Введение в топологию

Операции над пространствами

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 7, 19.10.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Сравнение топологий

Пусть X множество и $\mathfrak{T}$ семейство всех топологий на множестве X. Семейство $\mathfrak{T}$ является частично упорядоченным множеством относительно порядка включения.

Пусть $\mathcal{T}, \mathcal{O} \in \mathfrak{T}$. Топология $\mathcal{O}$ *сильнее* топологии $\mathcal{T}$ и топология $\mathcal{T}$ *слабее* топологии $\mathcal{O}$, если $\mathcal{T} \subset \mathcal{O}$. Дискретная топология самая сильная, антидискретная топология самая слабая.

Пусть $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}$.

Топология $\mathcal{T}_{\min} \in \mathfrak{M}$ называется *минимумом* семейства топологий $\mathfrak{M}$ или *слабейшей топологией* в $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{T}_{\min} \subset \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Если минимум существует, он обозначается как $\min \mathfrak{M}$.

Топология $\mathcal{T}_{\max} \in \mathfrak{M}$ называется *максимум* семейства топологий $\mathfrak{M}$ или *сильнейшей* топологией из $\mathfrak{M}$, если $\mathcal{T}_{\max} \supset \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$. Если максимум существует, он обозначается как $\max \mathfrak{M}$.

Обозначим

$$\mathfrak{M}_- = \{\mathcal{T} \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \subset \mathcal{O} \text{ для } \mathcal{O} \in \mathfrak{M}\}$$ – множество нижних граней семейства топологий $\mathfrak{M}$,

$$\mathfrak{M}_+ = \{\mathcal{O} \in \mathfrak{T} : \mathcal{T} \subset \mathcal{O} \text{ для } \mathcal{T} \in \mathfrak{M}\}$$ – множество верхних граней семейства топологий $\mathfrak{M}$.

Семейства $\mathfrak{M}_-$ и $\mathfrak{M}_+$ не пусты, $\mathfrak{M}_-$ содержит антидискретную топологию и $\mathfrak{M}_+$ содержит дискретную топологию.

Утверждение

Существуют $\max \mathfrak{M}_-$ *и* $\min \mathfrak{M}_+$.

1. $\max \mathfrak{M}_- = \bigcap \mathfrak{M}$.
2. *Семейство* $\bigcup \mathfrak{M}$ *является предбазой топологии* $\min \mathfrak{M}_+$. *Если* $\mathcal{P}_\mathcal{T}$ *есть предбаза топологии* $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, *то* $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_\mathcal{T}$ *является предбазой топологии* $\min \mathfrak{M}_+$.

Положим

$$\inf \mathfrak{M} = \max \mathfrak{M}_- \quad \text{– } \textit{точняя нижния грань} \text{ или } \textit{инфинум} \text{ семейства топологий } \mathfrak{M},$$

$$\sup \mathfrak{M} = \min \mathfrak{M}_+ \quad \text{– } \textit{точняя верхняя грань} \text{ или } \textit{супремум} \text{ семейства топологий } \mathfrak{M}.$$

Из утверждения 1 и того, что семейства $\mathfrak{M}_-$ и $\mathfrak{M}_+$ не пусты, вытекает, что $\inf \mathfrak{M}$ и $\sup \mathfrak{M}$ определены корректно и существуют.

Утверждение

1. $\inf \mathfrak{M} = \bigcap \mathfrak{M}$.
2. *Семейство* $\bigcup \mathfrak{M}$ *является предбазой топологии* $\sup \mathfrak{M}$. *Если* $\mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ *есть предбаза топологии* $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}$, *то* $\mathcal{P} = \bigcup_{\mathcal{T} \in \mathfrak{M}} \mathcal{P}_{\mathcal{T}}$ *является предбазой топологии* $\sup \mathfrak{M}$.

Утверждение

1. $\min \mathfrak{M}$ *существует если и только если* $\inf \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$. *В этом случае* $\min \mathfrak{M} = \inf \mathfrak{M}$.
2. $\max \mathfrak{M}$ *существует если и только если* $\sup \mathfrak{M} \in \mathfrak{M}$. *В этом случае* $\max \mathfrak{M} = \sup \mathfrak{M}$.

Инициальные топологии

Пусть X множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ семейство пространств.

Пусть $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Топология $\mathcal{T}_I$ на X, слабейшая среди всех топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to X_\alpha$ непрерывны, называется *инициальной топологией* на X относительно семейства отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ множества X в топологические пространства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Проверим корректность определения. Пусть $\mathfrak{M}_I$ есть семейство топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $f_\alpha : (X, \mathcal{T}) \to X_\alpha$ непрерывны. Тогда $\mathcal{T}_I = \min \mathfrak{M}_I$. Для корректности определения надо показать, что что существует $\min \mathfrak{M}_I$. В силу утверждений 2 и 3, достаточно показать, что $\inf \mathfrak{M}_I = \bigcap \mathfrak{M}_I \in \mathfrak{M}_I$.

