хаусдорфовом пространстве X, содержащее все постоянные функции, разделяющее точки и замкнутые подмножества (т.е. для любых точки x и замкнутого множества F, $x \notin F$ существует непрерывная функция $f : X \to I = [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$, $F \subset f^{-1}(1)$) и замкнутое в топологии равномерной сходимости совпадает с кольцом всех непрерывных функций.

5.5x. Докажите, что любые две нормы на $\mathbb{R}^n$ эквивалентны (задают одну и ту же топологию). Верно ли утверждение для произвольного линейного пространства?

5.6x. Доказать, что для любого компактного подмножества K в $\mathbb{R}^\infty$ существует гомеоморфизм $\mathbb{R}^\infty$, при котором K отображается в подмножество, проекция которого на один из сомножителей одноточечна.

5.7x. (Теорема Банаха от открытом отображении) Линейное непрерывное сюръективное отображение банаховых пространств открыто.

5.8x. Приведите пример пространства X такого, что X^n гомеоморфно X для любого $n \in \mathbb{N}$, а X^∞ не гомеоморфно X.

5.9x. Докажите, что подмножество $X = \{x \in \ell_2 : |x_n| \le 1/n, n \in \mathbb{N}\}$ компактно. Гомеоморфно ли оно гильбертову кубу?

5.10x. Какие подмножества прямой Зоргенфрея ей гомеоморфны?

B. *Метризуемость (Определение 4.11). Эквивалентные метрики (Определение 4.12).*

5.23. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x,y) \le k_2\rho_2(x,y)$ и $\rho_2(x,y) \le k_1\rho_1(x,y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

5.24. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$, заданные формулами $\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ и $\rho_2(x,y) = \rho(x,y)/(1+\rho(x,y))$, эквивалентны метрике ρ.

5.25. Эквивалентны ли метрики из задачи 1.2?

5.26. Будут ли эквивалентны метрики в задаче 1.8?

5.27. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек этого множества, которая сходится в одной метрике, сходится и в другой.

5.28. Покажите, что любое нормальное пространство со счетной базой является всюду плотным подмножеством метризуемого компакта.

5.29. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^\infty$ — линейное топологическое пространство (естественно определенные операции сложения и умножения на вещественные числа непрерывны).

5.30. Докажите, что любое подпространство $\mathbb{R}^\infty$, содержащее подмножество $\{x \in \mathbb{R}^\infty : |\{x_n \neq 0\}| < \infty\}$, не нормируемо.

5.31. Докажите, что топология ℓ_2 сильнее топологии на ℓ_2 как на подпространстве $\mathbb{R}^\infty$.

5.32. Доказать, что метризуемое пространство X компактно в том и только том случае, если любая вещественная функция на X ограничена.

5.33. Доказать, что для метризуемых пространств условия компактности и секвенциальной компактности (любая последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность) эквивалентны.

5.34. Доказать, что метризуемый компакт сепарабелен и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

5.35. Доказать, что для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: для любого $\epsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любых точек $x, y \in X$ $\rho_2(x,y) < \epsilon$ как только $\rho_1(x,y) < \delta_1$ и $\rho_1(x,y) < \epsilon$ как только $\rho_2(x,y) < \delta_2$.

Дополнительные задачи.

5.11x. Покажите, что любой метризуемый компакт является непрерывным образом канторова множества (т.е. является диадическим компактом).

5.12x. Метризуема ли прямая в топологии Зарисского? Прямая Зоргенфрея?

5.13x. Доказать, что регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, метризуемо.

5.14x. (Теорема Стоуна) Доказать, что каждое метризуемое пространство паракомпактно (Определение 19.5x).

5.15x. Пространство полно метризуемо, если существует полная метрика, порождающая топологию пространства. Привести пример метризуемого не полно метризуемого пространства.

5.16x. Доказать, что полно метризуемое пространство является G_δ-подмножеством (т.е. пересечением счетного числа открытых подмножеств) любого содержащего его компактного пространства.

5.17x. Существует ли метризуемое, не полно метризуемое пространство, и счетное семейство открытых всюду плотных подмножеств, пересечение которых всюду плотно (т.е. выполено свойство Бэра)?

5.18x. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве вполне ограничена, то пространство компактно.

5.19x. Докажите, что если любая метрика на метризуемом пространстве полна, то пространство компактно.