Введение в топологию

Функции на пространствах, паракомпактность

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 9, 02.11.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Непрерывные отображения

Положим

$$
\begin{aligned}
o_{+}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},&\ \ (x,y)\mapsto x+y,\\
o_{*}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},&\ \ (x,y)\mapsto xy,\\
o_{\max}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},&\ \ (x,y)\mapsto \max(x,y),\\
o_{\min}\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R},&\ \ (x,y)\mapsto \min(x,y),\\
o_{-}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},&\ \ x\mapsto -x,\\
o_{i}\colon \mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R},&\ \ x\mapsto \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

Из математического анализа известно

Предложение

Функции o_+, o_*, $o_{\max}$, $o_{\min}$, o_-, o_i *непрерывны.*

Пусть X множество, f и g функции на X. Положим

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x)+g(x), \\
(fg)(x) &= f(x)g(x), \\
\max(f,g)(x) &= \max(f(x),g(x)), \\
\min(f,g)(x) &= \min(f(x),g(x)), \\
(-f)(x) &= -f(x).
\end{aligned}
$$

Если $f(x) \neq 0$ для всех x, то

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

Определим также $f-g = f+(-g)$ и $f/g = f\frac{1}{g}$ если $g(x) \neq 0$ для всех x.

Предложение

Топология евклидово пространства $\mathbb{R}^n$ *совпадает с топологией произведения.*

Доказательство.

Базу обеих топологий образуют множества вида $\prod_{i=1}^n (a_i, b_i)$. □

Предложение

Пусть X *пространство,* f *и* g *непрерывные функции на* X. *Тогда функции* $f+g$, fg, $f-g$, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$ *непрерывны. Если* $g(x) \neq 0$ *для всех* x, *то функции* $\frac{1}{g}$ *и* $\frac{f}{g}$ *непрерывны.*

Доказательство.

Из предложений 2 вытекает, что отображение

$$f \triangle g : X \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (f(x), f(y))$$

непрерывно.

Из предложений 1 и непрерывности композиции непрерывных функций и перечисленных ниже формул вытекает доказываемое утверждение.

$$\begin{aligned} (f+g) &= o_+ \circ (f \triangle g), \\ fg &= o_+ \circ (f \triangle g), \\ \max(f,g) &= o_{\max} \circ (f \triangle g), \\ \min(f,g) &= o_{\min} \circ (f \triangle g), \\ -f &= o_- \circ f, \\ \frac{1}{f} &= o_i \circ f. \end{aligned}$$

□

Пространство непрерывных функций

Пусть V линейное пространство над $\mathbb{R}$. Функция

$$\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}, \;\; v \mapsto v$$

называется *нормой* если $\|v+u\| \leqslant \|v\| + \|u\|$, $\|-v\| = \|v\| \geqslant 0$ и $\lambda v = |\lambda|\|v\|$ для $u, v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пара $(V, \cdot)$ называется *нормированным* пространством. Функция $d(v,u) = \|v-u\|$ определяет метрику на V, которая определяет топологию V.

Последовательность $(x_n)_n$ в метрическом пространстве (X, ρ) называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N > 0$, так что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для $n, m > N$. Другими словами, последовательность

$$d_n = \operatorname{diam}_\rho(\{x_n, x_{n+1}, ...\})$$

сходится к 0.

Метрическое пространство (X, ρ) называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность сходится.

Нормируемое пространство V называется *банаховым* пространством, если метрическое пространство V полно.

Пусть X множество. Множество ограниченных функций на X обозначим $B(X)$. Ясно, $B(X)$ – линейное пространство. Положим

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \,:\, x \in X\}$$

для $f \in B(X)$. Несложно проверяется, что $\|\cdot\|$ является нормой. Норма $\|\cdot\|$ называется sup-нормой. Сходимость функций в $(B(X), \|\cdot\|)$ называется *равномерной* сходимостью. Топология на $B(X)$, которая определяется с помощью sup-нормы, называется *топологией равномерной сходимости*.

Предложение

Пусть X множество. Нормируемое пространство $(B(X), \|\cdot\|)$ является баноховым.

Доказательство.

Пусть $(f_n)_n$ фундаментальная последовательность в $B(X)$. Пусть $x \in X$. Последовательность $(f_n(x))_n$ фундаментальна и поэтому сходится к некоторому $f(x)$.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим через N_ε такое число, что $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ для $n, m > N_\varepsilon$.

Лемма

$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$ для $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $n > N_\varepsilon$.

Доказательство.

