Топологические игры, 3 ноября.

X — пространство, $Y \subset X$,
Y — множество типа G_δ $\equiv$ $\exists\, U_n$ — откр.
$Y = \bigcap_n U_n$.

Определение (X, d) — метр. пр-во,
X — полное метрическое пространство $\equiv$
$(x_n)_n - X$, (x_n) — фундаментальная последовательность, то x_n сходится к некоторой точке $x \in X$.

Утверждение. $(\mathbb{R}, d)$ — полное метрическое пространство (Критерий Коши).

Теорема. (X, d) — полное метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда $BM(X, M)$ 2-бэл его учичка $\Longleftrightarrow$
$\exists\, U$ откр. непустое подмножество X,
$\exists\, G$ — типа G_δ подмножество U, т.что.
$G \subset M \cap U \subset U \subset \overline{G}$.

$(\Longleftarrow)$ $\quad G = \bigcap\limits_n \mathcal{U}_n$, $\mathcal{U}_n$ – откр.

$$G \subset M \cap \mathcal{U} \subset \mathcal{U} \subset \overline{G}.$$

Укажем выигрышную стратегию для игрока α.

1) $s(\varnothing) = \mathcal{U}$

2) $\mathcal{U} = \underset{\alpha}{\mathcal{U}_0} \supset \underset{\beta}{V_0} \supset \ldots \supset \underset{\alpha}{\mathcal{U}_{n-1}} \supset \underset{\beta}{V_{n-1}}$

$\exists\, x_n \in V_{n-1} \cap G \quad \exists\, \varepsilon_n > 0$:

(1) $B_{\varepsilon_n}(x_n) \subset \mathcal{U}_n$

(2) $B_{2\varepsilon_n}(x_n) \subset V_{n-1}$

(3) $\varepsilon_n < \frac{1}{2n}$.

$$\mathcal{U}_n = s(\mathcal{U}_0, \ldots, V_{n-1}) = B_{\varepsilon_n}(x_n).$$

Проверим, что s – выигрышная.

$(x_n)_n$ – фундамент. последовательность

$m > n \quad x_m \in \mathcal{U}_n = B_{\varepsilon_n}(x_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon_n < \frac{1}{2n}$.

Так как X - полное метр. пр-во $\Rightarrow$

$x_n \to x$,

$$x \in \bigcap_1 \mathcal{U}_n = \bigcap_1 V_n = \{x\}.$$

$(2) \Rightarrow \overline{\mathcal{U}_n} \subset V_{n-1} \quad (*)$

$x \in \bigcap_n \overline{\mathcal{U}_n} = \bigcap \mathcal{U}_n$

$(1)\ \mathcal{U}_n \subset W_n \Rightarrow$

$\{x\} = \bigcap \mathcal{U}_n \subset \bigcap W_n = G \subset M$

$x \in M$.

$x \in M \cap \bigcap_n \mathcal{U}_n$. ∎

$(\Leftarrow)$ $\gamma_n - \{ \mathcal{U} \underset{op}{\subseteq} X : \operatorname{diam} \mathcal{U} < \frac{1}{n} \}$

$\overline{\cup \gamma_n} = X$. $\exists \mathcal{U}$ - откр. непуст. в X,

$\exists \mu_n$ - дизъюнктные открытые семьи в X

(1) $\overline{\cup \mu_n} = \mathcal{U}$

(2) μ_{n+1} вписан в γ_n

(3) μ_{n+1} вписана в μ_n

(4) $\mathcal{U}_n \in \mu_n$, $\mathcal{U}_{n+1} \subset \mathcal{U}_n \Rightarrow M \cap \bigcap_n \mathcal{U}_n \neq \emptyset$.

