Группа G — это множество вместе с заданными на нём ассоциативной бинарной операцией $*: G \times G \to G$, унарной операцией $^{-1}: G \to G$ и 0-арной операцией e. При этом должны выполняться условия $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ и $g * e = e * g = g$ для всех $g \in G$.

Стандартные обозначения для операций над множествами в группах: $A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\}$, $a * B = \{a\} * B$, $A * b = A * \{b\}$, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$.

Определение 1. Группа G с топологией $\mathscr{T}$ называется *топологической группой*, если групповая операция (умножение) $\cdot : G \times G \to G$ и операция взятия обратного элемента $^{-1}: G \to G$ непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$ на G и топологии декартова произведения на $G \times G$. При этом $\mathscr{T}$ называется *групповой* топологией, или *топологией, согласованной с групповыми операциями.*

Примеры

- Любая группа превращается в топологическую группу, будучи снабжённой дискретной топологией.

- Прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией является топологической группой (а прямая Зоргенфрея с той же операцией сложения топологической группой не является — операция перехода к обратному не непрерывна).

- Топологической группой является и любая тихоновская степень прямой с покоодинатными умножением и взятием обратного, так что любое тихоновское пространство является подпространством топологической группы.

- На пространстве $\mathbf{P}$ иррациональных чисел можно ввести групповую операцию, относительно которой $\mathbf{P}$ является топологической группой. Действительно, пространство $\mathbf{P}$ гомеоморфно тихоновскому произведению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, а на степени $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ дискретной группы $\mathbb{Z}$ определены операции покоординатного сложения и перехода к обратному. Нетрудно убедиться в том, что эти операции непрерывны относительно топологии тихоновского произведения.

- То же верно и для канторова дисконтинуума C — он гомеоморфен счётной тихоновской степени двухэлементной дискретной группы $\mathbb{Z}_2$.

Специфические топологические свойства топологических групп

① *Любая топологическая группа G является однородным топологическим пространством, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f: G \to G$ такой, что $f(g) = h$.*

Действительно, в качестве f можно взять отображение, определённое правилом $x \mapsto h \cdot g^{-1} \cdot x$. Оно непрерывно в силу непрерывности умножения и обладает непрерывным обратным $x \mapsto g \cdot h^{-1} x$.

(Неоднородные топологические пространства: сходящаяся последовательность; любое недискретное пространство, имеющее хотя бы одну изолированную точку; отрезок.)

Таким образом, топология любой топологической группы полностью определяется окрестностями единицы в этой группе: для любой окрестности U любого элемента g топологической группы G множество $g^{-1} \cdot U$ (так же как и $U \cdot g^{-1}$) является окрестностью единицы, так что все окрестности любого $g \in G$ являются окрестностями единицы, помноженными на g (или, как говорят, *сдвигами* окрестностей единицы на g), и зная, например, локальную базу в единице, мы тем самым знаем и локальные базы во всех точках G, т.е. всю топологию.

Поскольку $1 \cdot 1 = 1$ и $1 = 1^{-1}$, из непрерывности умножения и взятия обратного следует, что для любой окрестности единицы U в топологической группе существуют окрестности единицы V и W такие, что $V \cdot V \subset U$ и $W^{-1} \subset U$.

② *Если топологическая группа удовлетворяет акиоме отделимости T_0, то она удовлетворяет также и аксиомам T_1 и T_2. Кроме того, всякая топологическая группа удовлетворяет аксиомам T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Действительно, предположим, что топологическая группа G удовлетворяет аксиоме T_0. Покажем, что тогда G удовлетворяет аксиоме T_2 (а значит, и T_1). Пусть $g, h \in G$, $g \neq h$, и пусть U — окрестность одной из этих точек, не содержащая другую; допустим для определённости, что $g \in U$ и $h \notin U$.

Пусть V — окрестность единицы, для которой $V \cdot V \subset g^{-1} \cdot U$ (она существует, потому что $g^{-1} \cdot U$ — окрестность единицы). Тогда V^{-1} — тоже окрестность единицы, а $g \cdot V$ и $h \cdot V^{-1}$ — окрестности точек g и h соответственно. Покажем, что $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$.

Предположим, что это не так; тогда для некоторых $v_1, v_2 \in V$ имеем $g \cdot v_1 = h \cdot v_2^{-1}$, откуда $h = g \cdot v_1 \cdot v_2$, а значит, $h \in g \cdot V \cdot V \subset g \cdot g^{-1} U = U$ в противоречие с определением U. Следовательно, $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$. Это доказывает, что $G \in T_2$.

Ввиду доказанного утверждения в дальнейшем мы не будем уточнять, какой именно из аксиом T_0–T_2 удовлетворяет данная топологическая группа, и станем называть группу, удовлетворяющую любой из этих аксиом, просто *отделимой*.

Теперь докажем, что любая топологическая группа удовлетворяет аксиоме T_3. В силу однородности для этого достаточно показать, что какова бы ни была окрестность единицы U, существует окрестность единицы V, для которой $\overline{V} \subset U$. В качестве V можно взять любую окрестность единицы со свойством $V \cdot V \subset U$.

Действительно, у любой точки $g \notin U$ есть окрестность, не пересекающая V — это $g \cdot V^{-1}$ (если $g \cdot V^{-1} \cap V \neq \varnothing$, то $g \cdot v_1^{-1} = v_2$ для некоторых $v_1, v_2 \in V$, откуда $g \in V \cdot V \subset U$).

Доказательство того, что всегда $G \in T_{3\frac{1}{2}}$, несколько сложнее. Оно основано на понятии нормы и на следующем чисто алгебраическом утверждении, которое имеет исключительную важность для теории топологических групп.

Определение 2. *Полунормой* на группе G называется функция $\|\cdot\| \colon G \to \mathbb{R}$ со свойствами

① $\|1\| = 0$,

② $\|g\| = \|g^{-1}\|$ для всех $g \in G$ и

③ $\|g \cdot h\| \leq \|g\| + \|h\|$ для всех $g, h \in G$.

Из этих свойств вытекает и свойство

④ $\|g\| \geq 0$ для всех $g \in G$.

Лемма 1 (исключительной важности). *Пусть G — произвольная группа и U_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность её подмножеств со свойствами*

$$① \ 1 \in U_n, \qquad ② \ U_n = U_n^{-1} \quad \text{и} \quad ③ \ U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда на группе G существует полунорма $\|\cdot\|$ такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\Big\{x \in G : \|x\| < \frac{1}{2^n}\Big\} \subset U_n \subset \Big\{x \in G : \|x\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}\Big\}. \tag{$\star$}$$

Доказательство этой леммы сводится к построению монотонной системы множеств $U(\frac{m}{2^n})$ со свойствами

$$U\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = U_n \qquad \text{и} \qquad U\Big(\frac{m}{2^n}\Big) \cdot U\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subset U\Big(\frac{m+1}{2^n}\Big),$$

после чего норма определяется как

$$\|x\| = \sup_{y \in G} |f(yx) - f(y)|,$$

где

$$f(x) = \inf\Big\{\frac{m}{2^n} : x \in U(\frac{m}{2^n})\Big\}.$$

Одно из следствий важной леммы — то, что всякая топологическая группа удовлетворяет аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$. Более того, в топологической группе точки отделяются от не содержащих их замкнутых множеств не просто какими-то непрерывными функциями, а непрерывными полунормами, т.е. функциями, хорошо согласованными с групповой структурой; иными словами, шары относительно непрерывных полунорм образуют базу окрестностей единицы. Действительно, для любой окрестности единицы U в топологической группе G легко построить, пользуясь непрерывностью операций, последовательность окрестностей единицы $U_1 \subset U, U_2, U_3, \ldots$ со свойствами ①–③ из формулировки леммы. Нетрудно видеть, что полунорма, существование которой утверждается в лемме, непрерывна (это вытекает из формулы $(\star)$ и неравенства $\|g \cdot h\| \leq \|g\| + \|h\|$). Ясно, что она отделяет 1 от $G \setminus U$.

Пересечение H всех окрестностей единицы в любой топологической группе G является замкнутой нормальной подгруппой, потому что в силу непрерывности операций и того, что $G \in T_3$, для любой окрестности единицы U и любого $g \in G$ существуют окрестности единицы V_1, V_2, V_3 и V_4 такие, что $V_1 \cdot V_1, V_2^{-1}, g^{-1} \cdot V_3 \cdot g, \overline{V}_4 \subset U$.

Ясно, что факторгруппа G/H с топологией факторпространства является отделимой топологической группой, и между топологическими свойствами групп G и G/H имеется прозрачная связь. Так что по существу изучение топологических групп сводится к изучению отделимых топологических групп.

③ *Всякая отделимая топологическая группа, удовлетворяющая первой аксиоме счётности, метризуема.*

Действительно, если у единицы топологической группы G имеется счётная база окрестностей $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, то неё имеется и счётная база окрестностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ со свойствами ①–③ из важной леммы. Её легко построить по индукции: надо положить $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$, а затем, считая, что окрестность U_n уже построена, найти окрестность единицы W со свойством $W \cdot W \subset U_n \cap V_{n+1}$ и положить $U_{n+1} = W \cap W^{-1}$.

Очевидно, множества $B_n = \big\{x : \|x\| < \frac{1}{2^n}\big\}$, где $\|\cdot\|$ — полунорма, существование которой утверждается важной леммой, тоже образуют базу окрестностей единицы, причём эта полунорма является нормой (т.е. $\|g\| \neq 0$ для $g \neq 1$), а соответствующая этой норме метрика $d(g,h) = \|g^{-1} \cdot h\|$ порождает топологию.

④ *Группы Ли*

Определение 3. *Группа Ли* — это группа вместе с заданной на ней структурой вещественно-аналитического многообразия, в которой групповые операции выражаются вещественно-аналитическими функциями от локальных координат.

Другими словами, это топологическая группа G, в некоторой окрестности единицы которой (а значит, и в некоторой окрестности любой другой точки) все элементы можно представить в виде $g(\mathbf{t})$, где $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ — набор вещественных параметров, причём операции умножения и взятия обратного выражаются вещественно-аналитической вектор-функцией от совокупности параметров, что можно кратко записать как $g(\mathbf{t}) \cdot g^{-1}(\mathbf{s}) = g(f(\mathbf{t}, \mathbf{s}))$, где f — вещественно-аналитическая вектор-функция.