Так $f(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$, то

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)|.$$

Так как $|f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \|f_m - f_n\| < \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon$, то $|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon$. $\square$

Покажем, что f ограниченная функция. Если $n > N_1$, то из леммы вытекает, что $\|f - f_n\| \leqslant 1$ и, следовательно $\|f\| \leqslant \|f_n\| + 1 < \infty$.

Из леммы вытекает, что $\|f - f_n\| \leqslant \varepsilon$ для $n > N_\varepsilon$. Следовательно, последовательность $(f_n)_n$ сходится к f. $\square$

Пусть X топологическое пространство.

Обозначим через $C^*(X)$ все непрерывные ограниченные функции на X. Из предложения **??** вытекает, что $C^*(X)$ является линейным пространством. Будем рассматривать на $C^*(X)$ sup-норму $\|\cdot\|$.

Theorem

Пусть X топологическое пространство. Нормируемое пространство $(C^*(X), \|\cdot\|)$ является банаховым.

Доказательство.

Пусть $(f_n)_n$ фундаментальная последовательность в $C^*(X)$. Из предложения 4 вытекает, что последовательность $(f_n)_n$ равномерно сходится к некоторой ограниченной функции f.

Осталось показать, что функция f непрерывна. Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $(f_n)_n$ сходится к f, то существует n, такое что $\|f - f_n\|| < \frac{\varepsilon}{3}$. Так как функция f_n непрерывна, то существует окрестность U точки x, такая что $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех $y \in U$. Тогда

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(y) + f_n(y) - f(y)| \\
&\leqslant |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

для всех $y \in U$. □

Предложение

Пусть $(V, \|\cdot\|)$ *банохово пространство,* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *сходящийся ряд с положительными членами,* $v_n \in V$, $\|v_n\| \leqslant c_n$ *для* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходится в* V.

Доказательство.

Обозначим $u_n = \sum_{i=1}^{n} v_n$ и $s_n = \sum_{i=1}^{n} c_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(s_n)_n$ является фундаментальной, поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ существует $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, такое что $|s_n - s_m| < \varepsilon$ для $n, m > N_\varepsilon$.

Тогда

$$\|u_n - u_m\| = \|\sum_{i=n}^{m} v_n\| \leqslant \sum_{i=n}^{m} \|v_i\| \leqslant \sum_{i=n}^{m} c_i = s_m - s_n < \varepsilon$$

для $m > n > N_\varepsilon$.

Следовательно, последовательность $(u_n)_n$ является фундаментальной и сходится к некоторой точке $u \in V$. Тогда $u = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$. □

Продолжение непрерывных функций

Theorem (теорема Брауэра-Титце-Урысона)

Пусть X нормальное топологическое пространство, F замкнутое подмножество X и f непрерывная функция на f непрерывная функция на X. Тогда f продолжается до непрерывной функции g на X (т.е. $f = g|_F$).

Кроме того,

$$a = \inf_{x \in F} f(x) = \inf_{x \in X} g(x), \qquad b = \sup_{x \in F} f(x) = \sup_{x \in X} g(x),$$

если f не достигает a, то g не достигает a и если f не достигает b, то g не достигает b.

Доказательство, I

Случай $a = b$, то есть f константа, тривиален. Далее $a < b$.

Рассмотрим случай $a = 0$ и $b = 1$. Построим индукцией по n последовательности непрерывных функций $(f_n)_n$ на F и $(h_n)_n$ на X, так что бы выполнялись условия:

(A_1) $f = f_1$;

(B_n) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant (2/3)^{n-1}$ для $x \in F$;

(C_n) $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ для $x \in X$;

(D_n) $f_{n+1}(x) = f_n(x) - h_n(x)$ для $x \in F$.

Доказательство, II, построение f_n и g_n

Положим $f_1 = f$. Предположим, что непрерывная функция f_n на F построена и для нее выполняются условие (B_n). Определим непрерывную функцию h_n на X таким образом, что для h_n выполняется условие (C_n) и для функции $f_{n+1} = f_n - h_n|_F$ выполняется условие

(B_{n+1}) $0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant (2/3)^n$ для $x \in F$.

Отметим, из определения f_{n+1} вытекает (D_n).
Пусть

$$A = f_n^{-1}([0, \tfrac{1}{3}\,(2/3)^{n-1}]),$$
$$B = f_n^{-1}([\tfrac{2}{3}\,(2/3)^{n-1}\,, (2/3)^{n-1}]).$$

Из леммы Урысона (теорема **??**) вытекает, что существует непрерывная функция $h : X \to [0,1]$, для которой $h(A) = \{0\}$ и $h(B) = \{1\}$. Положим $h_n = \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}h$.

