Задание N 3[1]

A. *Аксиомы отделимости (Определения 15.1, 15.5, 15.6, 15.7, 15.8). Вторая аксиома счетности, сепарабельность (Определение 16.2), первая аксиома счетности (Определение 16.4).*

5.1. Доказать, что среди T_1-топологий на пространстве существует наименьшая. В частности, топология Зарисского — наименьшая T_1 топология на $\mathbb{R}$.

5.2. Доказать, что следующие условия на пространстве X эквивалентны:

(a) X — T_1-пространство;

(b) все одноточечные подмножества X замкнуты.

5.3. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность точек не может иметь более одного предела.

5.4. Привести пример T_1-пространства и последовательность точек в нем, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

5.5. Докажите, что всякое подпространство T_0 (соответственно T_1, T_2, регулярного) пространства является T_0-(соответсвенно T_1-, T_2-, регулярным) пространством. Докажите, что всякое замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством.

5.6. Какие из аксиом отделимости сохраняются в сторону образа при непрерывных отображениях?

5.7. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) нормальным пространством? Будет ли прямая в топологии Зарисского регулярным пространством?

5.8. Проверьте верность утверждений:

(a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен;

(b) непрерывный образ нигде не плотного множества нигде не плотен.

5.9. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, множество, являющееся решением полиномиального (от координат точки) уравнения $f(P) = 0$, $P \in \mathbb{R}^n$, или нигде не плотно, или совпадает с $\mathbb{R}^n$.

5.10. Найдите (опишите все) топологии на множестве X, для которых всюду плотно одноточечное множество $\{x\}$, где $x \in X$.

5.11. Будет ли пересечение всюду плотных подмножеств всюду плотно? А если, дополнительно, одно из подмножеств открыто?

5.12. Докажите, что граница замкнутого (открытого) множества нигде не плотна. Приведите пример пространства и его подмножества, со всюду плотной границей.

5.13. Докажите, что если A нигде не плотное подмножество, то $\mathrm{Cl}A$ также нигде не плотное подмножество.

5.14. Докажите, что базой топологии метрического пространства является множество открытых шаров рациональных радиусов, центрами которых являются точки произвольного всюду плотного подмножества.

5.15. Докажите, что в любом подмножестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.

5.16. Доказать, что для непрерывных отображений $f, g : X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

5.17. Если пространство имеет счетную базу, то говорят, что оно удовлетворяет второй аксиоме счетности. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то из любой его базы можно выбрать счетное семейство, являющееся базой.

5.18. Пространство сепарабельно, если оно имеет счетное всюду плотное подмножество. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно сепарабельно.

5.19. Докажите, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тем самым метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, если оно сепарабельно.

5.20. Существует ли не сепарабельное метрическое пространство?

5.21. Базой окрестностей точки x пространства X называется совокупность ее окрестностей такая, что всякая окрестность точки x содержит окрестность из этой совокупности. Какова минимальная база в точках дискретного пространства?

5.22. Если пространство имеет счетную базу во всех точках, то говорят, что оно удовлетворяет первой аксиоме счетности. Доказать, что метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

5.23. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Верна ли обратная импликация?

5.24. Докажите, что пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, хаусдорфово в том и только том случае, если любая последовательность точек в нем имеет не более одного предела.

[1]Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

5.25. Докажите, что в пространстве X, удовлетворяющем первой аксиоме счетности, замыкание любого подмножества A совпадает с множеством пределов всевозможных последовательностей точек множества A.

5.26. Сохраняются ли первая (вторая) аксиома счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

5.27. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

5.28. Будет ли факторпространство нормального пространства удовлетворять аксиоме T_0?

5.29. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) второй аксиоме счетности? Являются ли они сепарабельными пространствами?

5.30. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) первой аксиоме счетности?

5.31. Докажите, что в любом конечном T_0-пространстве
а) существует изолированная точка;
б) множество изолированных точек всюду плотно.

Дополнительные задачи.

5.1x. Является ли $\mathbb{Q}$ пересечением счетного числа открытых в $\mathbb{R}$ подмножеств?

5.2x. Найти минимальную мощность всюду плотных подмножеств пространства ℓ_2, прямой Зоргенфрея, пространства Бэра, "метризуемого ежа". Докажите, что любое бесконечное подмножество прямой в топологии Зарисского является всюду плотным.

5.3x. Можно ли в Задаче 5.16 отказаться от условия хаусдорфовости образа?

5.4x. Докажите, что любое счетное регулярное пространство нормально.

5.5x. Привести пример нормального пространства и его не нормального подмножества.

5.6x. Доказать, что любое замкнутое подмножество A канторова множества C является его ретрактом (т.е. существует непрерывная сюръекция $r : C \to A$ такая, что $r \circ r = r$).

5.7x. Существует ли регулярное пространство X, содержащее более двух точек, на котором любая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ постояна?

5.8x. Докажите, что линейно упорядоченное пространство с интервальной топологией нормально.

5.9x. Существует ли сепарабельное пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счетности, не удовлетворяющее второй аксиоме счетности? А если условие сепарабельности заменить на условие счетности пространства?

5.10x. Докажите, что любое сепарабельное метрическое пространство вложимо в ℓ_2.

5.11x. Существует ли счетное пространство, не удовлетворяющее первой аксиоме счетности?

5.12x. Привести пример сепарабельного пространства и его не сепарабельного подпространства.

B. *Лемма Урысона и Теорема Брауэра–Титце–Урысона (§15.10).*

6.1. Постройте непрерывную функцию на плоскости $\mathbb{R}^2$, принимающую значение 0 на осях координат Ox и Oy и значение 1 на графике гиперболы $y = 1/x$.

6.2. Докажите, что любое метрическое пространство нормально.

6.3. Доказать, что любое непрерывное отображение канторова множества на отрезок является сужением непрерывного отображения отрезка на себя.

6.4. Доказать, что любую равномерно непрерывную функцию на интервале $(0, 1)$ можно продолжить на $\mathbb{R}$.

6.5. Пусть A — замкнутое подмножество метрического пространства X, $f : A \to I$ — непрерывное отображение. Доказать, что отображение

$$g(x) = \begin{cases} \inf\{f(a) + \frac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 : a \in A\} & x \in X \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

является непрерывным продолжением f, где d — метрика на X.

Дополнительные задачи.

6.1x. Можно ли в теореме Брауэра–Титце–Урысона рассматривать продолжения отображений в $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, в сферы S^n, $n \geq 1$?

6.2x. Доказать, что любое непрерывное отображение канторова множества на квадрат является сужением непрерывного отображения отрезка на квадрат.

6.3x. Можно ли в задаче 6.4 заменить интервал на произвольное подмножество $\mathbb{R}$?

6.4x. Пусть для любой точки $x \in X$ функция f, определенная на всюду плотном подмножестве $A \subset X$, продолжается до непрерывной функции на $A \cup \{x\}$. Существует ли ее непрерывное продолжение на X?