Известно, что не на всяком топологическом многообразии можно ввести структуру гладкого многообразия: существует компактное триангулируемое многообразие размерности 10 (т.е. компакт, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^{10}$, и который допускает триангуляцию), которое не гомеоморфно никакому гладкому многообразию. С группами ситуация иная: всякая топологическая группа, локально гомеоморфная евклидову пространству, допускает структуру группы Ли, и притом единственную; другими словами, для любой такой топологической группы G существуют группа Ли $\hat{G}$ и топологический изоморфизм (т.е. изоморфизм, являющийся одновременно гомеоморфизмом) между G и $\hat{G}$. Более того, вместо локальной евклидовости достаточно требовать, чтобы группа была локально компактной и не имела малых подгрупп (последнее условие означает, что некоторая окрестность единицы не содержит нетривиальных подгрупп). Таким образом, с точки зрения топологической алгебры группы Ли — это в точности локально компактные группы без малых подгрупп.

Приведённые примеры показывают, что наличие непрерывных групповых операций на топологическом пространстве оказывает весьма сильное влияние на топологические свойства этого пространства. Верно и обратное. В частности, недискретные отделимые групповые топологии существуют на на всех бесконечных группах. Группы, на которых такие топологии существуют, называются *топологизируемыми.* Вопрос о существовании нетопологизируемых бесконечных групп был поставлен в 1941 г. А.А. Марковым, который сформулировал гипотезу, что *всякая бесконечная группа топологизируема.* Проблема Маркова оставалась нерешённой почти сорок лет — до 1980 г., когда были построены сразу два принципиально разных примера нетопологизируемых групп, счётный и несчётный.

Счётную нетопологизируемую группу построил А.Ю. Ольшанский. Эта группа G содержит конечное множество $Z = \{1, z_1, \ldots, z_k\}$ с тем свойством, что для всякого $g \in G \setminus \{1\}$ существует $n_g \in \mathbb{N}$, для которого $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$, причём все числа n_g ограничены в совокупности одним числом $N \in \mathbb{N}$.

Таким образом, каждый отличный от единицы элемент g является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leq N$ и $j \leq k$.

Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G, потому что оно является прообразом одноточечного (и следовательно, замкнутого в любой T_1-топологии) множества $\{z_j\}$ при отображении $f\colon x \mapsto x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения.

Стало быть, дополнение до единицы в группе G является конечным объединением замкнутых множеств и потому замкнуто в любой групповой топологии. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ (а значит, и все остальные одноточечные множества, так как топологические группы однородны) открыто в любой отделимой групповой топологии, т.е. любая отделимая групповая топология на G дискретна.

Несчётный пример построил С. Шелах. Он сконструировал свою группу G в предположении справедливости континуум-гипотезы (оно совместимо с аксиомами теории множеств). Эта группа G обладает тем замечательным свойством, что она порождается любым своим несчётным подмножеством, причём в очень сильном смысле:

$$S^{10000} = G \text{ для любого несчётного } S \subset G.$$

Кроме того, $G = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$, где все M_α — счётные подгруппы G со свойством, которое называется *малнормальностью* или *антинормальностью*:

$$g^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g \cap M_\alpha = \{1\} \text{ для любого } g \in G \setminus M_\alpha,$$

причём
$$M_\alpha \subset M_\beta \text{ для } \alpha < \beta.$$
Предположим, что U — окрестность единицы в некоторой недискретной групповой топологии на группе G.

Если U счётна, то она содержится в некоторой подгруппе M_α, а значит, для любого $g \in G \backslash M_\alpha$ имеем $g^{-1} \cdot U \cdot g \cap U = \{1\}$. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ является окрестностью единицы, будучи пересечением двух окрестностей единицы, а значит, топология дискретна, вопреки предположению. Таким образом, в недискретной групповой топологии на G счётные окрестности единицы не могут существовать.

В силу непрерывности умножения какова бы ни была окрестность единицы U, найдётся окрестность единицы V, для которой $V^{10000} \subset U$. Мы только что показали, что V должна быть несчётной; значит, $U = G$. Таким образом, всякая недискретная групповая топология на G антидискретна.

Простейшие свойства топологических групп

Теорема 1. *Пусть G — топологическая группа и $g \in G$. Тогда*

1) *отображение $R_g\colon G \to G$, определённое правилом $x \mapsto x \cdot g$, является гомеоморфизмом;*

2) *отображение $L_g\colon G \to G$, определённое правилом $x \mapsto g \cdot x$, является гомеоморфизмом;*

3) *отображение $i\colon G \to G$, определённое правилом $x \mapsto x^{-1}$, является гомеоморфизмом.*

(Все эти утверждения очевидны.)

Предложение 1. *Топология $\mathscr{T}$ на группе G является групповой тогда и только тогда, когда*
$$\begin{gathered}\text{для любых } x, y \in G \text{ и любой окрестности } U \text{ элемента } x \cdot y^{-1} \text{ в } (G, \mathscr{T}) \\ \text{существуют такие окрестности } V_x \text{ и } V_y \text{ элементов } x \text{ и } y \text{ соответственно,} \\ \text{что } V_x \cdot V_y^{-1} \subset U.\end{gathered} \tag{$\star$}$$

Доказательство. Необходимость. Если U — окрестность элемента $x \cdot y^{-1}$, то из непрерывности умножения следует, что существуют такие окрестности V_x и $V_{y^{-1}}$ элементов x и y^{-1}, что $V_x V_{y^{-1}} \subset U$. Поскольку взятие обратного непрерывно, существует окрестность V_y элемента y, для которой $V_y^{-1} \subset V_{y^{-1}}$. Имеем $V_x \cdot V_y^{-1} \subset V_x \cdot V_{y^{-1}} \subset U$.

Достаточность. Пусть выполнено условие $(\star)$. Проверим, что взятие обратного непрерывно. Пусть $x \in G$ и U — окрестность элемента x^{-1} в $(G, \mathscr{T})$. Поскольку $x^{-1} = 1 \cdot x^{-1}$, из условия $(\star)$ вытекает существование окрестностей V и V_x элементов 1 и x, для которых $V \cdot V_x^{-1} \subset U$. Имеем $V_x^{-1} = 1 \cdot V_x^{-1}$ и $1 \in V \implies V_x^{-1} = 1 \cdot V_x^{-1} \subset V \cdot V_x^{-1} \subset U$. Непрерывность умножения вытекает из $(\star)$ и непрерывности взятия обратного. ∎

Предложение 2. *Топология $\mathscr{T}$ на группе G является групповой тогда и только тогда, когда*
$$\begin{gathered}\text{для любых } x, y \in G \text{ и любой окрестности } U \text{ элемента } x^{-1} \cdot y \text{ в } (G, \mathscr{T}) \\ \text{существуют такие окрестности } V_x \text{ и } V_y \text{ элементов } x \text{ и } y, \\ \text{что } V_x^{-1} \cdot V_y \subset U.\end{gathered} \tag{$\star$}$$

(Доказывается аналогично предыдущему предложению.)

Предложение 3. *Пусть G — топологическая группа, $U \subset G$ и $g \in G$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) U — *окрестность* 1;

2) U^{-1} — *окрестность* 1;

3) $g^{-1} \cdot U \cdot g$ — *окрестность* 1;

4) $U \cdot g$ — *окрестность* g;

5) $g \cdot U$ — *окрестность* g.

(Очевидно.)

Предложение 4. *Пусть G — топологическая группа, $U \subset G$ и $g \in G$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) U — *окрестность* g;

2) $g^{-1} \cdot U$ — *окрестность* 1;

3) $U \cdot g^{-1}$ — *окрестность* 1.

(Очевидно.)

Предложение 5. *Если $\mathscr{B}$ — база окрестностей единицы в топологической группе G, то для любого $g \in G$ каждое из семейств*

$$\{V \cdot g : V \in \mathscr{B}\} \quad \textit{и} \quad \{g \cdot V : V \in \mathscr{B}\}$$

— база окрестностей точки g в G.

Доказательство. Для любого $V \in \mathscr{B}$ множество $V \cdot g$ — окрестность элемента g в G. Если U — окрестность g, то $U \cdot g^{-1}$ — окрестность 1 в G. Значит, существует множество $V \in \mathscr{B}$, для которого $V \subset U \cdot g^{-1}$. Имеем $V \cdot g \subset U$. ∎

Теорема 2. *Пусть G — группа. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(G)$ является базой открытых окрестностей 1 в некоторой групповой топологии $\mathscr{T}$ на G тогда и только тогда, когда*

1) $U \in \mathscr{B} \implies 1 \in U$;

2) $U, V \in \mathscr{B} \implies \exists W \in \mathscr{B}\colon W \subset U \cap V$;

3) $U \in \mathscr{B} \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon V \cdot V \subset U$;

4) $U \in \mathscr{B} \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon V^{-1} \subset U$;

5) $U \in \mathscr{B},\ g \in G \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon g^{-1} \cdot V \cdot g \subset U$;

6) $U \in \mathscr{B},\ u \in U \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon u \cdot V \subset U$.

В этом случае каждое из семейств

$$\{U \cdot g : U \in \mathscr{B}, g \in G\} \quad \textit{и} \quad \{g \cdot U : U \in \mathscr{B}, g \in G\}$$

является базой топологии $\mathscr{T}$.

Доказательство. Необходимость вытекает прямо из определений (и того, что $1 \cdot 1 = 1^{-1} = 1$). Например, 6) вытекает из предложения 5 и открытости каждого $U \in \mathscr{B}$.

Чтобы доказать достаточность, надо объявить семейство $\{V \cdot g : V \in \mathscr{B}\}$ базой топологии на G и доказать, что она групповая, с помощью предложения 1. ∎

Теорема 3. *Пусть G — топологическая группа и $\mathscr{B}$ — база окрестностей 1. Тогда для любого $A \subset G$*

① $\overline{A} = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} A \cdot U$;

② $\overline{A} = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} U \cdot A$;

③ $N = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} U$ *— замкнутая нормальная подгруппа группы G.*

Доказательство. ① Если $x \in \overline{A}$, то $\forall U \in \mathscr{B}\ \ x \cdot U^{-1}$ — окрестность $x \implies x \cdot U^{-1} \cap A \neq \varnothing$. Значит, $x \cdot u^{-1} = a$ для некоторых $u \in U$ и $a \in A$, так что $x = a \cdot u \in A \cdot U$.