Доказательство, III, проверка условий (A)–(D)

Условие (C_n) выполняется. Положим $C = F \setminus (A \cup B)$. Семейство $\{A, B, C\}$ является разбиением множества F.

Поверим условие (B_{n+1}). Пусть $x \in F$. Рассмотрим три случая.

Случай $x \in A$. Тогда $h_n(x) = 0$ и $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{3}\,(2/3)^{n-1}$. Следовательно $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ и

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \frac{1}{3}\,(2/3)^{n-1} \leqslant (2/3)^n\,.$$

Случай $x \in B$. Тогда $h_n(x) = \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ и $\frac{2}{3}\,(2/3)^{n-1} \leqslant f_n(x) \leqslant (2/3)^{n-1}$. Следовательно $f_{n+1}(x) = f_n(x) - \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ и

$$0 \leqslant \frac{1}{3}\,(2/3)^{n-1} \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant (1 - \tfrac{1}{3})(2/3)^{n-1} = (2/3)^n\,.$$

Случай $x \in C$. Тогда $0 \leqslant h_n(x) \leqslant \frac{1}{3}(2/3)^{n-1}$ и $\frac{1}{3}\,(2/3)^{n-1} < f_n(x) \leqslant \frac{2}{3}\,(2/3)^{n-1}$. Следовательно

$$0 \leqslant f_{n+1}(x) \leqslant \frac{2}{3}\,(2/3)^{n-1} = (2/3)^n\,.$$

Доказательство, IV, построение продолжения

Последовательности функций $(f_n)_n$ и $(h_n)_n$, для которых выполняются условия (A_1), (B_n), (C_n) и (D_n), построены.

Из (A_1) и (D_n) вытекает, что $f = f_1$ и $f_i = h_i|_F + f_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно,

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_i \Big|_F + f_{n+1}. \qquad (1)$$

Из (B_n) и (C_n) вытекает, что $\|h_n\| \leqslant (2/3)^n$ и $\|f_n\| \leqslant (2/3)^n$, где $\|\cdot\|$ sup-норма на $C^*(X)$ и $C^*(F)$. Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(2/3)^n$ сходится, то из теоремы **??** и предложения **??** вытекает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} h_n$ сходится в $C_*(X)$ в топологии равномерной сходимости.

Положим $g_1 = \sum_{i=1}^{\infty} h_n$.

Функция g_1 непрерывна. Так как $\lim_{n\to\infty} \|f_n\| = 0$, то из равенства (1) вытекает, что $g_1|_F = f$.

Доказательство, IV, уточняем inf и sup у продолжения

Положим
$$g_2 = \min(1, \max(0, g_1)).$$
Тогда $g_2(X) \subset [0,1]$, $g_2|_F = f$ и из предложения 3 вытекает, что g_2 непрерывно.

Если f достигает своего инфинума (то есть $f(x) = 0$ для некоторого $x \in F$), то положим $g_3 = g_2$. Определим g_3 в противном случае. Положим $Q = g_2^{-1}((-\infty, 0])$. Тогда Q замкнуто и $Q \cap F = \varnothing$. Из леммы Урысона (теорема **??**) вытекает, что существует непрерывная функция $q : X \to [0,1]$, для которой $q(Q) = \{0\}$ и $q(F) = \{1\}$. Положим $g_3 = qg_2$. Тогда g_3 непрерывна, $g_3|_F = f$ и $g(X) \subset (0,1]$.

Если f достигает своего супремума (то есть $f(x) = 1$ для некоторого $x \in F$), то положим $g = g_3$. Определим g в противном случае. Положим $Q = g_3^{-1}([1, +\infty))$. Тогда Q замкнуто и $Q \cap F = \varnothing$. Из леммы Урысона (теорема **??**) вытекает, что существует непрерывная функция $q : X \to [0,1]$, для которой $q(Q) = \{0\}$ и $q(F) = \{1\}$. Положим $g = qg_3$. Тогда g непрерывна, $g|_F = f$ и $g(X) \subset [0,1)$.

По построению, функция g является искомой.

Доказательство, IV, общий случай

Рассмотрим случай $-\infty < a < b < +\infty$. Положим $\tilde{f} = (f - a)/(b - a)$. Тогда $\inf \tilde{f} = 0$ и $\sup \tilde{f} = 1$. Из случая $a = 0$ и $b = 1$ вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{g}$ на X, для которой $\tilde{f} = \tilde{g}|_F$, $\inf \tilde{g} = 0$ и $\sup \tilde{g} = 1$, кроме того, если $\tilde{f}$ не достигает 0, то $\tilde{g}$ не достигает 0 и если $\tilde{f}$ не достигает 1, то $\tilde{g}$ не достигает 1. Положим $g = a + (b - a)\tilde{g}$. Функция g является искомой.

