Задание N 1[1]

А. *Метрические пространства. Метрика (Определение 4.1), открытые (замкнутые) шары, сферы (Определение 4.3)*

Задачи.

1.1. Пусть на плоскости E задана прямоугольная система координат, $p = (x_p, y_p), q = (x_q, y_q)$. Определим отображения $\rho_\star : E \times E \to \mathbb{R}_+$:

(ρ_d) $\rho_d(p,q) = 1$, если $p \neq q$, $\rho_d(p,q) = 0$, если $p = q$, $p, q \in E$;

(ρ_e) $\rho_e(p,q) = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}$;

(ρ_{max}) $\rho_{max}(p,q) = \max\{|x_p - x_q|, |y_p - y_q|\}$;

($\rho_\diamond$) $\rho_\diamond(p,q) = |x_p - x_q| + |y_p - y_q|$;

(ρ_j) $\rho_j(p,q) = |y_p - y_q|$, если $x_p = x_q$, $\rho_j(p,q) = |x_p - x_q| + |y_p| + |y_q|$, если $x_p \neq x_q$.

Проверить, что они являются метриками.

1.2. Докажите, что следующие функции

$$\rho_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x) - g(x)| dx, \ \rho_2(f,g) = \sqrt{\int\limits_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx},$$

$$\rho_3(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [0,1]\}$$

в множестве всех непрерывных отображений $[0,1] \to \mathbb{R}$ являются метриками.

1.3. Точками пространства ℓ_2 являются счетные последовательности $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, для которых $\sum x_i^2 < \infty$. Для $p = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $q = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ положим $\rho(p,q) = \sqrt{\sum (x_i - y_i)^2}$. Показать, что метрика корректно определена. Указать в l_2 счетное подмножество точек, попарные расстояния между которыми равны 1.

1.4. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ – произвольная инъективная функция на множестве X. Докажите, что отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |f(x) - f(y)|$, является метрикой на X.

1.5. Может ли шар большего радиуса содержаться в шаре меньшего радиуса?

1.6. Нарисовать единичные открытые шары точек в метриках из задач 1.1, 1.2.

1.7. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}$ и $\rho_2(x,y) = \rho(x,y)/(1 + \rho(x,y))$ являются метриками на множестве X. Сравнить открытые и замкнутые шары метрик ρ, ρ_1 и ρ_2.

1.8. Определить аналоги метрик $\rho_d, \rho_e, \rho_{max}, \rho_\diamond$ из задачи 1.1 для пространств $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1.9. Доказать, что в метрическом пространстве любая последовательность точек не может иметь более одного предела.

Дополнительные задачи.

1.1x. На любом ли линейном пространстве над полем $\mathbb{R}$ можно определить евклидову структуру?

1.2x. Пусть p – простое число и разность $x - y$ различных чисел $x, y \in \mathbb{Q}$ представляется в виде $\frac{r}{s} p^\alpha$, где r, s и $\alpha \in \mathbb{Z}$, r, s взаимно просты с p. Положим $\rho(x,y) = p^{-\alpha}$ для $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{Q}$. Доказать, что ρ – метрика (p-адическая метрика на $\mathbb{Q}$).

1.3x. Пусть на плоскости E задана аффинная (не прямоугольная) система координат. Определим отображение $\rho' : E \times E \to \mathbb{R}$ формулой

$$\rho'(\bar{a}, \bar{b}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2},$$

$\bar{a} = (x_1, x_2), \bar{b} = (y_1, y_2) \in E$. Доказать, что отображение ρ' является метрикой на E.

1.4x. Какая из метрик в задаче 1.2 может быть задана нормой (скалярным произведением) в линейном пространстве непрерывных отображений $[0,1] \to \mathbb{R}$?

1.5x. *Пространство Бэра.* Пусть X произвольное бесконечное счетное множество. Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех последовательностей элементов множества X. На множестве $\mathcal{B}$ введём метрику ρ следующим образом: для $p = (x_1, x_2, ...), q = (y_1, y_2, ...) \in \mathcal{B}$ полагаем $\rho(p,q) = 0$, если $p = q$, и $\rho(p,q) = 1/k$, если k наименьшее натуральное число, для которого $x_k \neq y_k$. Показать, что метрика корректно определена.

