Задание N 2[1]

А. *Топологическое пространство (Определение 2.1), открытые замкнутые множества (Определение 2.5), окрестность (Определение 2.9). Примеры введения топологии. База топологии (Определение 3.1). Метрическая топология (Определение 4.9). Частичный порядок (Определение 7.2), линейный порядок (Определение 7.6), интервальная топология (Определение 7.7).*

3.1. Найти метрику (линейный порядок), которая порождает стандартную (евклидову) топологию на $\mathbb{R}$ (ее базу образуют всевозможные интервалы).

3.2. Определить иерархию топологий, порожденных метриками в задаче 1.1.

3.3. Пусть $(X, <)$ – линейно упорядоченное множество. Будет ли базой некоторой топологии совокупность подмножеств:

(1) X, $\{x \in X : a < x < b\}$, $\{x \in X : a < x\}$, $\{x \in X : x < b\}$;

(2) $\{x \in X : a \leq x < b\}$, $\{x \in X : a \leq x\}$;

(3) X, $\{x \in X : a \leq x < b\}$,

где $a, b \in X$? Можно ли некоторые подмножества исключить из баз?

3.4. Две метрики эквивалентны, если они порождают одну и ту же топологию. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2\rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

3.5. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$ являются метриками на множестве X, эквивалентными метрике ρ.

3.6. Определить аналоги метрик $\rho_d, \rho_e, \rho_{max}, \rho_\diamondsuit$ из задачи 1.1 для пространств $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Будут ли получаемые метрики эквивалентны?

3.7. Эквивалентны ли метрики из задачи 1.2?

3.8. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек этого множества, которая сходится в одной метрике, сходится и в другой.

3.9. Могут ли различные топологии на множестве X индуцировать одинаковые топологии на подмножестве $A \subset X$?

3.10. Сравнить на $\mathbb{R}$ евклидову топологию; топологию, базой которой являются множества $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, где $a, b \in \mathbb{R}$ (прямая Зоргенфрея); и топологию, замкнутыми множествами которой являются $\mathbb{R}$ и множества корней многочленов одной переменной (топология Зарисского).

3.11. Доказать:

(1) $\mathrm{Cl}A = A \cup \mathrm{Bd}A$;

(2) $\mathrm{Int}A = A \setminus \mathrm{Bd}A$;

(3) $\mathrm{Bd}A = \mathrm{Cl}A \setminus \mathrm{Int}A$;

(4) $X \setminus \mathrm{Bd}A = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$;

(5) A замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \subset A$;

(6) A открыто тогда и только тогда, когда $\mathrm{Bd}A \cap A = \emptyset$;

(7) $A^d \setminus A = \mathrm{Bd}A \setminus A$, где A^d – предельные точки A (точка x подмножества A называется предельной, если для ее любой окрестности Ox имеем $(Ox \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$);

(8) A замкнуто тогда и только тогда, когда $A^d \subset A$.

3.12. Проверить справедливость следующих соотношений:

(1) если $A \subset B$, то $\mathrm{Int}A \subset \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}A \subset \mathrm{Cl}B$);

(2) $\mathrm{Int}(A \cap B) = \mathrm{Int}A \cap \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}(A \cap B) = \mathrm{Cl}A \cap \mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}(A \cap B) = \mathrm{Bd}A \cap \mathrm{Bd}B$);

(3) $\mathrm{Int}(A \cup B) = \mathrm{Int}A \cup \mathrm{Int}B$ ($\mathrm{Cl}(A \cup B) = \mathrm{Cl}A \cup \mathrm{Cl}B$, $\mathrm{Bd}(A \cup B) = \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$);

(4) $\mathrm{Cl}A = \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}A)$, $\mathrm{Int}A = \mathrm{Int}(\mathrm{Int}A)$;

(5) $\mathrm{Bd}(A \cap B) \subset \mathrm{Bd}A \cup \mathrm{Bd}B$;

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

(6) $\mathrm{Bd}(X \setminus A) = \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Cl}A) \subset \mathrm{Bd}A$, $\mathrm{Bd}(\mathrm{Int}A) \subset \mathrm{Bd}A$;

(7) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$.

3.13. Привести пример метрического пространства и открытого шара в нем таких, что замыкание шара не совпадает с замкнутым шаром того же радиуса.

3.14. Доказать, что подмножество A метрического пространства X замкнуто тогда и только тогда, когда предел всякой сходящейся последовательности точек из множества A принадлежит также множеству A (т.е. точка x принадлежит замыканию множества A в том и только том случае, когда $\inf\{\rho(x,y) : y \in A\} = 0$).

3.15. Доказать, что конечномерное подпространство нормируемого пространства замкнуто.

3.16. Найти внутренность отрезка на $\mathbb{R}$ в топологиях из задачи 3.10.