Рассмотрим общий случай. Из математического анализа известно, что функции $\operatorname{tg}\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ и $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ возрастающие, непрерывны и взаимно обратные. Положим $\tilde{f} = \operatorname{arctg} \circ f$. Тогда $\tilde{f}$ непрерывная ограниченная функция. Из случая $-\infty < a < b < +\infty$ вытекает, что существует непрерывная функция $\tilde{g}$ на X, для которой $\tilde{f} = \tilde{g}|_F$, $\inf \tilde{g} = \inf \tilde{f}$ и $\sup \tilde{g} = \sup \tilde{f}$, кроме того, если $\tilde{f}$ не достигает $\inf \tilde{f}$, то $\tilde{g}$ не достигает $\inf \tilde{f}$ и если $\tilde{f}$ не достигает $\sup \tilde{f}$, то $\tilde{g}$ не достигает $\sup \tilde{f}$. Тогда $\tilde{g}(X) \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Положим $g = \operatorname{tg} \circ \tilde{g}$. Функция g является искомой.

Теорема Брауэра-Титце-Урысона доказана.

Паракомпактные пространства

Семейство множеств λ пространства X называется *локально конечным*, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая что $|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \varnothing\}| < \omega$.

Пусть γ семейство подмножеств пространства X. Семейство λ *вписано* в семейство γ, если для любого $M \in \lambda$ существует $L \in \gamma$, такое что $M \subset L$.

Пространство X называется *паракомпактным* пространством, если для любого открытого покрытия γ пространства X существует локально конечное покрытие λ, такое что λ вписано в покрытие γ.

Конечное семейство является локально конечным, так что верно следующие утверждение.

Предложение

Компактные пространства паракомпактны.

Это утверждение можно усилить следующим образом.

Предложение

Пусть X паракомпактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ паракомпактное пространство.

Доказательство.

Пусть γ открытое покрытие пространства $X \times Y$. Пусть $\gamma^{<\omega}$ множество конечных подмножеств множества γ. В силу леммы **??**, существует семейство $\mathcal{U} = \{U_\mu \,:\, \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ подмножеств X, так что выполняются условия:

1. семейство $\mathcal{U}$ является открытым покрытием пространства X;
2. $U_\mu \times Y \subset \bigcup \mu$ для $\mu \in \mathcal{M}$.

Так как X паракомпактное пространство, то существует локально конечное покрытие $\tilde{\lambda}$ пространства X, такое что $\tilde{\lambda}$ вписано в покрытие $\mathcal{U}$. Так как $\tilde{\lambda}$ вписано в $\mathcal{U}$, то для каждого $V \in \tilde{\lambda}$ существует $\mu_V \in \gamma^{<\omega}$, такое что $V \subset U_{\mu_V}$.

Положим

$$\lambda = \{(V \times Y) \cap U \,:\, V \in \tilde{\gamma},\ U \in \mu_V\}.$$

Так как $\tilde{\lambda}$ локально конечно и μ_V конечно для $V \in \tilde{\lambda}$, то семейство λ локально конечно. Очевидно, λ вписано в γ и состоит из открытых множеств. Так как $\tilde{\lambda}$ покрытие X, $V \subset U_{\mu_V}$ и, в силу условия (2), $U_{\mu_V} \times Y \subset \bigcup \mu_V$ для $V \in \tilde{\lambda}$ то λ покрытие $X \times Y$. □

Предложение

Замкнутое подпространство паракомпактного пространства паракомпактно.

Доказательство.

Пусть X паракомпактное пространство и $F \subset X$ замкнутое множества. Пусть γ открытое в топологии подпространства покрытие пространства F.

Положим $\tilde{\gamma} = \{U \cap (X \setminus F) : U \in \gamma\}$. Тогда $\tilde{\gamma}$ открытое покрытие X. Так как X паракомпактно, то существует локально конечное покрытие $\tilde{\lambda}$ пространства X, вписанное в покрытие $\tilde{\gamma}$.

Положим $\lambda = \{V \cap F : V \in \tilde{\lambda}\}$. Семейство λ является локально конечным открытым в F покрытием пространства F, вписанным в γ. □

Lemma

Пусть λ *локально конечное семейство в пространстве* X. *Тогда*

$$\bigcup_{U\in\lambda}\overline{U} = \overline{\bigcup_{U\in\lambda} U}.$$

Доказательство.