Обратно, пусть $x \in \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} A \cdot U$, и пусть V — любая окрестность x. Тогда $V^{-1} \cdot x$ — окрестность 1, и $U \subset V^{-1} \cdot x$ для некоторого $U \in \mathscr{B}$. Поскольку $x \in A \cdot U$, имеем $x = a \cdot v^{-1} \cdot x$ для некоторых $a \in A$ и $v \in V$, откуда $a \in A \cap V$.

③ $1 \cdot 1 = 1 \implies \forall U \in \mathscr{B}\ \exists V_U \in \mathscr{B}$ т.,что $V_U \cdot V_U \subset U$. Значит, $N \cdot N = \Big(\bigcap\limits_{V \in \mathscr{B}} V\Big) \cdot \Big(\bigcap\limits_{V \in \mathscr{B}} V\Big) \subset \Big(\bigcap\limits_{V \in \mathscr{B}} V \cdot V\Big) \subset \Big(\bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} V_U \cdot V_U\Big) \subset \Big(\bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} U\Big) = N$. Аналогично доказывается, что

$$N^{-1} \subset N \quad \text{и} \quad g^{-1} \cdot N \cdot g \subset N \qquad \forall g \in G.$$

Покажем, что подгруппа N замкнута. Для каждого $U \in \mathscr{B}$ имеем $\overline{U} = \bigcap\limits_{V \in \mathscr{B}} U \cdot V$. Кроме того, для каждого $U \in \mathscr{B}$ существует $V_U \in \mathscr{B}$ со свойством $V_U \cdot V_U \subset U$ (и $V_U \subset U$). Значит, $\overline{U} \subset U \cdot U$. Следовательно,

$$\overline{N} \subset \bigcap_{V \in \mathscr{B}} \overline{V} \subset \bigcap_{V \in \mathscr{B}} V \cdot V \subset \bigcap_{U \in \mathscr{B}} V_U \cdot V_U \subset \bigcap_{U \in \mathscr{B}} U = N.$$

Обратное включение очевидно. ■

Замечание 1. В любой топологической группе G существует база $\mathscr{B}$ окрестностей 1, состоящая из симметричных множеств, т.е. такая, что $U = U^{-1}$ для всех $U \in \mathscr{B}$.

Действительно, для любой базы $\mathscr{B}'$ окрестностей 1 семейство $\{U \cap U^{-1} : U \in \mathscr{B}'\}$ — тоже база окрестностей 1, и

$$(U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap (U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U.$$

Теорема 4. *Любая топологическая группа удовлетворяет аксиомам отделимости T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Если топологическая группа удовлетворяет аксиоме T_0, то она вполне регулярна (и удовлетворяет аксиомам T_1–$T_{3\frac{1}{2}}$).

(См. комментарий к лемме исключительной важности.)

Мы будем называть топологическую группу, удовлетворяющую любой (каждой) из аксиом T_0–T_2, $T_3 + T_1$ и $T_{3\frac{1}{2}} + T_1$ просто *отделимой.*

Подмножества топологических групп

Предложение 6. *Пусть G — топологическая группа, $g \in G$ и $X \subset G$. Следующие условия равносильны:*

1) *X открыто (замкнуто);*

2) X^{-1} *открыто (замкнуто)*;

3) $X \cdot g$ *открыто (замкнуто)*; $g \cdot X$ *открыто (замкнуто)*.

Теорема 5. *Если G — топологическая группа, $X, Y \subset G$ и X открыто, то множества $X \cdot Y$ и $Y \cdot X$ тоже открыты.*

Доказательство. Имеем

$$X \cdot Y = \bigcup_{y \in Y} X \cdot y.$$

Это объединение открытых множеств. ■

Теорема 6. *Пусть G — топологическая группа и $X, Y \subset G$. Тогда $\overline{X} \cdot \overline{Y} \subset \overline{X \cdot Y}$ и $\overline{X^{-1}} = \overline{X}^{\,-1}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \overline{X}$ и $y \in \overline{Y}$, и пусть U — любая окрестность элемента $x \cdot y$ в G. Возьмём окрестности V и W элементов x и y, для которых $V \cdot W \subset U$. Имеем $V \cap X \neq \varnothing$ и $W \cap Y \neq \varnothing$. Для $x' \in V \cap X$ и $y' \in W \cap Y$ имеем $x' \cdot y' \in (V \cdot W) \cap (X \cdot Y) \subset U \cap (X \cdot Y)$. ■

Теорема 7. *Пусть G — топологическая группа, $X \subset G$ замкнуто и $K \subset G$ компактно. Тогда $X \cdot K$ и $K \cdot X$ замкнуты.*

Доказательство. Пусть $x \in G \setminus X \cdot K$. Тогда $x \cdot K^{-1} \cap X = \varnothing$. Значит, $x \cdot K^{-1} \subset G \setminus X$. При этом $G \setminus X$ открыто.

Для каждого $y \in K$ пусть U_y — окрестность точки x и V_y — открытая окрестность точки y такие, что $U_y \cdot V_y^{-1} \subset G \setminus X$.

Семейство $\{V_y : y \in K\}$ — открытое покрытие компакта K. Пусть $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $U = \bigcap\limits_{i \leq n} U_{y_i}$ — окрестность точки x и

$$U \cdot K^{-1} \subset U \cdot \Bigl(\bigcup_{i \leq n} V_{y_i}\Bigr)^{-1} = \bigcup_{i \leq n} U \cdot V_{y_i}^{-1} \subset \bigcup_{i \leq n} U_{y_i} \cdot V_{y_i}^{-1} \subset G \setminus X.$$

Покажем, что $U \cap X \cdot K = \varnothing$. Пусть это не так, и пусть $u = x' \cdot y$ для некоторых $u \in U$, $x' \in X$ и $y \in K$. Тогда $x' = u \cdot y^{-1} \in U \cdot K^{-1} \subset G \setminus X$. Противоречие.

Итак, U — окрестность x, не пересекающая $X \cdot K$. Мы показали, что никакая точка из $G \setminus X \cdot K$ не предельная для $X \cdot K$. ■

Теорема 8. *Если G — топологическая группа и A, B — её непустые связные подмножества, то множество $A \cdot B$ тоже связно.*

Доказательство. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $a \cdot b \in a \cdot B \cap A \cdot b$. Значит, множество $a \cdot B \cup A \cdot b$ связно, будучи объединением двух пересекающихся связных множеств $a \cdot B$ и $A \cdot b$. Любые две точки $a_1 \cdot b_1$ и $a_2 \cdot b_2$ из множества $A \cdot B$ содержатся в связном подмножестве $a_1 \cdot B \cap A \cdot b_2$ этого множества. Значит, множество $A \cdot B$ связно. ■

Предложение 7. *Если G — отделимая топологическая группа, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset G$ и $a^n = 1$ $\forall a \in A$, то $a^n = 1$ $\forall a \in \overline{A}$.*

Доказательство. Предположим, что найдётся $a \in \overline{A}$, для которого $a^n \neq 1$. Пусть U — окрестность a^n, не содержащая 1, и пусть V — окрестность a, для которой $V^n \subset U$. Возьмём $b \in V \cap A$. Имеем $b^n \in V^n$, так что $b^n \neq 1$. Противоречие. ■

Подгруппы

Отныне семейство всех открытых окрестностей элемента g в топологической группе G будем обозначать τ_g.

Предложение 8. *Если G — топологическая группа и H — подгруппа группы G, то H с индуцированной топологией — топологическая группа.*

Доказательство. Если $x, y \in H$ и U — окрестность $x \cdot y^{-1}$ в H, то по определению индуцированной топологии $U = O \cap H$ для некоторой окрестности O точки $x \cdot y^{-1}$ в G. Существуют окрестности V и W точек x и y в G, для которых $V \cdot W^{-1} \subset O$. Множества $V \cap H$ и $U \cap H$ — окрестности x и y в H, и $(U \cap H) \cdot (V \cap H) \subset O \cap H = U$. ■

В дальнейшем подгруппы всегда рассматриваются с индуцированной топологией.

Следствие 1 (из теоремы о замыкании произведения). *Если H — подгруппа топологической группы G, то $\overline{H}$ — тоже подгруппа группы G.*

Предложение 9. *Если G — топологическая группа, H — её подгруппа и* $\mathrm{IntH} \neq \varnothing$, *то H открыто-замкнута.*

Доказательство. Пусть $h \in H$ и $U \subset H$ — окрестность h. Тогда $V = U \cdot h^{-1}$ — окрестность 1, и $V \subset H$. Для любого $x \in H$ имеем $x \cdot V \subset x \cdot H \subset H \cdot H \subset H$. Значит, H открыта.

Пусть $x \notin H$. Тогда $x \cdot H \cap H = \varnothing$. Значит, H замкнута. ■

Теорема 9. *В любой топологической группе G связная компонента единицы C_1 является замкнутой нормальной подгруппой.*

Доказательство. Множества $C_1 \cdot C_1$, C_1^{-1} и $g^{-1} \cdot C_1 \cdot g$ связны и содержат 1. ■

Линейные топологии

Любое семейство нормальных подгрупп группы G, замкнутое относительно конечных пересечений, является базой окрестностей единицы некоторой групповой топологии на G.

Любое семейство нормальных подгрупп с тривиальным пересечением, замкнутое относительно конечных пересечений, является базой окрестностей единицы некоторой отделимой групповой топологии.

Определение 4. Групповая топология называется *линейной*, если она порождена базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп.

Теорема 10 (van Dantzig). *Если топологическая группа G локально компактна и вполне несвязна, то её топология отделима и линейна.*

Доказательство. G вполне несвязна $\implies \{1\} = C_1 = \overline{\{1\}} \implies G \in T_1$ ($\implies G \in T_2$).