Пусть $\alpha \in A$ и U открытое подмножество X_α. Тогда $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}$ для любого $\mathcal{T} \in \mathfrak{M}_I$. Следовательно $f^{-1}(U) \in \bigcap \mathfrak{M}_I$. Получаем, каждое f_α непрерывно относительно топологии $\bigcap \mathfrak{M}_I$. Следовательно, $\bigcap \mathfrak{M}_I \in \mathfrak{M}_I$.

Инициальную топологию $\mathcal{T}_I$ называют также *топологией, порожденной семейством отображений* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Утверждение

Если на пространстве X топология, порожденная семейством отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$, то каждое отображение f_α непрерывно.

Утверждение

Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ *есть предбаза пространства* X_α *для* $\alpha \in A$. *Тогда семейство* $\mathcal{P} = \{f_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{P}_\alpha\}$ *является предбазой инициальной топологией* $\mathcal{T}_I$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{T}$ *топология на* X. *Следующие условия эквивалентны.*

1. $\mathcal{T}$ *есть инициальная топология* $\mathcal{T}_I$.
2. *Пусть* Y *топологическое пространство и* $f : Y \to (X, \mathcal{T})$ *отображение. Следующие условия эквивалентны:*
   2.1 *отображение* f *непрерывно;*
   2.2 *отображение* $f_\alpha \circ f$ *непрерывно для каждого* $\alpha \in A$.

Пусть Y топологическое пространство, $Z \subset Y$, $f : Z \to Y$ тождественное вложение. Инициальные топологии на Z относительно семейства отображений $\{f\}$ совпадает с топологией на Z индуцируемой на Z из X.

Финальные топологии

Пусть $g_\alpha : X_\alpha \to X$ есть отображения для $\alpha \in A$. Топология $\mathcal{T}_F$ на X, сильнейшая среди всех топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $g_\alpha : X_\alpha \to (X, \mathcal{T})$ непрерывны, называется *финальной топологией* на X относительно семейства отображений $\{g_\alpha : \alpha \in A\}$ в множество X из топологических пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Проверим корректность определения. Пусть $\mathfrak{M}_F$ есть семейство топологий $\mathcal{T}$ на X, относительно которых все отображения $g_\alpha : X_\alpha \to (X, \mathcal{T})$ непрерывны. Для корректности определения надо показать, что что существует $\max \mathfrak{M}_F$.

Утверждение

$$\mathcal{T}_F = \{U \subset X : f_\alpha^{-1}(U) \text{ *открыто в* } X_\alpha \text{ *для всех* } \alpha \in A\}.$$

Утверждение

Пусть $\mathcal{T}$ топология на X. Следующие условия эквивалентны.

1. *$\mathcal{T}$ есть финальная топология $\mathcal{T}_F$.*
2. *Пусть Y топологическое пространство и $g : (X, \mathcal{T}) \to Y$ отображение. Следующие условия эквивалентны:*
   - 2.1 *отображение g непрерывно;*
   - 2.2 *отображение $g \circ g_\alpha$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

Сумма пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$ и семейство множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ дизъюнктно. Положим $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$. Определим топологию $\mathcal{T}$ на X: $U \in \mathcal{T}$ если $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для $\alpha \in A$. Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *суммой* пространств и обозначается $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$. Если $A = \{1, 2, ..., n\}$, то сумма также обозначается как $X_1 \oplus X_2 \oplus ... \oplus X_n$.

Если $i_\alpha : X_\alpha \to X$ тождественные отображения для $\alpha \in A$, то топология суммы на X является финальной топологией относительно семейства отображений $\{i_\alpha : \alpha \in A\}$.

Каждое X_α открыто замкнуто в X и i_α является топологическим вложением X_α в X.

Утверждение

Пусть Y *топологическое пространство. Отображение* $f : X \to Y$ *непрерывно если и только если отображение* $f|_{X_\alpha}$ *непрерывно для каждого* $\alpha \in A$.

Произведение пространств

Пусть X_α топологическое пространство для $\alpha \in A$. Пусть

$$\pi_\alpha \colon P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\alpha,\ (x_\alpha)_{\alpha \in A} \mapsto x_\alpha$$

проекция произведения P на сомножитель X_α.

Топологией произведения $\mathcal{T}_P$ на произведении P называется инициальная топология на X относительно семейства отображений $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$ произведения P в топологические пространства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$.

Произведение пространств $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ будем рассматривать как топологическое пространство с топологией произведения.