Включение $\bigcup_{U\in\lambda}\overline{U} \subset \overline{\bigcup\lambda}$ очевидно.

Докажем обратное включение. Пусть $x \in \overline{\bigcup\lambda}$. Так как λ локально конечно, то семейство $\mu = \{U \in \gamma\ :\ U \cap V \neq \varnothing\}$ конечно для некоторой окрестности V точки x. Тогда $x \in \overline{\bigcup\mu}$. Так как μ конечно, то $\overline{\bigcup\mu} = \bigcup_{U\in\mu}\overline{U}$. Тогда $x \in \overline{U}$ для некоторого $U \in \mu$ и, следовательно, $x \in \bigcup_{U\in\lambda}\overline{U}$. □

Lemma

Пусть X паракомпактное пространство, $P, F \subset X$ замкнутые непересекающиеся множества. Предположим, что для каждого $y \in F$ существует окрестность $U_y \supset P$ множества P и окрестность V_y точки y, такие что $U_y \cap V_y = \varnothing$. Тогда существуют непересекающиеся окрестности множеств P и F.

Доказательство.

Пусть λ есть локально конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в открытое покрытие $\gamma = \{X \setminus F\} \cap \{V_y \ : \ x \in F\}$. Положим $\lambda_F = \{W \in \lambda \ : \ W \cap F \neq \varnothing\}$ и $V = \bigcap \lambda_F$. Так как λ покрытие, то $F \subset V$.

Покажем, что $\overline{V} \cap P = \varnothing$. Так как семейство λ_F локально конечно, то, в силу леммы 4, $\overline{V} = \bigcup_{W \in \lambda_F} \overline{W}$. Покажем, что если $W \in \lambda_F$, то $\overline{W} \cap P = \varnothing$. Так как λ вписано в γ и $W \cap F \neq \varnothing$, то $W \subset V_y$ для некоторого $y \in F$. Тогда $\overline{W} \subset X \setminus V_y \subset X \setminus P$. Следовательно, $\overline{W} \cap P = \varnothing$.

Положим $U = X \setminus \overline{V}$. Тогда $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Theorem

Паракомпактное хаусдорфовое пространство нормально.

Доказательство.

Пусть X паракомпактное хаусдорфовое пространство.

Покажем, что X регулярное пространство. Пусть $x \in X$, $F \subset X$ замкнутое множество и $x \notin F$. Надо найти у x и F непересекающиеся окрестности. Положим $P = \overline{x}$. Так как X хаусдорфово пространство, то X является T_1-пространством и множество P замкнуто в X. Так как X хаусдорфово пространство, то для каждого $y \in F$ существуют открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y, соответственно. Из леммы 4 вытекает, что существуют непересекающиеся окрестности множеств $P = \{x\}$ и F.

Покажем, что X нормальное пространство. Пусть $P, F \subset X$ замкнутые непересекающиеся множества. Надо найти у P и F непересекающиеся окрестности. Так как X регулярное пространство, то для каждого $y \in F$ существуют открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y множества P и точки y. Из леммы 4 вытекает, что существуют непересекающиеся окрестности у множеств P и F. $\square$

Theorem

Линделефово пространство паракомпактно.

Доказательство.

Пусть X линделефово пространство. Пусть γ открытое покрытие X. Так как X регулярно, то

$$\gamma_1 = \{V \subset X \ : V \text{ открыто в } X \text{ и } \overline{V} \subset U \text{ для некоторого } U \in \gamma\}$$

есть открытое покрытие, вписанное в γ. Так как X финально компактно, то существует счетное подпокрытие $\gamma_2 \subset \gamma_1$ покрытия γ_1. Занумеруем элементы γ_2: $\gamma_2 = \{V_n \ : n \in \mathbb{N}\}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Так как γ_2 вписано в γ, то существует $U_n \in \gamma$, такой что $\overline{V_n} \subset U_n$. Положим

$$W_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \overline{V_n}.$$

Семейство $\lambda = \{W_n \ : n \in \mathbb{N}\}$ состоит из открытых множеств и вписано в γ.

Покажем, что λ покрытие X. Пусть $x \in X$. Положим $m = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ x \in U_n\}$. Так как $\overline{V_i} \subset U_i$ для $i < m$, то $x \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} \overline{V_i}$. Так как $x \in U_m$, то $x \in W_m$.