Пусть $U \in \tau_1$, и пусть $V \in \tau_1$ имеет компактное замыкание $\overline{V} \subset U$. Тогда $\overline{V}$ — вполне несвязный компакт $\implies \overline{V}$ нульмерно $\implies \exists$ открыто-замкнутая (и компактная) окрестность 1 $W = \overline{W} \subset V$, $W^{-1} = W$. Для каждого $g \in W$ выберем $W_g \in \tau_1$ так, что $W_g \cdot g \subset W$, и возьмём $O_g \in \tau_1$ со свойством $O_g \cdot O_g \subset W_g$. Пусть $\{O_{g_1} \cdot g_1, \dots, O_{g_n} \cdot g_n\}$ — конечное подпокрытие открытого покрытия $\{O_g \cdot g : g \in W\}$ компакта W. Положим $O' = \bigcap_{i \le n} O_{g_i}$ и $O = O' \cap O'^{-1}$. Для каждого $g \in W$ имеем $g \in O_{g_i} \cdot g_i$ для некоторого $i \le n$ и

$$O \cdot g \subset O \cdot O_{g_i} \cdot g_i \subset W_{g_i} \cdot g_i \subset W.$$

Значит, $O \cdot W \subset W$. Отсюда $O \cdot O \subset W$, $O \cdot O \cdot O \subset W$, … . Пусть $H = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} O^n$. Тогда H — открытая подгруппа G, и $H \subset U$. ■

Теорема 11. *Если G — компактная топологическая группа, то $\forall U \in \tau_1\ \exists V \in \tau_1$ такое, что $g^{-1} \cdot V \cdot g \subset U$ для всех $g \in G$.*

Доказательство. Возьмём $W \in \tau_1$ со свойствами $W \cdot W \cdot W \subset U$ и $W^{-1} = W$. Семейство $\{g \cdot W : g \in G\}$ — открытое покрытие G. Пусть $\{g_1 \cdot W, \dots, g_n \cdot W\}$ — его конечное подпокрытие. Положим $V = \bigcap\limits_{i \le n} g_i \cdot W \cdot g_i^{-1}$. Имеем $g_i^{-1} \cdot V \cdot g_i \subset W$ для $i \le n$.

Каждый элемент $g \in G$ содержится в некотором $g_i \cdot W$. Имеем

$$g^{-1} \cdot V \cdot g \subset W^{-1} \cdot g_i^{-1} \cdot V \cdot g_i \cdot W \subset W^{-1} \cdot W \cdot W \subset U.$$

■

Следствие 2. *Если топологическая группа G компактна и вполне несвязна, то её топология порождается открытыми нормальными подгруппами (как базой окрестностей 1).*

Отображения топологических групп и операции над ними

Теория топологических групп во многом параллельна теории общих топологических пространств:

$$\begin{aligned} \text{непрерывные отображения} &\longleftrightarrow \text{непрерывные гомомоморфизмы} \\ \text{гомеоморфизмы} &\longleftrightarrow \text{топологические изоморфизмы} \\ \text{подпространства} &\longleftrightarrow \text{топологические подгруппы} \end{aligned}$$

Операции

1. Топологические группы, как и общие пространства, можно *перемножать*; на декартовом произведении произвольного семейства групп определены покоординатные операции умножения и взятия обратного, относительно которых произведение является группой, а тихоновская (и ящичная) топология произведения является групповой.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_\alpha), \boldsymbol{y} = (y_\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} G_\alpha = \boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{O}$ — любая окрестность элемента $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^{-1} = (x_\alpha \cdot y_\alpha^{-1})$ в $\boldsymbol{G}$ с топологией тихоновского произведения. По определению этой топологии найдутся $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$ и открытые окрестности U_{α_i} точек $x_{\alpha_i} \cdot y_{\alpha_i}^{-1}$ в группах G_{α_i} такие, что произведение $\boldsymbol{U} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, где $X_\alpha = U_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и $X_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, содержится в $\boldsymbol{O}$. Все G_α — топологические группы, поэтому для каждого $i \le n$ существуют окрестности V_{α_i} и W_{α_i} элементов x_{α_i} и y_{α_i} такие, что $V_{\alpha_i} \cdot W_{\alpha_i}^{-1} \subset U_{\alpha_i}$. По определению тихоновской топологии произведения множества

$$\boldsymbol{V} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

где $X_\alpha = V_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и $X_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, и

$$\boldsymbol{W} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha,$$

где $X_\alpha = W_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и $X_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, являются окрестностями точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в $\boldsymbol{G}$. Произведение $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}^{-1} = \prod_{\alpha \in A} Z_\alpha$, где $Z_\alpha = V_\alpha \cdot W_\alpha^{-1}$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ и $Z_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, содержится в $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{O}$. ■

2. Аналога суммы топологических пространств для топологических групп нет, зато определена *прямая сумма* $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ семейства топологических групп G_α, $\alpha \in A$, — это подгруппа декартова произведения, состоящая из точек, лишь конечное число координат которых отличается от единиц соответствующих сомножителей:

$$\bigoplus_{\alpha\in A} G_\alpha = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} G_\alpha : |\{a \in A : x_\alpha \neq 1\}| < \aleph_0\}.$$

Как правило, она снабжается топологией, индуцированной тихоновской топологией декартова произведения.

3. В теории топологических групп существуют и операции, не имеющие даже отдалённых аналогов в теории общих топологических пространств. К ним относится, например, операция перехода от топологической группы G к группе $\widehat{G}$, *двойственной* ей в смысле Понтрягина. Элементами $\widehat{G}$ являются непрерывные *характеры* группы G, т.е. непрерывные гомоморфизмы из G в окружность, и $\widehat{G}$ снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах G; группа $\widehat{G}$ всегда абелева. Операцию перехода к двойственной группе обычно рассматривают только для локально компактных абелевых групп; для таких групп двойственные группы тоже являются локально компактными, и всякая локально компактная абелева группа G топологически изоморфна группе $\widehat{\widehat{G}}$ — в этом состоит *теорема Понтрягина о двойственности.*

Отображения

Поскольку всякая топологическая группа является топологическим пространством, можно говорить об открытости, замкнутости и факторности гомоморфизмов топологических групп как отображений топологических пространств. Однако и здесь наличие групповой структуры оказывает заметный эффект.

Теорема 12. *Всякий гомоморфизм топологических групп, являющийся факторным отображением, является и открытым отображением.*

Доказательство. Пусть G и H — топологические группы и $h\colon G \to H$ — гомоморфизм, являющийся факторным отображением. Для любого открытого в G множества U имеем $h^{-1}(h(U)) = \ker h \cdot U$ (здесь $\ker h$ — ядро гомоморфизма h). Это множество открыто в G, поскольку оно является объединением открытых множеств $g \cdot U$ по всем $g \in \ker h$. В силу факторности h множество $h(U)$ открыто в H. ■

Топологическая группа H, являющаяся образом топологической группы G при факторном (= непрерывном и открытом) гомоморфизме, называется *топологической факторгруппой* группы G.

Теорема 13. *Факторгруппа H отделима тогда и только тогда, когда ядро гомоморфизма $h\colon G \to H$ замкнуто в G.*

Доказательство. Топологическая группа H отделима $\iff$ множество $\{1\}$ в ней замкнуто (1 — единица группы H). По определению факторного отображения множество $X \subset H$ замкнуто в H $\iff$ $h^{-1}(X)$ замкнуто в G.

Осталось заметить, что $h^{-1}(\{1\}) = \operatorname{Ker} h$. ■

Очевидно, для любой топологической группы G пересечение $H = \bigcap \tau_1$ является связной замкнутой нормальной подгруппой, так что факторгруппа G/H является отделимой топологической группой.

Теорема 14. *Факторгруппа G/C_1 любой топологической группы G по компоненте связности единицы является вполне несвязной отделимой топологической группой.*

Доказательство. Поскольку C_1 — замкнутая нормальная подгруппа, факторгруппа G/C_1 определена и отделима.

Пусть $h\colon G \to G/C_1$ — естественный гомоморфизм, и пусть C_1' — компонента связности единицы в G/C_1. Положим $H = h^{-1}(C_1')$. Тогда H — замкнутая нормальная подгруппа группы G, и $H \supset C_1$.

Пусть V — любая открыто-замкнутая окрестность 1 в группе H. Тогда $v \cdot C_1 \subset V$ для всех $v \in V$, поскольку любое множество вида $g \cdot C_1$ связно. Значит, $V = V \cdot C_1 = h|_H^{-1}(h|_H(V))$. Гомоморфизм $h|_H$ является факторным отображением. Следовательно, множество $h|_H(V)$ открыто и замкнуто в C_1', а значит, совпадает с C_1', откуда $V = H$. Таким образом, подгруппа H связна и совпадает с C_1, так что $C_1' = \{1\}$ в группе G/C_1. ■

Компактные вполне несвязные топологические группы называются *проконечными.*

Проконечная топология на любой группе порождена всеми (нормальными) подгруппами конечного индекса (как окрестностями 1).

Группа G *финитно аппроксимируема*, если для любого $g \in G \setminus \{1\}$ найдётся гомоморфизм $h\colon G \to F$ в конечную группу F, удовлетворяющий условию $h(g) \neq 1$. Иными словами, G финитно аппроксимируема, если g является подгруппой произведения конечных групп.

Упражнение. Докажите, что топологическая группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда её проконечная топология отделима.

Свободные топологические группы

Свободные группы — это группы, элементы которых не связаны никакими соотношениями, кроме тех, которые вытекают из определения группы. Всякая свободная группа G *свободно порождена* некоторым своим подмножеством X; это означает, что любой элемент $g \in G$ можно записать в виде произведения элементов $x \in X$ и их обратных, причём такая запись единственна с точностью до вставки и вычёркивания комбинаций вида $x \cdot x^{-1}$ и $x^{-1} \cdot x$. Для свободной группы, порождённой множеством X, используют обозначение $F(X)$.

Свободные группы обладают так называемым *универсальным свойством*: любое отображение $f\colon X \to G$ любого множества X в любую группу G продолжается, и притом единственным образом, до гомоморфизма $\hat{f}\colon F(X) \to G$. При этом понятно, что $\hat{f}(F(X)) \subset \langle X \rangle_G$ (здесь и ниже $\langle X \rangle_G$ обозначает групповую оболочку множества X в G).

Для каждого тихоновского пространства X определена его *свободная топологическая группа* $F(X)$. Как группа это свободная группа, порождённая множеством X, и она снабжена групповой топологией, относительно которой X является подпространством топологической группы $F(X)$ и для которой выполнено аналогичное *универсальное свойство*:

любое непрерывное отображение $f\colon X \to G$ пространства X
в любую топологическую группу G единственным образом продолжается
до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}\colon F(X) \to G$.

Таким образом, топология свободной топологической группы $F(X)$ — сильнейшая из всех групповых топологий на $F(X)$, индуцирующих на множестве X топологию пространства X. Можно показать также, что это слабейшая из всех топологий с универсальным свойством.

