Задание N 4[1]

A. *Топологическое произведение (Определение 20.3), график отображения (Определение 20.2).*

4.1. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Проверьте выполнение равенств:

(a) $\mathrm{Int}(A \times B) = \mathrm{Int}A \times \mathrm{Int}B$;

(b) $\mathrm{Cl}(A \times B) = \mathrm{Cl}A \times \mathrm{Cl}B$;

(c) $\mathrm{Bd}(A \times B) = \mathrm{Bd}A \times \mathrm{Bd}B$;

(d) $\mathrm{Bd}(A \times B) = (\mathrm{Bd}A \times B) \cup (A \times \mathrm{Bd}B)$;

4.2. Докажите, что n-ая степень прямой $\mathbb{R}$ (отрезка $I = [0, 1]$) гомеоморфна $\mathbb{R}^n$ (кубу I^n), $n \in \mathbb{N}$.

4.3. Докажите, что при проектировании $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$ образ открытого подмножества произведения $X \times Y$ открыт в X (т.е. проектирование — открытое отображение). Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для произведения любого количества пространств. Выполнено ли аналогичное утверждение для замкнутых подмножеств?

4.4. Докажите, что пространство X хаусдорфово в том и только том случае, если диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ произведения замкнута в $X \times X$.

4.5. Для отображения $f : X \to Y$ множество $\{(x, f(x)) \subset X \times Y : x \in X\}$ называется графиком отображения. Докажите гомеоморфность пространства X и графика его произвольного непрерывного отображения $f : X \to Y$. Верно ли утверждение для произвольного отображения?

4.6. Докажите, что для непрерывного отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y график отображения замкнут в $X \times Y$. Верна ли обратная импликация?

4.7. Докажите, что счетные произведения сепарабельных (удовлетворяющих первой аксиоме счетности, удовлетворяющих второй аксиоме счетности) пространств сепарабельно (удовлетворяет первой аксиоме счетности, удовлетворяет второй аксиоме счетности).

4.8. Докажите, что пространство $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^k$ гомеоморфно $S^{n-k-1} \times \mathbb{R}^{k+1}$, $n, k \in \mathbb{N}$, где S^m — m-мерная сфера.

4.9. $T^k = S^1 \times \cdots \times S^1$ — k-мерный тор. Вложите T^k в $\mathbb{R}^{k+1}$.

4.10. Вложите $S^1 \times B^2$, $S^1 \times S^1 \times I$, $S^2 \times I$ в $\mathbb{R}^3$, где B^2 — замкнутый круг единичного радиуса в $\mathbb{R}^2$, S^2 — двумерная сфера.

Дополнительные задачи.

7.1x. Пусть $A \subset X$, $B \subset Y$. Найдите формулу, выражающую $\mathrm{Bd}(A \times B)$ через $\mathrm{Cl}A$, $\mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}B$.

7.2x. Докажите, что несчетное произведение прямых не нормально.

7.3x. Докажите, что произведение континуума сепарабельных пространств сепарабельно. Будет ли сепарабельно произведение более континуума хаусдорфовых пространств?

7.4x. Докажите, что в произведении сепарабельных пространств любое семейство попарно дизъюнктных непустых открытых множеств счетно (произведение сепарабельных пространств удовлетворяет условию Суслина).

7.5x. Пусть $\Pi\{X_s : s \in S\}$ — произведение сепарабельных пространств и $f : \Pi\{X_s : s \in S\} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Докажите, что существует счетное подмножество $S_0 \subset S$ и непрерывная функция $f_0 : \Pi\{X_s : s \in S_0\} \to \mathbb{R}$ такие, что $f = f_0 \circ \mathrm{pr}_{S_0}$, где pr_{S_0} — проектирование произведения $\Pi\{X_s : s \in S\}$ на счетное подпроизведение $\Pi\{X_s : s \in S_0\}$ (т.е. функция зависит от счетного множества координат).

B. *Склеивание пространств (Определение 22.13), лента Мебиуса (Определение 22.5), бутылка Клейна (Определение 22.8), проективная плоскость (Определение 22.9).*

4.11. Докажите, что факторпространство квадрата $I \times I = [0, 1] \times [0, 1]$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без двух сторон $(0, 1) \times I$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}$, $t \in I$, гомеоморфно цилиндру $S^1 \times I$.

4.12. Докажите, что факторпространство

(a) цилиндра $S^1 \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества $S^1 \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in S^1$,

(b) квадрата $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0, 1) \times (0, 1)$ и двухточечные подмножества $\{(0, t), (1, t)\}, \{(t, 0), (t, 1)\}$, $t \in I$,

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

гомеоморфно тору $S^1 \times S^1$.

4.13. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,t)\}, \{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in I$, называется бутылкой Клейна. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times[0,1]$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}$, $t \in I$, называется лентой Мебиуса.

Представьте бутылку Клейна как результат

(a) факторизации цилиндра,

(b) факторизации ленты Мебиуса,

(c) склейки по границам двух копий ленты Мебиуса посредством тождественного отображения,

(d) склейки по границам двух копий цилиндра.

4.14. Квадрат $I \times I$ по его разбиению на одноточечные подмножества квадрата без сторон $(0,1)\times(0,1)$ и двухточечные подмножества $\{(0,t),(1,1-t)\}, \{(t,0),(1-t,1)\}$, $t \in I$, называется проективной плоскостью $\mathbb{R}P^2$.

Получить проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$

(a) как результат склейки по границе диска B^2 и ленты Мебиуса,

(b) из конуса окружности, факторизацией основания,

(c) как результат факторизации ленты Мебиуса.

Дополнительные задачи.

7.6x. Представьте ленту Мебиуса как факторпространство цилиндра.

7.7x. Введя естественную топологию на множестве всех прямых на плоскости, докажите, что полученное пространство гомеоморфно ленте Мебиуса.

7.8x. Введя естественную топологию на множестве всех отрезков единичной длины на плоскости, докажите, что полученное пространство гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^2$.

7.9x. Чему гомеоморфно факторпространства B^3 по отношению эквивалентности $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$.

7.10x. Введя естественную топологию на множестве поворотов $\mathbb{R}^3$ вокруг всевозможных прямых, проходящих через начало координат, на всевозможные углы, докажите, что полученное пространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$.