3.17. Подмножество пространства ℓ_2, состоящее из всех точек $(x_1, ..., x_k, ...)$, для которых $0 \le x_k \le 1/2^k$, $k \in \mathbb{N}$, называется *гильбертовым кубом*. Доказать, что гильбертов куб — замкнутое подмножество ℓ_2; внутренность гильбертова куба в ℓ_2 — пустое множество.

Дополнительные задачи.

3.1x. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии из $\mathbb{N}$ образуют базу некоторой топологии на $\mathbb{N}$. С ее помощью доказать бесконечность простых чисел.

3.2x. Сравнить евклидову топологию на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ и топологию $\mathbb{Q}$, порожденную p-адической метрикой на $\mathbb{Q}$ (задача 1.2x).

3.3x. Перечислите все различные множества, которые можно получить из одного множества, применяя к нему последовательно операции Cl и Int.

3.4x. Для каких $n \in \mathbb{N}$ на прямой можно построить n открытых множеств, имеющих одну и ту же границу.

3.5x. Верна ли обратная импликация в задаче 3.4?

3.6x. Сколько существует различных топологий на конечном множестве из n элементов?

B. *Отображения (тождественное, включение, композиция, обратимость, сужение, подотображение) (Определения 9.3, 9.4, 9.5, 9.6), непрерывность отображений (Определение 10.1), Гомеоморфизмы (Определение 11.1), вложения (Определение 11.8).*

4.1. Следующие условия на отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — непрерывно;

(d) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $\mathrm{Cl}(f^{-1}B) \subset f^{-1}(\mathrm{Cl}B)$;

(e) для любого подмножества $B \subset Y$ выполнено $f^{-1}(\mathrm{Int}B) \subset \mathrm{Int}(f^{-1}B)$.

4.2. Показать, что непрерывные функции $f : X \to \mathbb{R}$ образуют линейное пространство по отношению к сложению и умножению на числа и кольцо по отношению к сложению и умножению.

Показать, что функция $(1/f)(x) = 1/f(x)$ непрерывна, если функции f непрерывна, и $f(x) \neq 0$ для любых $x \in X$.

Будет ли непрерывна точная верхняя (нижняя) грань $\sup\{f_n\}(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ ($\inf\{f_n\}(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\}$) счетного семейства f_n, $n \in \mathbb{N}$, непрерывных функций?

4.3. Покажите, что если подмножество A пространства X открыто-замкнуто, то его характеристическая функция $\chi_A : X \to \{0,1\}$, где $\chi_A(x) = 1$, если $x \in A$, и $\chi_A(x) = 0$, если $x \in X \setminus A$ является непрерывной.

4.4. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X, ρ) функция $f_A : X \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$ непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x,a)$?

4.5. Проверьте, что если тождественное отображение множества X с топологией τ_2 в X с топологией τ_1 непрерывно, то $\tau_1 \subset \tau_2$ (топология τ_2 на X сильнее топологии τ_1).

4.6. Докажите, что любое замкнутое (соответственно открытое) подмножество метрического пространства функционально замкнуто (соответственно функционально открыто).

4.7. Привести пример непрерывного биективного отображения $f : X \to Y$ пространств X и Y, не являющегося гомеоморфизмом. Можно ли считать $X = Y$?

4.8. Следующие условия на биективное отображение $f : X \to Y$ эквивалентны:

(a) отображение f — гомеоморфизм;

(b) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f(O)$ открыто;

(c) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f(F)$ замкнуто;

(d) множество O открыто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(O)$ открыто;

(e) множество F замкнуто в том и только том случае, если множество $f^{-1}(F)$ замкнуто.

4.9. Если $f: X \to Y$ — гомеоморфизм, то для любого $A \subset X$ выполнено:

(a) $f(\mathrm{Cl}A) = \mathrm{Cl}(f(A))$;

(b) $f(\mathrm{Int}A) = \mathrm{Int}(f(A))$;

(c) $f(\mathrm{Fr}A) = \mathrm{Fr}(f(A))$.

4.10. Доказать, что любое сюръективное изометрическое вложение – гомеоморфизм.

4.11. Постройте гомеоморфизмы:

(a) $[0,1]$ на $[a,b]$, $a < b$;

(b) $(0,1]$ на $[0,1)$;

(c) $(0,1)$ на $\mathbb{R}$.

Доказать, что $[0,1]$, $[0,1)$ и $(0,1)$ попарно не гомеоморфны.

4.12. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0,1), y \in (0,1)\}$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$;

(d) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$;

(f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + y^2 > x\}$;

(g) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \setminus (0,0,1)$ (сфера S^2 без точки).

4.13. Описать все гомеоморфизмы числовой прямой (отрезка $[0,1]$).

4.14. Докажите, что всякая незамкнутая несамопересекающаяся конечнозвенная ломаная на плоскости гомеоморфна отрезку $[0,1]$. Докажите, что всякая замкнутая несамопересекающаяся ломаная на плоскости гомеоморфна окружности S^1.

4.15. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны:

(a) $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$;

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;

(c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$;

(d) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in [0,1]\}$;

(e) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y = 0\}$.