Существование свободной топологической группы

Рассмотрим семейство $\mathscr{F}$ всех непрерывных отображений $f\colon X \to G_f$, где G_f — отделимые топологические группы, являющиеся (как пространства) подпространствами тихоновской степени $\mathbb{R}^{2^{|X|}}$ (это ограничение нужно для того, чтобы рассматриваемые группы и отображения образовывали множества).

С точностью до гомеоморфизма и взятия надотображений отображения $f \in \mathscr{F}$ реализуют все непрерывные отображения из X в любые топологические группы. Ясно, что если нам удастся определить групповую топологию на $F(X)$ так, что любое непрерывное отображение $f\colon X \to G$ из семейства $\mathscr{F}$ продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f}\colon F(X) \to G$, то свободная группа с этой топологией будет обладать универсальным свойством.

Групповая оболочка $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X)\rangle$ в группе $\prod\limits_{f\in\mathscr{F}} G_f$ образа пространства X при диагональном произведении $\triangle\, \mathscr{F}\colon X \to \prod\limits_{f\in\mathscr{F}} G_f$ является свободной топологической группой пространства X.

То, что $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X)\rangle$ обладает универсальным свойством, вытекает из того, что все непрерывные отображения $X \to G$ из семейства $\mathscr{F}$ реализуются как проектирования X на сомножители G, а значит, продолжаются до гомоморфизма — проектирования всего произведения на G. Сужение проектирования на $\langle X\rangle = F(X)$ — требуемое продолжение. Как уже отмечалось, из существования продолжений для всех $f \in \mathscr{F}$ следует универсальное свойство.

То, что X гомеоморфно вкладывается в $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X)\rangle$, следует из того, что даже уже непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ разделяют точки и замкнутые множества (поскольку X вполне регулярно).

То, что группа $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X)\rangle$ свободна, можно показать, явно предъявив некоторую отделимую групповую топологию на $F(X)$, относительно которой тождественное вложение $X \to F(X)$ непрерывно.

Граевское продолжение псевдометрик на свободную группу

Пусть $d \le 1$ — псевдометрика на X и $\widetilde{X} = X \sqcup \{e\} \sqcup X^{-1}$. Для $x, y \in \widetilde{X}$ положим

$$\widetilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x^\varepsilon, y^\varepsilon), & \text{если } x, y \in X^\varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon = \pm 1,\\ 1, & \text{если } x = e \text{ и } y \ne e \text{ или } x \ne e \text{ и } y = e,\\ 0, & \text{если } x = y = e,\\ 1, & \text{если } x \in X^\varepsilon \text{ и } y \in X^{-\varepsilon} \text{ для некоторого } \varepsilon = \pm 1. \end{cases}$$

Для $g \in F(X)$ положим

$$\|g\|_d = \min\Bigl\{\inf\Bigl\{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{d}(g_i, u_i) :\ n \in \mathbb{N},\ g_i, u_i \in \widetilde{X},\ g_1 \dots g_n = g,\ u_1 \dots u_n = e\Bigr\}, 1\Bigr\}.$$

Это инвариантная (относительно сопряжений) полунорма:

- $\|g\|_d \ge 0 \ \ \forall g \in F(X)$ (очевидно);
- $\|g^{-1}\|_d = \|g\|_d \ \ \forall g \in F(X)$ (очевидно);
- $\|g \cdot h\|_d \le \|g\|_d + \|h\|_d \ \ \forall g, h \in F(X)$ $\bigl($для любых записей $g = g_1 \dots g_n$, $h = h_1 \dots h_k$, $e = u_1 \dots u_n$ и $e = v_1 \dots v_k$ $\ g_1 \dots g_n h_1 \dots h_k$ — запись слова gh и $u_1 \dots u_n v_1 \dots v_k$ — запись e, так что $\|g\|_d \le \sum\limits_{i \le n} \tilde{d}(g_i, u_i) + \sum\limits_{j \le k} \tilde{d}(h_j, v_j)\bigr)$;

- $\|h^{-1}gh\|_d = \|g\|_d \ \ \forall g, h \in F(X)$ (если $g = g_1 \dots g_n$, $e = u_1 \dots u_n$ и $h = h_1 \dots h_k$, то $g^{-1}hg = h_k^{-1} \dots h_1^{-1} g_1 \dots g_n h_1 \dots h_k$ и $e = h_k^{-1} \dots h_1^{-1} u_1 \dots u_n h_1 \dots h_k$, причём $\tilde{d}(h_j, h_j) = 0$, так что $\|h^{-1}gh\|_d \le \sum\limits_{i \le n} \tilde{d}(g_i, u_i) \implies \|h^{-1}gh\|_d \le \|g\|_d$).

Предложение 10 (Граев). *Инфимум в определении полунормы достигается, причём для несократимой записи слова g и записи e, состоящей из букв несократимой записи слова g и их обратных, а также (возможно) буквы e.*

Доказательство. Заметим, что

$$\|g\|_d = \min\Big\{\inf\Big\{\sum_{i=1}^n \widetilde{d}(g_i, u_i) : \ n \in \mathbb{N}, \ g_i, u_i \in \widetilde{X}, \ g_1 \dots g_n = g, \ u_1 \dots u_n = e\Big\}, 1\Big\} =$$

$$= \inf\Big\{\min\Big\{\sum_{i=1}^n \widetilde{d}(g_i, u_i) : \ n \in \mathbb{N}, \ g_i, u_i \in \widetilde{X}, \ g_1 \dots g_n = g, \ u_1 \dots u_n = e\Big\}, 1\Big\}. \qquad (*)$$

Пусть $g = g_1 \dots g_n$, $e = u_1 \dots u_n$.

Зафиксируем какой-нибудь порядок сокращений в этих записях слов g и e.

Если $g_i = u_i = e$, то соответствующее слагаемое $\widetilde{d}(g_i, u_i)$ в сумме из $(*)$ равно нулю, и обе эти буквы можно выкинуть. Если $g_i = e$ и $u_i \ne e$ или $g_i \ne e$ и $u_i = e$, то соответствующее слагаемое равно 1, так что, заменив $g_1 \dots g_n$ на несократимую запись слова g а $u_1 \dots u_n$ — на слово такой же длины, в котором все буквы — e, мы не увеличим min в $(*)$.

Предположим, что $g_i \ne e$ и $u_i \ne e$ для $i \le n$. Пусть буква g_j не сокращается в слове $g_1 \dots g_n$ (при зафиксированнром порядке сокращений). Заменим u_j на g_j, букву u_t, с которой сокращается u_j, — на g_j^{-1}; если g_t не сокращается в слове $g_1 \dots g_n$, то остановимся, если сокращается — заменим её на g_j^{-1}, букву g_s, с которой она сокращается, — на g_j и т.п., пока не дойдём до буквы g_r, которая не сокращается в $g_1 \dots g_n$ (в $u_1 \dots u_n = e$ все буквы сокращаются). В результате произведённых замен слагаемые

$$\tilde{d}(g_j, u_j) = \tilde{d}(g_j^{-1}, u_j^{-1}), \ \tilde{d}(g_t, u_t = u_j^{-1}), \ \tilde{d}(g_s = g_t^{-1}, u_s) = \tilde{d}(g_t, u_s), \dots, \tilde{d}(g_r, u_r)$$

заменятся на

$$\tilde{d}(g_j, g_j) = 0, \ \tilde{d}(g_j^{-1}, g_j^{-1}) = 0, \tilde{d}(g_j, g_j) = 0, \dots \ \tilde{d}(g_r, g_j^{-1}).$$

В силу неравенства треугольника их сумма может только уменьшиться. Выкинем из слов $g_1 \dots g_n$ и $u_1 \dots u_n$ все замененные на g_j или g_j^{-1} буквы. В результате мы получим равные им слова, однако число сократимых букв в записи слова g и число букв в записи e, которые не входят в несократимую запись g или g^{-1}, уменьшится. Перейдём к несократимой букве в полученной записи g, которая ещё не встречалась в процессе обработки (т.е. не g_j и не g_r). По окончании обработки получим нужные записи, которые уже не получится уменьшить. ■

Пусть X — топологическое пространство и d — непрерывная псевдометрика на X. Тогда $\tilde{d}$ — непрерывная псевдометрика на $X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$.

Псевдометрика d порождает на X топологию $\mathscr{T}_d^X$ (база — все открытые шары). Полунорма $\|\cdot\|_d$ порождает на $F(X)$ групповую топологию $\mathscr{T}_d$, потому что она инвариантна (база окрестностей e — все открытые шары).

Замечание 2. $\mathscr{T}_d|_X = \mathscr{T}_d^X$. Действительно, для $x \in X$ база окрестностей x в топологии $\mathscr{T}_d$ образована множествами вида $\{xg : \|g\|_d < a\}$ для $a > 0$. Заметим: $xg \in X \iff g = x^{-1}y$ для $y \in X$. Однако $\|xy^{-1}\|_d = \tilde{d}(x, y) = d(x, y)$, так что окрестности x в топологии $\mathscr{T}_d|_X$ = шары с центрами в x в псевдометрике d.

Замечание 3. Если $g = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \neq e$ и $\min\{d(x_i, x_j) : i, j \leq n, i \neq j\} > 0$, то $\|g\|_d > 0$ (это легко следует из того же предложения).

Значит, если X — вполне регулярное пространство с топологией $\mathscr{T}_X$, то

$$\mathscr{T} = \sup\{\mathscr{T}_d : d \text{ — непрерывная псевдометрика на } X\}$$

— отделимая групповая топология на $F(X)$ и $\mathscr{T}|_X \subset \mathscr{T}_X$, т.е. тождественное вложение $\mathrm{id} \colon (\mathrm{X}, \mathscr{T}_{\mathrm{X}}) \to (\mathrm{F}(\mathrm{X}), \mathscr{T})$ непрерывно.

Топология индуктивного предела на $F(X)$

Для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим

$$F_n(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k} : k \leq n, x_i \in X, \varepsilon_i \in -1, 1\}.$$

Имеем $F(X) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$.

Естественные отображения умножения $j_n \colon (X \cup \{e\} \cup X^{-1})^n \to F_n(X)$ непрерывны.