Покажем, что λ локально конечно. Пусть $x \in X$. Положим $k = \min\{n \in \mathbb{N} \ : \ x \in V_n\}$. Тогда V_k окрестность точки x и $x \notin W_n$ для $n > k$. Следовательно, $|\{W \in \lambda \ : \ W \cap V_k \neq \varnothing\}| \leqslant k < \omega$. $\square$

Разбиение единицы

Пусть X пространство и f функция на X. Множество

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X \ : \ f(x) \neq 0\}$$

называется *носителем* функции f.

Пусть $\{f_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ семейство непрерывных функций на пространстве X. Если семейство $\{\operatorname{supp} f_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ локально конечно, то определим сумму

$$\sum_{\alpha \in A} f_\lambda(x) = \sum \{f_\alpha \ : \ \alpha \in A,\ f_\alpha \neq 0\}.$$

Правая часть этого равенства является конечной суммой и поэтому определена корректна.

Утверждение

Если семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ *локально конечно, то сумма* $\sum_{\alpha \in A} f_\lambda$ *непрерывна.*

Доказательство.

Пусть $x \in X$. Так как $\{\operatorname{supp} f_\alpha \ : \ \alpha \in A\}$ локально конечно, то $B = \{\alpha \in A \ : \ \operatorname{supp} f_\alpha \cap U \neq \varnothing\}$ конечно для некоторой открытой окрестности точки x. Положим $f = \sum_{\alpha \in A} f_\lambda$ и $g = \sum_{\alpha \in B} f_\lambda$. Тогда $f|_U = g|_U$. Так как g непрерывно то f непрерывно в точке x. $\square$

Семейство непрерывных функций $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ назовем *разбиением единицы*, если семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно, $f_\alpha \geqslant 0$ для $\alpha \in A$ и $\sum_{\alpha \in A} f_\lambda \equiv 1$.

Разбиение единицы *подчинено покрытию* γ пространства X, если семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in A\}$ вписано в покрытие γ.

Семейство носителей $\{\operatorname{supp} f_\alpha : \alpha \in A\}$ является покрытием для разбиения единицы. Ясно, $f_\alpha(X) \subset [0,1]$ и $\operatorname{supp} f_\alpha = f^{-1}((0,1])$ для функций из разбиения единицы.

Семейство множеств $\{S_\alpha : \alpha \in A\}$ *комбинаторно вписано* в семейство $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$, если $S_\alpha \subset T_\alpha$ для $\alpha \in A$.

Покрытие пространства, состоящее из замкнутых множеств, будем называть *замкнутым покрытием*.

Предложение (лемма об ужатии)

В конечное открытое покрытие $\{U_i : i = 1, 2, ..., n\}$ нормального пространства X можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1, 2, ..., n\}$.

Доказательство.

Докажем индукцией по n. Если $n = 1$, от $U_1 = X$ и $F_1 = X$.

Пусть $n > 1$ и утверждение доказано для $n - 1$.

Пусть $F = X \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$. Пусть U есть окрестность F, такая что $\overline{U} \subset U_n$. Положим $Y = X \setminus U$. Так как Y замкнуто в X, то Y нормальное пространство (предложение **??**).

Семейство $\{U_i \cap Y : i = 1, 2, ..., n - 1\}$ является открытым в Y покрытием нормального пространства Y. Из предположения индукции вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1, 2, ..., n - 1\}$ пространства Y, комбинаторно вписанное в $\{U_i \cap Y : i = 1, 2, ..., n - 1\}$. Положим $F_n = \overline{U}$. Семейство $\{F_i : i = 1, 2, ..., n\}$ является искомым. $\square$

Theorem

Если X нормальное пространство, то для любого конечного отрытого покрытия γ существует разбиение единицы, подчиненное покрытию γ.

Доказательство.

Пусть $\gamma = \{U_i : i = 1, 2, ..., n\}$. Из леммы об ужатии (предложение 7) вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_i : i = 1, 2, ..., n\}$, комбинаторно вписанное в γ.

Из леммы Урысона (теорема **??**) вытекает, что, для $i = 1, 2, ..., n$, существует непрерывная функция $g_i : X \to [0, 1]$, такая что $g_i(F_i) = \{1\}$ и $g_i(X \setminus F_i) = \{0\}$. Положим $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Так как $\{F_i : i = 1, 2, ..., n\}$ покрытие, то $g \geqslant 1 > 0$.

Положим $f_i = g_i/g$. Разбиение единицы $\{f_i : i = 1, 2, ..., n\}$ подчиненно покрытию γ. □

Предложение (лемма об ужатии для паракомпактных пространств)

В открытое покрытие $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ *хаусдорфового паракомпактного пространства* X *можно комбинаторно вписать замкнутое покрытие* $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$.

Доказательство.

