Введение в топологию

Конструкции пространств

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 8, 28.10.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Фактор топология и факторные отображения

Пусть X множество, Y пространство, $f\colon Y \to X$ сюрьективное отображение. Топологию $\mathcal{T}_F$ на множестве X назовем *фактортопологией* относительно отображения f, если $\mathcal{T}_F$ есть сильнейшая топология на X, относительно которой отображение f непрерывна.

Другими словами, $\mathcal{T}_F$ есть финальная топология относительно семейства отображений $\{f\}$. Из утверждения **??** вытекает следующее утверждение.

Утверждение

$$\mathcal{T}_F = \{U \subset X \ :\ f^{-1}(U) \text{ \textit{открыто в} } Y\}.$$

Это утверждение эквивалентно следующему утверждению.

Пусть $\sim$ есть отношение эквивалентности на Y. Обозначим $[y]_\sim = \{x \in Y \,:\, x \sim y\}$ — класс эквивалентности, содержащий $y \in Y$. Множество $Y/\sim = \{[y]_\sim \,:\, y \in Y\}$ называется *фактормножеством* и отображение

$$q_\sim : Y \to Y/\sim, \;\; y \mapsto [y]_\sim$$

факторотображением. Фактормножество с фактортопологией относительно факторотображения называется *факторпространством*.

Отображение $f \colon Y \to X$ топологических пространств называется *факторным отображение*, если отображение f сюрьективно и топология X совпадает с фактортопологией на множестве X относительно отображения f.

Из определений вытекает следующее утверждение.

Утверждение

Факторотображение $q_\sim : Y \to Y/\sim$ пространства Y на факторпространство $Y/\sim$ является факторным отображение.

Утверждение 1 можно сформулировать следующим образом.

Предложение

Пусть $f : Y \to X$ *сюръективное отображение топологических пространств. Следующие утверждения эквивалентны.*

1. *Отображение* f *факторно.*
2. *Множество* $U \subset X$ *открыто в* X *если и только если* $f^{-1}(U)$ *открыто в* Y*.*
3. *Множество* $F \subset X$ *замкнуто в* X *если и только если* $f^{-1}(F)$ *замкнуто в* Y*.*

Предложение

Факторное отображение непрерывно.

Доказательство.

Пусть $f : Y \to X$ факторное отображение. Пусть $U \subset X$ открытое множество. Из предложения 1 вытекает, что $f^{-1}(U)$ открыто в Y. □

Предложение

Композиция факторных отображений факторна.

Доказательство.

Пусть $g\colon Z \to Y$ и $f\colon Y \to X$ факторные отображения. Так как g и f сюрьективны и непрерывны, то композиция $f \circ g\colon Z \to X$ сюрьективна и непрерывна. Пусть $U \subset X$, $V = f^{-1}(U)$ и $W = g^{-1}(V)$. Так g факторно, то W открыто если и только если V открыто. Так f факторно, то V открыто если и только если U открыто. Тогда $W = (f \circ g)^{-1}(U)$ открыто если и только если U открыто. Следовательно, отображение $f \circ g$ факторно. $\square$

Пусть $f : Y \to X$ есть отображение множеств. Отношение эквивалентности $\sim_f$,

$$x \sim_f y \;\Leftrightarrow\; f(x) = f(y)$$

на Y называется *отношением эквивалентности, порожденное отображением* f.

Предложение

Пусть $f : Y \to X$ *отображение топологических пространств. Пусть* $h : Y/\sim_f \to X$ *есть такое отображение, что* $f = h \circ q_{\sim_f}$ *Пространство* $Y/\sim_f$ *есть факторпространство. Тогда*

1. *отображение* h *инъективно;*
2. *отображение* f *сюръективно тогда и только тогда, когда отображение* h *является биекцией;*
3. *отображение* f *непрерывно тогда и только тогда, когда отображение* h *непрерывно;*
4. *отображение* f *факторно тогда и только тогда, когда отображение* h *является гомеоморфизмом.*

Замкнутые и открытые отображения

Пусть $f : Y \to X$ отображение топологических пространств. Отображение f называется *открытым* отображением, если $f(U)$ открыто в X для любого открытого $U \subset Y$.