Пусть $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Пространство X является *индуктивным* (или *прямым*) пределом подпространств X_n, если $U \subset X$ открыто в $X \iff U \cap X_n$ открыто в X_n для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема 15 (М.И. Граев). *Для любого компакта X свободная топологическая группа $F(X)$ является индуктивным пределом ее подпространств $F_n(X)$.*

Доказательство. X компактно $\implies$ топология на каждом $F_n(X)$ однозначно определяется отображениями $j_n \colon (X \cup \{e\} \cup X^{-1})^n \to F_n(X)$.

Рассмотрим семейство $\mathscr{U}$ всех множеств $U \subset F(X)$, для которых все пересечения $U \cap F_n(X)$ открыты. Покажем, что $\mathscr{U}$ — групповая топология.

Пусть $U \in \mathscr{U}$, и пусть $a, b \in F(X)$ таковы, что $a \cdot b^{-1} \in U$. Нужно найти $U(a), U(b) \in \mathscr{U}$, для которых $a \in U(a)$, $b \in U(b)$ и $U(a) \cdot U(b)^{-1} \subset U$.

Для достаточно большого k имеем $a, b \in F_k(X)$. Построим по индукции последовательности множеств $U_i(a)$ и $U_i(b)$, $i = k, k+1, \dots$ такие, что

1) $a \in U_i(a)$, $b \in U_i(b)$;

2) $U_i(a)$ и $U_i(b)$ открыты в $F_i(X)$;

3) $U_j(a) \subset U_i(a)$, $U_j(b) \subset U_i(b)$ для $j \leq i$;

4) $\overline{U_i(a)} \cdot \overline{U_i(b)}^{-1} \subset U \cap F_{2i}(X)$.

Множество $U \cap F_{2k}(X)$ открыто в $F_{2k}(X) \implies \exists V \subset F(X)$: V открыто и $V \cap F_{2k}(X) = U \cap F_{2k}(X)$.

Поскольку $a \cdot b^{-1} \in V \cap F_{2k}(X)$, существуют окрестности V_a и V_b точек a и b в $F(X)$, для которых $\overline{V}_a \cdot \overline{V}_b^{-1} \subset V$.

Положим

$$U_k(a) = V_a \cap F_k(X), \qquad U_k(b) = V_b \cap F_k(X).$$

Множества $U_k(a)$ и $U_k(b)$ удовлетворяют нужным условиям.

Пусть определены $U_i(a)$ и $U_i(b)$ для $i = k, k+1, \dots, n$. Рассмотрим компакт

$$\Phi = \overline{U_n(a)}^{-1} \cdot (F_{2n+2}(X) \setminus U) \cdot \overline{U_n(b)} \not\ni e.$$

Существует $U_e \in \tau_e$, для которого $\overline{U}_e \cdot \overline{U}_e^{-1} \subset F(X) \setminus \Phi$.

Положим

$$U_{n+1}(a) = (U_n(a) \cdot U_e) \cap F_{n+1}(X), \qquad U_{n+1}(b) = (U_n(b) \cdot U_e) \cap F_{n+1}(X).$$

Проверим 4). Имеем $U_n(a) \subset F_n(X)$, и

$$F_n(X) \text{ — компакт} \implies \overline{U_n(a)} \text{ — компакт} \implies \overline{U_n(a)} \cdot \overline{U}_e \text{ замкнуто} \implies \\ \overline{U_{n+1}(a)} \subset \overline{U_n(a)} \cdot \overline{U}_e.$$

Аналогично получаем $\overline{U_{n+1}(b)} \subset \overline{U_n(b)} \cdot \overline{U}_e$.

Имеем

$$clU_{n+1}(a) \cdot \overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset \overline{U_n(a)} \cdot \overline{U}_e \cdot \overline{U}_e^{-1} \cdot \overline{U_n(b)}^{-1} \subset \overline{U_n(a)} \cdot (F(X) \setminus \Phi) \cdot \overline{U_n(b)}^{-1}$$

и

$$\overline{U_{n+1}(a)} \cdot \overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset F_{2n+2}(X).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} &(F(X) \setminus \Phi) \cap \overline{U_n(a)}^{-1} \cdot (F_{2n+2}(X) \setminus U) \cdot \overline{U_n(b)} = \varnothing \\ &\implies \overline{U_n(a)} \cdot (F(X) \setminus \Phi) \cdot \overline{U_n(b)}^{-1} \cap (F_{2n+2}(X) \setminus U) = \varnothing \\ &\implies \overline{U_n(a)} \cdot (F(X) \setminus \Phi) \cdot \overline{U_n(b)}^{-1} \cap F_{2n+2}(X) \subset U. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{U_{n+1}(a)} \cdot \overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset U \cap F_{2n+2}(X).$$

Положим

$$U(a) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i(a), \qquad U(b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i(b).$$

Имеем $U(a) \in \mathscr{U}$, $U(b) \in \mathscr{U}$ и $U(a) \cdot U(b)^{-1} \subset U$. ■

Теорема 16. *Для всякого вполне регулярного X и любого $n \in \mathbb{N}$ X^n замкнуто вложено в $F(X)$.*

Доказательство. Для компактного X $j_n\colon X^n \to F_n(X)$ — гомеоморфное вложение.

Для некомпактного X возьмём любой компакт $K \supset X$, рассмотрим $F(X)$ с топологией, индуцированной из $F(K) \supset F(X)$, и заметим, что $j_n\big((K)^n\big) \cap F(X) = j_n(X^n) \implies j_n(X^n)$ замкнуто в индуцированной топологии (она групповая и X вложено в $F(X)$ с этой топологией) $\implies$ тем более в более сильной топологии свободной группы. ■

Свободные топологические группы находят множество применений. Например, с их помощью можно доказать следующую теорему:

Теорема 17 (М.Г. Ткаченко). *Всякая σ-компактная топологическая группа обладает* свойством Суслина*, т.е. любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств в такой группе не более чем счётно.*

Схема доказательства: сначала доказательство сводится к случаю компактно порождённой группы, т.е. группы, порождённой (алгебраически) некоторым своим компактным подпространством: если $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, где K_n — компакты, и $\mathscr{U}$ — несчётное семейство непустых открытых множеств в G, то существует такой номер n, что компакт K_n (а значит, и его групповая оболочка в G, которая является компактно порождённой группой) пересекает несчётное число элементов $\mathscr{U}$.

Следовательно, если существует σ-компактная группа без свойства Суслина, то существует и компактно порождённая группа без этого свойства.

Топологическая группа G, порождённая своим компактным подпространством K, является непрерывным (и даже непрерывным гомоморфным) образом свободной топологической группы $F(K)$ — надо рассмотреть тождественное вложение $K \to G$ и его продолжение до непрерывного гомоморфизма $F(K) \to G$.

Значит, достаточно доказать теорему для свободных топологических групп компактов.

Наконец, всякий компакт K является непрерывным образом стоун-чеховской компактификации βD дискретного пространства D мощности $|K|$ (биекция $D \to K$ имеет непрерывное продолжение на βD), поэтому достаточно доказать, что плотная подгруппа $\langle D\rangle$ группы $F(\beta D)$ обладает свойством Суслина, а топология этой группы устроена понятным образом — её нетрудно описать в терминах конечных разбиений множества D, так что по сути доказательство сводится к рамсеевской комбинаторике.

Доказательство теоремы Ткаченко. Нам надо доказать, что в любом несчётном семействе непустых открытых подмножеств $F(\beta D)$ найдутся два пересекающихся. Семейство несчётно $\implies$ для некоторого n несчётное число его элементов содержит слова $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ длины ровно n, причём наборы степеней ε_i у букв в этих словах одинаковы. D всюду плотно в $\beta D \implies$ Если O открыто и $x_1^{\varepsilon_1}\dots x_n^{\varepsilon_n} \in O$, то найдутся окрестности V_i точек x_i такие, что $V_1^{\varepsilon_1}\dots V_n^{\varepsilon_n} \subset O$. D всюду плотно в $\beta D \implies \exists\, y_i \in V_i \cap D \implies y_1^{\varepsilon_1}\dots y_n^{\varepsilon_n} \in O$. Значит, несчётное число элементов данного семейства содержит слова длины n с буквами из D и одинаковыми наборами степеней букв. Мы проведём доказательство в простейшем случае $n = 1$, в общем случае идея та же.

Пусть $\{O_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ — семейство непустых открытых множеств в $F(\beta D)$, и пусть $x_\alpha \in O_\alpha \cap D$ для $\alpha < \omega_1$. Поскольку $x_\alpha \cdot x^{-1} \cdot x = x_\alpha \in O_\alpha$ для каждого $x \in \beta D$ и умножение непрерывно, у каждой точки $x \in \beta D$ есть открытая окрестность U_x в $F(\beta D)$ такая, что $x_\alpha \cdot U_x^{-1} \cdot U_x \subset O_\alpha$. Окрестности $U_x \cap X$, $x \in \beta D$, образуют открытое покрытие μ_α компакта βD. Аналогично, у каждой точки $x \in \beta D$ есть открытая окрестность V_x в $F(\beta D)$ такая, что $V_x \cdot V_x^{-1} \cdot x_\alpha \subset O_\alpha$. Окрестности $V_x \cap X$, $x \in \beta D$, образуют открытое покрытие ν_α компакта βD.

Пусть $\tilde{\gamma}_\alpha$ — конечное дизъюнктное покрытие компакта βD, вписанное в μ_α и в ν_α, и пусть $\gamma_\alpha = \{A \cap D : A \in \tilde{\gamma}_\alpha\}$. Это конечное разбиение множества D.

Имеем:

- набор точек $\{x_\alpha : \alpha \in \omega\} \subset D$;
- набор конечных разбиений γ_α, $\alpha < \omega_1$, множества D;
- для любых $\alpha < \omega_1$ и $W \in \gamma_\alpha$ $x_\alpha \cdot W^{-1} \cdot W \subset O_\alpha$ и $W \cdot W^{-1} \cdot x_\alpha \subset O_\alpha$.