Положим

$$\lambda = \{V \subset X : V \text{ открыто в } X \text{ и } \overline{V} \subset U_\alpha \text{ для некоторого } \alpha \in A\}.$$

Так как X нормально (теорема 5), то семейство λ является открытым покрытием X. Так как X паракромпактно, то существует открытое локально конечное покрытие λ, вписанное в γ.

Положим $\lambda_\alpha = \{U \in \lambda : \overline{U} \subset U_\alpha\}$ и $F_\alpha = \bigcup\{\overline{U} : U \in \lambda_\alpha\} \subset U_\alpha$ для $\alpha \in A$. Так как λ вписано в γ, то $\bigcup_{\alpha \in A} \lambda_\alpha = \lambda$. Следовательно, $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ покрытие X, комбинаторно вписанное в $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Так как семейство λ_α локально конечно, то, в силу леммы 4, $F_\alpha = \overline{\bigcup \lambda_\alpha}$ и, следовательно, F_α замкнуто для $\alpha \in A$. □

Theorem

Если X хаусдорфово паракомпактное пространство, то для любого отрытого покрытия γ существует разбиение единицы, подчиненное покрытию γ.

Доказательство.

Так как X паракромпактно, то существует открытое локально конечное покрытие $\lambda = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, вписанное в γ. Из леммы об ужатии для паракомпактных пространств (предложение 8) вытекает, что существует замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$, комбинаторно вписанное в λ.

Из леммы Урысона (теорема **??**) вытекает, что, для $\alpha \in A$, существует непрерывная функция $g_\alpha : X \to [0,1]$, такая что $g_\alpha(F_\alpha) = \{1\}$ и $g_\alpha(X \setminus F_\alpha) = \{0\}$. Отметим, $\operatorname{supp} g_\alpha \subset U_\alpha$ и, следовательно, семейство носителей $\{\operatorname{supp} g_\alpha : \alpha \in A\}$ локально конечно.

Из утверждения 1 вытекает, что функция $g = \sum_{i=1}^{n} g_i$ непрерывна. Так как $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ покрытие, то $g \geqslant 1 > 0$. Положим $f_\alpha = g_\alpha / g$. Разбиение единицы $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ подчиненно покрытию γ. □

Метрические и метризуемые пространства

Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Для $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ обозначим

$$B_\rho(A, \varepsilon) = \bigcup_{x \in A} B_\rho(x, \varepsilon).$$

Семейство подмножеств λ пространства X называется *дискретным*, то если для каждого $x \in X$ существует окрестность U точки x, такая что

$$|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \varnothing\}| \leqslant 1.$$

Ясно, дискретное семейство является локально конечным.

Theorem (теорема Стоуна)

Метризуемое пространство паракомпактно.

что строим

Пусть X есть метризуемое пространство и ρ метрика на X, которая определяет топологию X. Пусть γ открытое покрытие X и $\tau = |\gamma|$. Занумеруем γ ординалами до τ: $\gamma = \{U_\alpha \ : \ \alpha < \tau\}$.

Для $\alpha < \tau$ и $n \in \mathbb{N}$ положим

$$F_{\alpha,n} = \{x \in U_\alpha \ : \ B_\rho(x, \tfrac{3}{n}) \subset U_\alpha\}. \tag{2}$$

Для каждых $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha < \tau$ построим

$$C_{\alpha,n} \subset U_{\alpha,n} \subset W_{\alpha,n} \subset U_\alpha, \tag{3}$$

так чтобы выполнялись условия:

(C) $C_{\alpha,n} = (F_{\alpha,n} \setminus U_n) \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} W_{\beta,n}$;

(U) $U_{\alpha,n} = B_\rho(C_{\alpha,n}, \frac{1}{n})$;

(W) $W_{\alpha,n} = B_\rho(C_{\alpha,n}, \frac{3}{n})$;

где

$$U_n = \bigcup \{U_{i,\alpha} \ : \ i < n, \ \alpha < \tau\}. \tag{4}$$

построение по индукции

Индукцией по $n \in \mathbb{N}$ построим последовательность семейств

$$\Lambda_n = \{C_{\alpha,n}, U_{\alpha,n}, W_{\alpha,n} \,:\, \alpha < \tau\},\ n \in \mathbb{N},$$

каждое семейство Λ_n построим по трансфинитной индукцией по $\alpha < \tau$.

Предположим, что для $i < n$ семейства Λ_i построены. Определим U_n по формуле (4). Пусть $\alpha < \tau$ и для $\beta < \alpha$ построены $C_{\beta,n}$, $U_{\beta,n}$ и $W_{\beta,n}$. Определим $C_{\alpha,n}$ формулой (C), $U_{\alpha,n}$ формулой (U), $W_{\alpha,n}$ формулой (W).