Отображение f называется *замкнутым* отображением, если $f(F)$ замкнуто в X для любого замкнутого $F \subset Y$.

Предложение

Пусть $f : Y \to X$ сюръективное непрерывное отображение топологических пространств.

1. *Если f замкнутое отображение, то f факторно.*
2. *Если f открытое отображение, то f факторно.*

Из определений непосредственно вытекает следующее утверждение.

Предложение

1. *Композиция замкнутых отображений замкнуто.*
2. *Композиция открытых отображений открыто.*

Предложение

Пусть $f\colon Y \to X$ непрерывное отображение топологических пространств. Если Y компактное пространство и X хаусдорфово пространство, то f замкнутое отображения.

Доказательство.

Пусть F замкнутое подмножество Y. Как замкнутое подмножество компактного пространства X, в силу предложения **??**, пространство F компактно. Как непрерывный образ компактного пространства, в силу предложения **??**, пространство $f(F)$ компактно. Как компактное подмножество хаусдорфового пространства, в силу предложения **??**, множество $f(F)$ замкнуто в X. $\square$

Предложение

Пусть $f\colon Y \to X$ *непрерывное сюръективное замкнутое отображение топологических пространств.*

1. *Если* Y T_1*-пространство, то* X T_1*-пространство.*
2. *Если* Y *нормальное пространство, то* X *нормальное пространство.*

Пусть X_α пространство для $\alpha \in A$ и $B \subset A$. Обозначим

$$\pi_B^A \colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in B} X_\alpha, \ (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto (x_\alpha)_{\alpha \in B}$$

проекцию произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ на $\prod_{\alpha \in B} X_\alpha$.

Предложение

Пусть X_α пространство для $\alpha \in A$ и $B \subset A$. Тогда проекция $\pi_B^A \colon \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha \in B} X_\alpha$ непрерывна и открыта.

Следствие

Пусть X и Y пространства. Тогда проекции

$$\pi_1 \colon X \times Y \to X, \ (x, y) \mapsto x,$$
$$\pi_2 \colon X \times Y \to Y, \ (x, y) \mapsto y$$

непрерывны и открыты.

Предложение

Пусть X пространство и Y компактное пространство. Тогда проекция

$$\pi_1 : X \times Y \to X,\ (x, y) \mapsto x$$

является замкнутым отображением.

Доказательство.

Пусть $F \subset X \times Y$ замкнутое множество. Покажем, что $\pi_1(F)$ замкнуто в X. Для этого проверим, что $X \setminus \pi_1(F)$ открыто. Пусть $x \in X \setminus \pi_1(F)$.
Так как F замкнуто в $X \times Y$ и $(x, y) \notin F$ для $y \in Y$, то существуют открытые окрестности V_y точки y и открытые окрестность U_y точки x, для которых

$$U_y \times V_y \cap F = \varnothing.$$

Так как Y компактно и $\{V_y : y \in Y\}$ является открытым покрытием Y, то существует конечное $L \subset Y$, такое что $\bigcup\{V_y : y \in L\} = Y$. Тогда $U = \bigcap\{U_y : y \in L\}$ является окрестностью точки x и $(U \times Y) \cap F = \varnothing$.
Следовательно, $x \in U \subset X \setminus \pi_1(F)$ и x является внутренней точкой множества $X \setminus \pi_1(F)$. $\square$

Топологические свойства сумм и произведений пространств

Предложение

Пусть X_α *топологическое пространство для* $\alpha \in A$ *и* $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.

1. *Если* X_α *компактно для* $\alpha \in A$ *и* $|A| < \omega$, *то* X *компактно.*
2. *Если* X_α *счетно компактно для* $\alpha \in A$ *и* $|A| < \omega$, *то* X *счетно компактно.*
3. *Если* X_α *финально компактно для* $\alpha \in A$ *и* $|A| \leqslant \omega$, *то* X *финально компактно.*

Из определений непосредственно вытекает следующие утверждение.

Предложение

Пусть X_α *топологическое пространство для* $\alpha \in A$ *и* $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}, 4\}$. *Если* X_α T_i*-пространство для* $\alpha \in A$, *то* $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ T_i*-пространство.*

Из определений непосредственно вытекает следующие утверждение.