Лемма 2. *Если $\alpha, \beta < \omega_1$ и $\mathrm{St}(x_\alpha, \gamma_\beta) \cap \mathrm{St}(x_\beta, \gamma_\alpha) \neq \varnothing$, то $O_\alpha \cap O_\beta \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $x_\alpha \in U \in \gamma_\beta$, $x_\beta \in V \in \gamma_\alpha$, $z \in U \cap V$. Тогда

$$x_\alpha \cdot z^{-1} \cdot x_\beta \in x_\alpha \cdot V^{-1} \cdot V \subset O_\alpha,$$
$$x_\alpha \cdot z^{-1} \cdot x_\beta \in U \cdot U^{-1} \cdot x_\beta \subset O_\beta.$$

■

Лемма 3 (комбинаторная лемма). *Пусть D — любое множество, $\{x_\iota : \iota \in I\}$ — его бесконечное подмножество, γ_ι, $\iota \in I$, — конечные разбиения множества D, $N \in \mathbb{N}$ и $|\gamma_\iota| = N$ для всех $\iota \in I$. Тогда существуют различные $i, j \in I$, для которых $\mathrm{St}(x_i, \gamma_j) \cap \mathrm{St}(x_j, \gamma_i) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $\gamma_i = \{A_{i,k} : k \le N\}$, $i \in I$. Зафиксируем любой линейный порядок $<$ на I. Для каждой пары $\{i,j\} \in [I]^2$, где $i < j$, положим $c(\{i,j\}) = (k,l)$, если $x_i \in A_{j,k}$ и $x_j \in A_{i,l}$. Получили раскраску

$$c\colon [I]^2 \to N^2.$$

Теорема Рамсея о раскрасках $\implies \exists\,(k,l) \in [I]^2$ и бесконечное $J \subset I$ такие, что $c(\{i,j\}) = (k,l)$ для любых $i,j \in J$. Пусть $i,j,p \in J$, $i < p < j$. Тогда

- $x_i \in A_{p,k}$ и $x_p \in A_{i,l}$, так как $c(\{i,p\}) = (k,l)$;
- $x_i \in A_{j,k}$ и $x_j \in A_{i,l}$, так как $c(\{i,j\}) = (k,l)$;
- $x_p \in A_{j,k}$ и $x_j \in A_{p,l}$, так как $c(\{p,j\}) = (k,l)$.

Имеем $x_p \in \mathrm{St}(x_i,\gamma_j) \cap \mathrm{St}(x_j,\gamma_i)$. ■

Из доказанной леммы немедленно вытекает теорема. ■

Универсальное свойство свободной топологической группы $F(X)$ можно сформулировать немного иначе:

для любого непрерывного отображения $f\colon X \to G$ в любую топологическую группу G существует единственный непрерывный гомоморфизм $\hat f\colon F(X) \to G$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, hook, "\mathrm{id}"] \arrow[dr, "f"] & \\ F(X) \arrow[r, "\hat f"'] & G \end{tikzcd}$$

(здесь через $\mathrm{id} = \mathrm{j}_1$ обозначено тождественное вложение X в $F(X)$).

Ограничиваясь группами из определённых классов (многообразий топологических групп), можно определять свободные топологические группы в этих классах (свободные абелевы топологические группы, свободные предкомпактные группы и пр.), а заменяя тождественное вложение id на фиксированное непрерывное отображение, можно определить свободную топологическую группу и для класса, скажем, хаусдорфовых пространств.

Кроме того, не обязательно сосредотачиваться именно на группах, можно рассматривать и другие тополого-алгебраические системы.

Конструкция свободной топологической группы даёт отображение $X \mapsto F(X)$ класса тихоновских пространств в класс топологических групп. На самом деле F является даже *функтором* (т.е. отображением категорий, которое переводит объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы согласованным образом) из категории тихоновских пространств и непрерывных отображений в категорию топологических групп и непрерывных гомоморфизмов.

Каждому тихоновскому пространству X функтор F ставит в соответствие его свободную топологическую группу, а каждому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств — непрерывный гомоморфизм $\hat f\colon F(X) \to F(Y)$ (который возникает при интерпретации f как отображения $X \to F(Y) \supset Y$).

Обобщения топологических групп

Определение 5. Полугруппа S с топологией, относительно которой полугрупповая операция $S \times S \to S$ непрерывна по первому (второму) аргументу, называется *право(лево)топологической полугруппой.*

Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция раздельно непрерывна, называется *полутопологической полугруппой.*

Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция непрерывна, называется *топологической полугруппой.*

Группа с топологией, относительно которой умножение непрерывно по первому (второму) аргументу, называется *право(лево)топологической группой.*

Группа с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно, называется *полутопологической группой.*

Группа с топологией, относительно которой умножение непрерывно, называется *паратопологической группой.*

Группа с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно и операция взятия обратного непрерывна, называется *квазитопологической группой.*

Теорема 18 (Эллиса–Нумакуры). *Во всякой (непустой) хаусдорфовой компактной правотопологической (или левотопологической) полугруппе S существует идемпотент, т.е. элемент $e \in S$ со свойством $e \cdot e = e$.*

Доказательство. Рассмотрим множество всех непустых замкнутых подполугрупп полугруппы S, упорядоченное обратно включению. В силу компактности это множество удовлетворяет условиям леммы Цорна. Значит, S содержит максимальную относительно порядка $\supset$, т.е. минимальную по включению, непустую замкнутую подполугруппу H. Возьмём любой элемент $e \in H$. Множество $H \cdot e = \{h \cdot e : h \in H\}$ тоже является подполугруппой, причём эта подполугруппа замкнута (из непрерывности умножения по первому аргументу вытекает компактность полугруппы $H \cdot e$, а из хаусдорфовости S — её замкнутость) и $H \cdot e \subset H$, так что из минимальности H следует, что $H \cdot e = H$, а значит, $e \in H \cdot e$. $\implies$ $X = \{h \in H : h \cdot e = e\} \neq \varnothing$. X — подполугруппа, и притом замкнутая: X — пересечение H с прообразом замкнутого множества $\{e\}$ при непрерывном отображении $s \mapsto s \cdot e$, $s \in S$). Следовательно, $X = H$, так что $e \in X$. ∎

Теорема 19 (Эллис). *Всякая локально компактная хаусдорфова полутопологическая группа является топологической группой.*

Определение 6. Отображение $f\colon X \times Y \to Z$ *сильно квазинепрерывно* в точке (x, y), если для любой окрестности W точки $f(x, y)$ в Z и любой окрестности U точки x в X существуют непустое открытое $U_1 \subset X$ и открытое $V \subset Y$ такие, что $U_1 \subset U$, $y \in V$ и $f(U_1 \times V) \subset W$.

Лемма 4. *Пусть X и Y — компакты, Z регулярно и $f\colon X \times Y \to Z$ раздельно непрерывно. Тогда f сильно квазинепрерывно в каждой точке.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 = f(x_0, y_0)$, U_0 — окрестность x_0 и W — окрестность z_0. Z регулярно $\implies$ существуют окрестности W_0 и W_1 точки z_0 такие, что $\overline{W}_0 \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W$.

Попытаемся построить по индукции последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек X и Y и убывающие последовательности $(U_n)_{n\geq 0}$ открытых подмножеств X и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открытых подмножеств Y со свойствами $x_n \in U_n$, $y_0, y_n \in V_n$ и $f(x_n, y_n) \in Z \setminus \overline{W}_1$.

Положим $U_1 = \{x \in U_0 : f(x, y_0) \in W_0\}$. f раздельно непрерывно $\implies$ U_1 открыто, и $x_0 \in U_1$. Положим $V_1 = Y$. Если $f(U_1 \times V_1) \not\subset W$, то выберем $x_1 \in U_1$ и $y_1 \in V_1$ так, что $f(x_1, y_1) \in Z \setminus \overline{W}_1$.

Шаг $n+1$: Положим $U'_{n+1} = \{x \in U_n : f(x, y_n) \in Z \setminus \overline{W}_1\}$. Множество U'_{n+1} открыто, и $x_n \in U'_{n+1}$. Пусть U_{n+1} — окрестность x_n, $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$. Положим $V'_{n+1} = \{y \in V_n : f(x_n, y) \in W_0\}$.

Это множество открыто и содержит y_n и y_0. Пусть V_{n+1} — окрестность множества $\{y_0, y_n\}$ такая, что $V_{n+1} \subset V'_{n+1}$ и $\overline{V}_{n+1} \subset V_n$. Если $f(U_{n+1} \times V_{n+1}) \not\subset W$, то выберем $x_{n+1} \in U_{n+1}$ и $y_{n+1} \in V_{n+1}$ так, что $f(x_{n+1}, y_{n+1}) \in Z \setminus \overline{W}$.

Предположим, что удалось построить бесконечные последовательности. Пусть x^* и y^* — предельные точки последовательностей (x_n) и (y_n). Имеем $x^* \in \bigcap \overline{U}_n = \bigcap U_n$ (так как $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$) $\implies f(x^*, y_n) \in Z \setminus \overline{W}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x^*, y^*) \in Z \setminus W$ (потому что f раздельно непрерывна).

С другой стороны, для $n > k$ по построению $f(x_k, y_n) \in W_0 \implies f(x_k, y^*) \in \overline{W}_0\ \forall k \in \mathbb{N}$. $\implies f(x^*, y^*) \in \overline{W}_0 \subset W$. ■

Лемма 5. *Пусть G — локально компактная хаусдорфова полутопологическая группа. Тогда у любых точек $x_0, y_0 \in G$ имеются открытые окрестности U и V, для которых замыкание $\overline{U \cdot V}$ компактно.*

Доказательство. Пусть U_0 и V_0 — открытые окрестности точек x_0 и y_0 с компактным замыканием. Сужение умножения на $\overline{U}_0 \times \overline{V}_0$ раздельно непрерывно. Сдвиги на фиксированные элементы в паратопологической группе — гомеоморфизмы, поэтому произведение $U_0 \cdot V_0 = \bigcup_{v \in V_0} U_0 \cdot v$ — открытая окрестность точки z_0. Пусть W_0 — открытая окрестность z_0 с компактным замыканием $\overline{W}_0 \subset U_0 \cdot V_0$.