4.16. Докажите, что сфера S^n с выкинутой точкой гомеоморфна $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

4.17. Докажите, что квадрат $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0,1], y \in [0,1]\}$ гомеоморфен кругу $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

4.18. Докажите, что $\mathbb{R}^2 \setminus \cup\{x_k : k = 1, \dots, n\}$ (все точки различны) гомеоморфно $\mathbb{R}^2 \setminus \cup\{D_k : k = 1, \dots, n\}$, где D_k — попарно дизъюнктные замкнутые круги.

4.19. В шаровом слое просверлили цилиндрическое отверстие, соединяющее граничные сферы. Докажите, что оставшаяся часть гомеоморфна шару в пространстве.

4.20. Докажите, что пространства $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ попарно не гомеоморфны.

4.21. Дайте полную классификацию (с точностью до гомеоморфизма) открытых подмножеств прямой.

4.22. Доказать, что $\mathbb{Q}$ не вкладывается в $\mathbb{Z}$.

4.23. Доказать, что прямая в евклидовой топологии, прямая в топологии Зарисского и прямая Зоргенфрея попарно не гомеоморфны. Можно ли вложить одно из пространств в другое?

4.24. Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, и $\mathcal{R}$ разбиение X на множества $f^{-1}(y)$, $y \in Y$. Докажите, что существует непрерывная биекция $\bar{f}: X/\mathcal{R} \to Y$ такая, что $f = \bar{f} \circ q$, где q — факторотображение X на $X/\mathcal{R}$.

4.25. Что является факторпространством прямой $\mathbb{R}$ по отношению эквивалентности $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$?

4.26. Если S' разбиение пространства X, S'' разбиение пространства X/S', то факторпространство $(X/S')/S''$ гомеоморфно X/T, где T — разбиение пространства X на прообразы элементов разбиения S'' при факторотображении $X \to X/S'$.

4.27. Определите разбиение отрезка I, факторпространство по которому гомеоморфно квадрату I^2.

4.28. Докажите, что следующие пространства гомеоморфны при $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

(a) $\mathbb{R}^n$,

(b) $\mathbb{R}^n/B^n$, $B^n = \left\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \le 1\right\}$, (стягивание шара в точку),

(c) $\mathbb{R}^n/I^n$ (стягивание куба в точку).

4.29. Докажите, что факторпространства B^2 по следующим отношениям эквивалентности гомеоморфны B^2:

(a) $(x, y) \sim (-x, -y)$,

(b) $(x, y) \sim (x, -y)$.

4.30. Докажите, что факторпространство замкнутого шара B^n по его разбиению на одноточечные подмножества открытого шара D^n и граничную сферу S^{n-1} гомеоморфно сфере S^n, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$.

Дополнительные задачи.

4.1x. Будет ли невырожденное аффинное отображение нормированного пространства в себя гомеоморфизмом?

4.2x. Пусть X пространство без изолированных точек. Существует ли функция разрывная во всех точках X?

4.3x. Опишите прообразы точек при непрерывном отображении прямой в топологии Зарисского на себя.

4.4x. Отображение $f : X \to Y$ линейно упорядоченных пространств X и Y строго монотонно возрастает (убывает), если $f(a) < f(b)$ ($f(a) > f(b)$) при $a < b$. Доказать, что сюръективное строго монотонно возрастающее (или убывающее) отображение линейно упорядоченных множеств является гомеморфизмом относительно интервальных топологий. Можно ли откзаться от условия сюръективности или строгой монотонности для сохранения непрерывности?

4.5x. Существуют ли негомеоморфные пространства X и Y для которых определены непрерывные биекции $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$?

4.6x. Всякая ли непрерывная биекция прямой Зоргенфрея (прямой в топологии Зарисского) является гомеоморфизмом?

4.7x. Доказать, что любое счетное метрическое пространство вложимо в $\mathbb{Q}$.

4.8x. Докажите, что в пространство $C[0,1]$ — непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$ изометрически вкладывается любое сепарабельное (т.е. содержащее счетное всюду плотное подмножество) метрическое пространство.

4.9x. Докажите, что любое замкнутое выпуклое подмножество плоскости гомеоморфно или точке, или отрезку, или кругу, или лучу, или прямой, или полосе, или полуплоскости, или плоскости.

4.10x. Докажите, что $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3 \setminus (\mathbb{R}^1 \cup \{(1,1,1)\})$.

4.11x. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности гомеоморфизмов отрезка $[0,1]$ может не быть его гомеоморфизмом.

4.12x. l^∞ — множество ограниченных последовательностей вещественных чисел с нормой $\|x\| = \sup\{|x_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Докажите, что множество $\{x \in l^\infty : |x_n| = 2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно канторову множеству.

4.13x. Докажите, что пространство Бэра гомеоморфно пространству иррациональных чисел.

4.14x. Существует ли непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}^2$?

4.15x. Существует ли геомеоморфизм плоскости $\mathbb{R}^2$ и замкнутой верхней полуплоскости?