Предложение

Пусть X_α *топологическое пространство для* $\alpha \in A$ *и* $i \in \{0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}\}$. *Если* X_α T_i*-пространство для* $\alpha \in A$, *то* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ T_i*-пространство.*

Lemma

Пусть X *пространство,* Y *компактное пространство,* γ *открытое покрытие пространства* $X \times Y$*. Пусть* $\gamma^{<\omega}$ *множество конечных подмножеств множества* γ *и*

$$U_\mu = X \setminus \pi_1\left((X \times Y) \setminus \bigcup \mu\right).$$

для $\mu \in \gamma^{<\omega}$*. Тогда*

1. *семейство* $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ *является открытым покрытием пространства* X*;*
2. *если* $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$ *и* $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ *является покрытием пространства* X*, то* $\lambda = \bigcup \mathcal{M}$ *является покрытием* $X \times Y$*.*

Доказательство.

Пусть $\mu \in \gamma^{<\omega}$. Из предложения 10 вытекает, что множество $\pi_1((X \times Y) \setminus \bigcup \mu)$ замкнуто в X. Следовательно, U_μ открыто.

Докажем (1). Пусть $x \in X$. Пространство $\{x\} \times Y$ компактно. Следовательно, существует $\mu \in \gamma^{<\omega}$, для которого $\{x\} \times Y \subset \bigcup \mu$. Тогда $x \in U_\mu$.

Пункт (2) вытекает из того, что $U_\mu \times Y \subset \bigcup \mu$ для $\mu \in \mathcal{M}$. $\square$

Предложение

Пусть X счетно компактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ счетно компактное пространство.

Доказательство.

Пусть γ счетное открытое покрытие пространства $X \times Y$. Из леммы 1(1) вытекает, что $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X. Так как $|\gamma^{<\omega}| \leqslant \omega$, то $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ открытое не более чем счетное покрытие счетно компактного пространства X. Следовательно, существует конечное $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$, такое что $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является открытым покрытием X. Из леммы 1(2) вытекает, что конечное семейство $\lambda = \bigcup \mathcal{M} \subset \gamma$ является покрытием пространство $X \times Y$. $\square$

Предложение

Пусть X финально компактное пространство и Y компактное пространство. Тогда $X \times Y$ финально компактное пространство.

Доказательство.

Пусть γ открытое покрытие пространства X. Из леммы 1(1) вытекает, что $\{U_\mu : \mu \in \gamma^{<\omega}\}$ является открытым покрытием пространства X. Так как X финально компактно, то существует не более чем счетное $\mathcal{M} \subset \gamma^{<\omega}$, для которого семейство $\{U_\mu : \mu \in \mathcal{M}\}$ является открытым покрытием X. Из леммы 1(2) вытекает, что $\lambda = \bigcup \mathcal{M} \subset \gamma$ является покрытием пространство $X \times Y$. Семейство λ не более чем счетно. $\square$

Предложение

Пусть X линделефовое пространство и Y компактное хаусдорфова пространство. Тогда $X \times Y$ линделефовое пространство пространство.

Theorem (лемма Джонса)

Пусть X сепарабельное нормальное пространство. Тогда $|D| < 2^{\omega}$ для любого дискретное замкнутого подмножество D пространства X.

Доказательство.

Пусть S счетное всюду плотное подмножество X. Для каждого $M \subset D$ зафиксируем открытое U_M, для которого

$$M \subset U_M \subset \overline{U_M} \subset X \setminus (D \setminus M).$$

Положим $S_M = U_M \cap S$. Тогда $M = \overline{S_M} \cap D$. Следовательно, отображение

$$\varphi : \mathsf{Exp}(D) \to \mathsf{Exp}(S), \; M \mapsto S_M$$

является иньективным. Следовательно, $2^{|D|} \leqslant 2^{\omega}$. Из теоремы Кантора получаем $|D| < 2^{\omega}$. □

Предложение

*Прямая Зоргенфрея S (пример **??**) является линделефовым пространством.*

Предложение

Квадрат S^2 прямой Зоргенфрея не нормален.