[1] Ссылки даны на книгу О.Виро, О.Иванов, Н.Нецветаев, В.Харламов "Элементарная топология"

1.6х. *"Метризуемый еж"*. Пусть Λ некоторое бесконечное множество. Поставим в соответствие каждому элементу $\lambda \in \Lambda$ отрезок $[0,1]$, который обозначим через $[0,1]_\lambda$ и будем считать, что все эти отрезки попарно не имеют общих точек за исключением точки 0, которая предполагается принадлежащей всем отрезкам. Положим $X = \cup\{[0,1]_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ и определим метрику $\rho : X \times X \to \mathbb{R}_+$. Для $p, q \in X$ полагаем $\rho(p,q) = |p-q|$, если p и q принадлежат одному отрезку $[0,1]_\lambda$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, и $\rho(p,q) = p+q$, если p и q не принадлежат одному отрезку $[0,1]_\lambda$. Показать, что метрика корректно определена.

1.7х. Докажите, что для любого метрического пространства (X,ρ) расстояние Хаусдорфа

$$d_\rho(A,B) = \max\{\sup\{\rho(a,B) : a \in A\}, \sup\{\rho(b,A) : b \in B\}\}$$

является метрикой в множестве ограниченных замкнутых подмножеств $A, B \subset X$. Можно ли отказаться от требования их замкнутости? ограниченности?

1.8х. Для $0 < p < 1$ точками пространства ℓ_p являются счетные последовательности $(x_1, \dots, x_n, \dots)$ действительных чисел, для которых $\sum |x_i|^p < \infty$. Для $p = (x_1, \dots, x_n, \dots)$, $q = (y_1, \dots, y_n, \dots)$ положим $\rho(p,q) = \sum |x_i - y_i|^p$. Показать, что метрика корректно определена. Порождена ли она нормой?

1.9х. Описать открытые шары точек в метриках из задач 1.5х, 1.6х.

B. *Непрерывные отображения метрических пространств.*

Задачи.

2.1. Построить непрерывное отображение канторова множества на отрезок.

2.2. Построить непрерывное отображения канторова множества на квадрат.

2.3. Докажите, что для любого подмножества A метрического пространства (X,ρ) функция $f_A : X \to \mathbb{R}$, определяемая формулой $f_A(x) = \inf\{\rho(x,a) : a \in A\}$ непрерывна. Всегда ли существует точка $a \in A$ такая, что $f_A(x) = \rho(x,a)$?

2.4. Отображение метрических пространств $f : X \to Y$ называется *изометрическим вложением*, если для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(x,y) = \rho(f(x), f(y))$. Доказать, что любое изометрическое вложение непрерывно.

2.5. Отображение f метрического пространств X в себя называется *сжимающим*, если существует $0 < \alpha < 1$ такое, что для любых точек $x, y \in X$ выполнено $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$. Доказать, что любое сжимающее отображение метрического пространства X непрерывно.

2.6. Доказать, что любое непрерывное отображение отрезка $[0,1]$ в себя имеет неподвижную точку.

Дополнительные задачи.

2.1х. Доказать, что изометрическое вложение пространства $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) в себя однозначно определяется образами некоторых $n+1$ точек, $n \in \mathbb{N}$.

2.2х. Доказать, что $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) не изометрично $\mathbb{R}^m$ при $n, m \in \mathbb{N}$, $n \neq m$.

2.3х. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) изометрично вложено в ℓ_2.

2.4х. Любое ли конечное метрическое пространство изометрически вложимо в $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой)? в ℓ_2?

2.5х. Для всякой ли изометрии f пространства ℓ_2 существует точка p такая, что $f(p) = p$ (p — неподвижная точка отображения f)?

2.6х. Доказать, что канторовы множества, получаемые выкидыванием "интервалов различной длины" не изометричны.

2.7х. Может ли пространство $\mathbb{R}^n$ (с евклидовой метрикой) быть изометрично своему собственному подмножеству? А пространство ℓ_2?