$(2) \Rightarrow \operatorname{diam}(V) < \frac{1}{n} \quad \forall V \in \mathcal{M}_{n+1}$

$W_n = \bigcup \mathcal{M}_n$.: отвр. подм. X

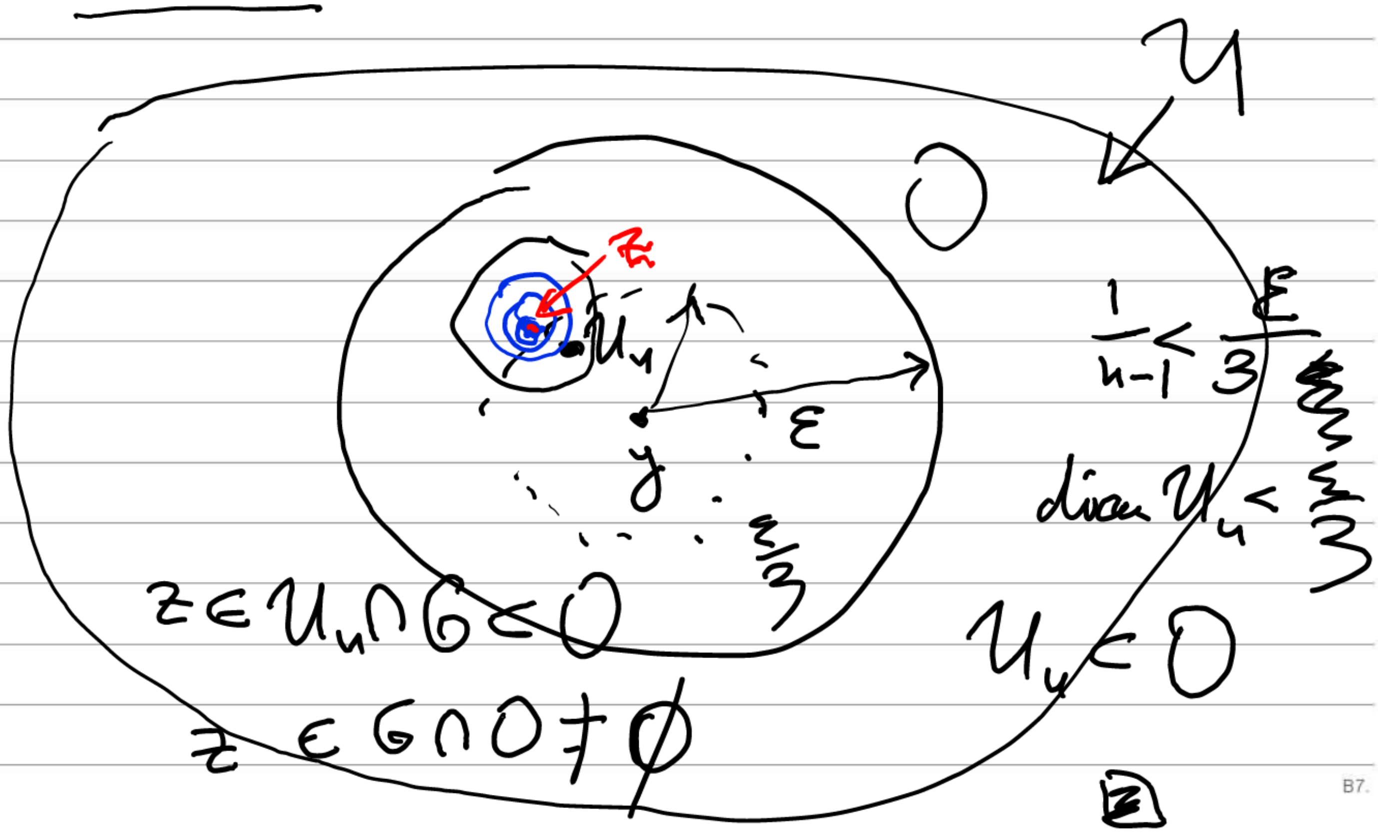
Тогава $G = \bigcap_n W_n \subset M \cap U \subset U \subset \overline{G}$.

$x \in G \quad \exists!\ (U_n)_n,\ x \in U_n \in \mathcal{M}_n$

$(2) \Rightarrow \bigcap U_n = \{x\} \cap M \neq \emptyset$. (4)

$x \in M$. Получаем $G \subset M$.

Лемма $\overline{G} = \overline{U}$.



$\frac{1}{n-1} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\operatorname{diam} U_n < \frac{\varepsilon}{3}$

$z \in U_n \cap G \subset O$

$U_n \subset O$

$z \in G \cap O \neq \emptyset$

$\boxed{\varepsilon}$