По предыдущей лемме существуют непустое открытое множество $U_1 \subset U_0$ и открытая окрестность $V \subset V_0$ точки y такие, что $U_1 \cdot V \subset W_0$. Пусть $u \in U_1$. Положим $U = x_0 \cdot u^{-1} \cdot U_1$. Имеем $x_0 \in U$ и $U \cdot V \subset x_0 \cdot u^{-1} \cdot W_0$. Умножение раздельно непрерывно $\implies$ левый сдвиг на $x_0 \cdot u^{-1}$ — гомеоморфизм $\implies x_0 \cdot u^{-1} \cdot \overline{W}_0 = \overline{x_0 \cdot u^{-1} \cdot W_0}$ — компакт $\implies \overline{U \cdot V}$ — компакт. ■

Лемма 6. *Любая локально компактная хаусдорфова полутопологическая группа G является паратопологической группой.*

Доказательство. Пусть $x_0, y_0 \in G$, $z_0 = x_0 \cdot y_0$, W — окрестность z_0, W_1 — окрестность z_0 такая, что $\overline{W}_1 \subset W$. Для $U, V \subset G$ положим $F_{U,V} = (G \setminus W) \cap (\overline{U \cdot V})$. Пусть $\mathscr{F} = \{F_{U,V} : U, V$ — окрестности x_0 и $y_0\}$.

Достаточно показать: $\exists$ открытые $U \ni x_0$ и $V \ni y_0$, для которых $F_{U,V} = \varnothing$.

Предположим, что все элементы $\mathscr{F}$ непусты. По предыдущей лемме $\exists$ окрестности U_0 и V_0 точек x_0 и y_0, для которых $\overline{U_0 \cdot V_0}$ компактно. Семейство $\mathscr{F}' = \{F_{U,V} \in \mathscr{F} : U \subset U_0, V \subset V_0\}$ центрировано и состоит из замкнутых подмножеств компакта $\overline{U_0 \cdot V_0}$, причём $\bigcap \mathscr{F}' = \bigcap \mathscr{F} \implies \bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$.

Возьмём $z \in \bigcap \mathscr{F} \subset G \setminus \overline{W}_1$ и $U \in \tau_1$, для которого $U \cdot z \cap \overline{W}_1 = \varnothing$. Множество $U \cdot x_0$ открыто, $x_0 \in U \cdot x_0$. Умножение сильно квазинепрерывно $\implies \exists$ открытые U_1 и V такие, что $\varnothing \neq U_1 \subset U \cdot x_0$, $y_0 \in V$ и $U_1 \cdot V \subset W_1$. $\exists u \in U$, для которого $u \cdot x_0 \in U_1$, и $\exists$ открытое $U_2 \subset X$, для которого $x_0 \in U_2$ и $u \cdot U_2 \subset U_1$. Имеем $u \cdot U_2 \cdot V \subset U_1 \cdot V \subset W_1 \implies u \cdot \overline{U_2 \cdot V} \subset \overline{W}_1$.

Поскольку $z \in \overline{U_2 \cdot V}$, имеем $u \cdot z \in u \cdot \overline{U_2 \cdot V} \subset \overline{W}_1$ и $u \cdot z \in U \cdot z$. Значит, $\overline{W}_1 \cap U \cdot z \neq \varnothing$. Противоречие. ■

Лемма 7. *Любая компактная хаусдорфова паратопологическая группа G является топологической группой.*

Доказательство. G хаусдорфова $\implies X = \{(x, y) \in G \times G : x \cdot y = 1\}$ замкнуто в $G \times G$.

Пусть $F \subset G$ замкнуто. Положим $P = (G \times F) \cap X$. Это компакт. Имеем $(x, y) \in P \iff y \in F$ и $x = y^{-1}$. $\implies$ образ P при проекции $G \times G$ на первый сомножитель — это F^{-1}. Поскольку F компактно и проектирование непрерывно, F^{-1} — компакт $\implies$ замкнут в G. ■

Следствие 3. *Любая компактная хаусдорфова полутопологическая группа является топологической группой.*

Замечание 4. Из доказательства леммы видно, что *если G — хаусдорфова паратопологическая группа и $F \subset G$ — компакт, то F^{-1} — компакт.*

Лемма 8. *Пусть G — полутопологическая группа, $U_0, U_1, \dots$ — последовательность открытых окрестностей 1 и $(x_n)_{n\geq 0}$ — последовательность точек G, причем $x_n \in U_n$ для $n \geq 0$ и*

① *$U_{n+1}^2 \subset U_n$ и $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;*

② *последовательность $(g_k)_{k\in\mathbb{N}}$, где $g_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, имеет предельную точку g.*

Тогда существует $k \in \mathbb{N}$, для которого $x_{k+1}^{-1} \in U_0$.

Доказательство. Заметим: $U_{k+1} \cdot \ldots \cdot U_{k+m} \subset U_k$ (индукция по m: для $m = 1$ ясно, для $m > 1$ $U_{k+2} \cdot \ldots \cdot U_{k+m} \subset U_{k+1}$ по индуктивному предположению,
① $\implies U_{k+1} \cdot \ldots \cdot U_{k+m} \subset U_{k+1} \cdot U_{k+1} \subset U_k$).
$g \cdot U_1$ — окрестность $g \implies \exists k \in \mathbb{N}$: $g_k \in g \cdot U_1$. Имеем

$$x_{k+1}^{-1} = g_{k+1}^{-1} \cdot g_k \in g_{k+1}^{-1} \cdot g \cdot U_1,$$

и $g_{k+1}^{-1} \cdot g$ — предельная точка последовательности $(g_{k+1}^{-1} \cdot g_m)_{m\in\mathbb{N}}$.
Замечание в начале доказательства $\implies$ для всех $\forall m > k + 2$ имеем

$$g_{k+1}^{-1} \cdot g_m = x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_m \in U_{k+2} \cdot \ldots \cdot U_m \subset U_{k+1}.$$

Значит, $g_{k+1}^{-1} \cdot g \in \overline{U}_{k+1} \subset U_k$, откуда $x_{k+1}^{-1} \in g_{k+1}^{-1} \cdot g \cdot U_1 \subset U_k \cdot U_1 \subset U_0$. ■

Доказательство теоремы Эллиса. Достаточно проверить непрерывность операции взятия обратного в точке 1. Если она не непрерывна в 1, то $\exists U \in \tau_1$ такая, что $\forall V \in \tau_1$ имеем $V^{-1} \not\subset U$.
G регулярна, умножение непрерывно $\implies \exists$ открытые $U_0, U_1, \dots$, удовлетворяющие условию ① леммы.
G локально компактна $\implies$ можно считать, что $\overline{U}_0$ компактно и $\overline{U}_0 \subset U$.
Для каждого $n \geq 0$ $\exists x_n \in U_n$, $x_n^{-1} \notin U$.
Замечание в начале доказательства предыдущей леммы $\implies g_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \in U_0$.

$\overline{U}_0$ компактно $\implies (g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имеет предельную точку g.
Лемма $\implies \exists k \geq 0$: $x_{k+1}^{-1} \in U_0 \subset U$. Противоречие. ■

Теорема 20. *Регулярная полутопологическая группа G со счётной базой $\mathscr{B}$, которая является пространством второй категории Бэра, является паратопологической группой.*

Лемма 9. *Граница $\operatorname{Fr} F$ любого замкнутого подмножества F любого топологического пространства X нигде не плотна.*

Доказательство. Надо показать, что любая окрестность O_x любой точки $x \in X$ содержит непустое открытое множество $W \subset X \setminus \operatorname{Fr} F$. $\operatorname{Fr} F$ замкнуто $\implies$ если $x \notin \operatorname{Fr} F$, то это так.

Пусть $x \in \operatorname{Fr} F$. Множество F замкнуто $\implies \operatorname{Fr} F = F \setminus \mathrm{IntF} \implies$ любая окрестность O_x, которая не пересекает $X \setminus \operatorname{Fr} F$, должна содержаться в $\mathrm{Int(Fr\,F)} \subset \mathrm{IntF}$. Противоречие $\implies$ любая окрестность O_x пересекает открытое множество $X \setminus \operatorname{Fr} F \implies$ содержит непустое открытое множество $W \subset X \setminus \operatorname{Fr} F$. ■

Доказательство теоремы. Для $A, B \subset G$ положим $\langle A, B\rangle = \{x \in X : A \cdot x \subset B\} = \bigcap\limits_{a \in A} a^{-1} \cdot B$.

Положим $\mathscr{F} = \{\mathrm{Fr}\langle U, \overline{V}\rangle : U, V \in \mathscr{B}\}$, $X = G \setminus \bigcup \mathscr{F}$. Покажем, что $\forall\, x \in X$, $\forall\, g \in G$ умножение совместно непрерывно в точке (g, x).

Пусть $g \in G$, $x \in X$, $y = g \cdot x$ и U — любая окрестность y. G регулярна $\implies$ $\exists W \in \mathscr{B}$: $y \in W \subset \overline{W} \subset U$. Умножение раздельно непрерывно $\implies$ $\exists V \in \mathscr{B}$: $g \in V$ и $V \cdot x \subset W$. Имеем $x \in \langle V, \overline{W}\rangle$. Поскольку $x \notin \bigcup \mathscr{F}$, имеем $x \notin \mathrm{Fr}\langle V, \overline{W}\rangle$. $\implies$ $x \in \mathrm{Int}\langle \mathrm{V}, \overline{\mathrm{W}}\rangle = \mathrm{O}$. По построению $\forall w \in O$ имеем $V \cdot w \subset \overline{W} \subset U$. $\implies$ $V \cdot O \subset U$ (причём V и O открыты, $g \in V$ и $x \in O$).

Семейство $\mathscr{F}$ счётно и состоит из замкнутых нигде не плотных множеств, G второй категории $\implies$ $X \neq \varnothing$.

Зафиксируем точку $x \in G$ такую, что $\forall\, g \in G$ умножение непрерывно в (g, x).

Пусть $a, b \in G$, $c = a \cdot b$, $g = x \cdot b^{-1}$, W — любая окрестность c. Имеем $b = g^{-1} \cdot x$. Положим $y = a \cdot g^{-1}$. Тогда $y \cdot x = a \cdot g^{-1} \cdot g \cdot b = a \cdot b = c$. Умножение совместно непрерывно в (y, x) $\implies$ $\exists$ открытые U и V такие, что $y \in U$, $x \in V$, $U \cdot V \subset W$. Положим $U_1 = U \cdot g$ и $V_1 = g^{-1} \cdot V$. Множества U_1 и V_1 открыты в силу раздельной непрерывности умножения, $a = y \cdot g \in U \cdot g = U_1$, $b = g^{-1} \cdot x \in g^{-1} \cdot V = V_1$ и $U_1 \cdot V_1 = U \cdot g \cdot g^{-1} \cdot V = U \cdot V \subset W$.

Значит, умножение непрерывно в любой точке $(a, b) \in G \times G$. ■