Построение завершено.

Так как $C_{\alpha,n} \subset F_{\alpha,n}$, то из формул (2), (U) и (W) вытекает включение (3).

Для $n \in \mathbb{N}$, положим $\lambda_n = \{U_{\alpha,n} : \alpha < \tau\}$. Положим $\lambda = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n$.

Лемма

Семейство λ состоит из открытых множеств и вписано в γ.

Доказательство.

Пусть $U_{\alpha,n} \in \lambda$. Из (U) вытекает, что $U_{\alpha,n}$ открыто. Из (3) вытекает $U_{\alpha,n} \subset U_\alpha \in \gamma$. $\square$

Лемма

λ покрытие X.

Доказательство.

Пусть $x \in X$. Так как γ покрытие X, то $A = \{\beta < \tau : x \in U_\beta\} \neq \varnothing$. Положим $\alpha = \min A$.

Возьмем $n \in \mathbb{N}$ такое что $B_\rho(x, \frac{3}{n}) \subset U_\alpha$. Тогда $x \in F_{\alpha,n}$.

Если $x \in U_n$, то $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup \lambda$.

Рассмотрим случай $x \notin U_n$. Так как $x \notin U_\beta \supset W_{\beta,n}$ для $\beta < \alpha$, то $x \notin \bigcup_{\beta<\alpha} W_{\beta,n}$. Тогда

$$x \in C_{\alpha,n} \subset U_{\alpha,n} \subset \bigcup \lambda.$$

В любом случае, $x \in \bigcup \lambda$. □

Лемма

λ_n дискретно для $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Пусть $x \in X$.

Если $\beta < \alpha < \tau$, то из (C) вытекает, что $W_{\beta,n} \cap C_{\alpha,n} = \varnothing$. Из (W) вытекает $\rho(C_{\beta,n}, C_{\alpha,n}) \geqslant \frac{3}{n}$.

Из (U) вытекает, что $\rho(U_{\beta,n}, U_{\alpha,n}) \geqslant \frac{1}{n}$. Отсюда вытекает, что

$$|\{\alpha < \tau \,:\, U_{\alpha,n} \cap B_\rho(x, \tfrac{1}{2n})\}| \leqslant 1.$$

$\square$

Лемма

Для $x \in X$ существует $m \in \mathbb{N}$ и окрестность W точки x, такое что $W \cap \bigcup \lambda_n = \varnothing$ для $n > m$.

Доказательство.

Так как λ покрытие X, то $x \in U_{\kappa,k}$ для некоторых $\kappa < \tau$ и $k \in \mathbb{N}$. Существует $m \geqslant k$, такое что $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \subset U_{\kappa,k}$. Положим $W = B_\rho(x, \frac{1}{m})$.

Покажем, что $W \cap \bigcup \lambda_n = \varnothing$ для $n > m$. Достаточно показать, что $W \cap U_{\alpha,n} = \varnothing$ для $\alpha < \tau$. Так как $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \subset U_{\kappa,k} \subset U_n$ и, в силу (C), $C_{\alpha,n} \cap U_n = \varnothing$, то $B_\rho(x, \frac{3}{m}) \cap C_{\alpha,n} = \varnothing$. Следовательно, $\rho(W, C_{\alpha,n}) \geqslant \frac{2}{m}$. Так как $\frac{1}{n} < \frac{1}{m}$, то из (C) вытекает $\rho(W, U_{\alpha,n}) \geqslant \frac{1}{m}$. Следовательно, $W \cap U_{\alpha,n} = \varnothing$. $\square$

Лемма

λ локально конечно.

Доказательство.

Пусть $x \in X$. Из леммы 4 вытекает, что существует $m \in \mathbb{N}$ и окрестность W точки x, такое что $W \cap \bigcup \lambda_n = \varnothing$ для $n > m$. Для $i \leqslant m$, в силу леммы 3, семейство λ_i дискретно. Следовательно, существует окрестность U_i точки x, такая что $|\{V \in \lambda_i : V \cap U_i \neq \varnothing\}| \leqslant 1$. Положим

$$U = W \cap \bigcap_{i=1}^{m} U_i.$$

Тогда

$$|\{V \in \lambda : V \cap U \neq \varnothing\}| \leqslant m < \omega.$$

□

завершение доказательтва

Из лемм 1, 2 и 5 вытекает, что λ есть локально конечное открытое покрытие пространства X, вписанное в покрытие γ.

Конец