Конструкция пространств

Для отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X обозначаем $[x] = \{y \in X \,:\, x \sim y\}$ — класс эквивалентности, содержащий x.

Предложение

Пусть $f\colon X \to Y$ факторное отображение топологических пространств. Отображение f замкнуто если и только если $f^{-1}(f(F))$ замкнуто в X для любого замкнутого F в X множества.

Стягивание множества в точку

Пусть X пространство и $F \subset X$. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на X, такое что $[x] = \{x\}$ для $x \in X \setminus F$ и $[x] = F$ для $x \in F$. Фактор множество $X/\sim$ обозначим как X/F и фактор отображение $q_\sim : X \to X/F$ обозначим как q_F. Факторпространство X/F это пространство X после *стягивания множества* F *в точку*.

Еще говорят, что X/F есть результат *факторизации* X *по* F.

Предложение

Пусть F замкнутое множество пространства X. Тогда

1. *факторотображение $q_F : X \to X/F$ замкнуто;*
2. *если X нормальное пространство, то X/F нормальное пространство.*

Приклеивание пространств

Пусть X, Y – топологические пространства, F – подмножество пространства X, $f\colon F \to Y$ – непрерывное отображение. Пусть $\sim$ отношение эквивалентности на $X \oplus Y$, такое что $[x] = \{x\}$ для $x \in X \oplus Y \setminus (F \cup f(F))$ и $[y] = \{y\} \cup f^{-1}(y)$ для $y \in f(F)$. Фактор множество $(X \oplus Y)/\sim$ обозначим как $X \cup_f Y$ и факторотображение $q_\sim\colon X \oplus Y \to X \cup_f Y$ обозначим как q_f. Факторпространство $X \cup_f Y$ это $X \oplus Y$ после *приклеивания* X *к* Y *посредством отображения* f.

Предложение

Пусть X, Y *– топологические пространства,* F *– замкнутое подмножество пространства* X, $f\colon F \to Y$ *– непрерывное замкнутое отображение. Тогда*

1. *факторотображение* $q_f\colon X \oplus Y \to X \cup_f Y$ *замкнуто;*
2. *если* X *и* Y *нормальные пространства, то* $X \cup_f Y$ *нормальное пространство.*

Доказательство.

Докажем (1). Пусть P замкнуто в $X \oplus Y$. Тогда множество

$$q_f^{-1}(q_f(P)) = Q \cup f^{-1}(P \cap f(F)) \cup f^{-1}(f(F \cap P))$$

замкнуто в $X \oplus Y$. Из предложения 19 вытекает, что q_f замкнутое отображение.

Докажем (2). Из предложения **??** вытекает, что $X \oplus Y$ нормальное пространство. Так как q_f замкнутое отображение, то из предложения 8 вытекает, что $X \cup_f Y$ нормально. $\square$

Цилиндр пространств и отображений

Пространство $X \times [0,1]$ называется *цилиндром* пространства X. Пусть $f\colon X \to Y$ – непрерывное отображение. Результат приклеивания цилиндра $X \times [0,1]$ к Y посредством отображения

$$f_0\colon X \times \{0\} \to Y,\ (0,x) \mapsto f(x)$$

называется *цилиндром отображения* f и обозначается через $\mathrm{Cyl}(f)$.

Предложение

Пусть X, Y – топологические пространства, $f\colon X \to Y$ – непрерывное замкнутое отображение. Тогда

1. *факторотображение $q_{f_0}\colon (X \times [0,1]) \oplus Y \to \mathrm{Cyl}(f)$ замкнуто;*
2. *если $X \times [0,1]$ нормальные пространства, то $\mathrm{Cyl}(f)$ нормальное пространство.*

Конусы

Если профакторизовать $X \times [0,1]$ по $X \times \{1\}$, то получится *конус* $\mathrm{Con}(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{1\})$ над X.

Предложение

Пусть X пространства. Тогда

1. *фактороротображение* $q_{X \times \{1\}} : X \times [0,1] \to \mathrm{Con}(X)$ *замкнуто;*
2. *если* $X \times [0,1]$ *нормальное пространство, то* $\mathrm{Con}(X)$ *нормальное пространство.*

Конец