Утверждение

Проекции π_α *непрерывны на произведении* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{P}_\alpha$ *есть предбаза пространства* X_α *для* $\alpha \in A$. *Тогда семейство* $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \mathcal{P}_\alpha\}$ *является предбазой топологии произведения* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{B}_\alpha$ *есть база пространства* X_α *и* $X_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha$ *для* $\alpha \in A$. *Тогда семейство*

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{B}_\alpha \text{ для } \alpha \in A \text{ и } |\{\alpha \in A : U_\alpha \neq X_\alpha\}| < \omega\}$$

является базой топологии произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{T}$ топология на $P = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Следующие условия эквивалентны.

1. *$\mathcal{T}$ есть топология произведения.*
2. *Пусть Y топологическое пространство и $f : Y \to (P, \mathcal{T})$ отображение. Следующие условия эквивалентны:*
   - 2.1 *отображение f непрерывно;*
   - 2.2 *отображение $\pi_\alpha \circ f$ непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

Утверждение

Пусть Y *топологическое пространство и* $f : Y \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *отображение. Следующие условия эквивалентны:*

1. *отображение* f *непрерывно;*
2. *отображение* $\pi_\alpha \circ f$ *непрерывно для каждого* $\alpha \in A$.

Пусть X множество и $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть отображения для $\alpha \in A$. Обозначим

$$\mathop{\triangle}_{\alpha \in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \; x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha \in A}.$$

Отображение $\triangle_{\alpha \in A} f_\alpha$ называется *диагональным произведением* семейства отображений $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$.

Утверждение

Пусть X топологическое пространство и $f_\alpha : X \to X_\alpha$ есть непрерывные отображения для $\alpha \in A$. Пусть

$$f = \mathop{\triangle}_{\alpha \in A} f_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

есть диагональное произведение. Тогда

1. *$f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ для каждого $\alpha \in A$;*
2. *f непрерывно.*

Утверждение

Пусть X *топологическое* T_0*-пространство и* $f_\alpha : X \to X_\alpha$ *есть отображения для* $\alpha \in A$*. Следующие условия эквивалентны:*

1. f *есть топологическое вложение* X *в* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$*;*
2. *топология* X *порождается семейством отображений* $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$*.*

Компактность произведения пространств

Theorem (теорема Тихонова)

Пусть X_α компактное пространство для $\alpha \in A$. Тогда произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ компактно.

Доказательство.

В силу теоремы **??**, достаточно доказать, что любой ультрафильтр на $P = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ сходится к некоторой точке P. Пусть $\xi_\alpha = \pi_\alpha(\xi)$ для $\alpha \in A$. Из утверждения **??** вытекает, что ξ_α есть ультрафилитр на X_α. Так как X_α компактно, то из теоремы **??** вытекает, что ультрафилитр ξ_α сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$.

Покажем, что ультрафилитр ξ сходится к точке $x = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Из утверждения 11 вытекает, что $\mathcal{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\ U \text{ открыто в } X_\alpha\}$ предбаза произведения P. В силу предложения **??**, достаточно показать, что если $x \in W \in \mathcal{P}$, то $W \in \xi$. Пусть $W = \pi_\alpha^{-1}(U)$, где $\alpha \in A$ и U открыто в X_α. Так как $x \in W$, то $x_\alpha \in U$. Так как ξ_α сходится к x_α, то $U \in \xi_\alpha$. Следовательно $W = \pi_\alpha^{-1}(U) \in \xi$. □

Метрические и метризуемые пространства

Две метрики ρ и d на множестве X называются *эквивалентными*, если топологии на X, порожденные на ρ и d, совпадают. Для $M \subset X$, обозначим

$$\mathrm{diam}_\rho(M) = \sup\{\rho(x,y) \,:\, x,y \in M\}$$

– диаметр множества M.

Предложение

Для метрики ρ на множестве X и $\varepsilon > 0$ существует эквивалентная метрика d на X, для которой $\mathrm{diam}_d(X) \leqslant \varepsilon$.

Доказательство.

Положим $d(x,y) = \min \varepsilon, \rho(x,y)$. $\square$

Предложение

Пусть (X_n, ρ_n) *метрические пространства и* $\operatorname{diam}_{\rho_n}(X_n) \leqslant \frac{1}{n}$ *для* $n \in \mathbb{N}$. *Пусть* $P = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. *Положим*

$$\rho(x, y) = \sup\{\rho(x_n, y_n) \,:\, n \in \mathbb{N}\},$$

для $x = (x_n)_n \in P$ *и* $y = (y_n)_n \in P$. *Тогда* ρ *метрика на* P *и топология* (X, ρ) *совпадает с топологией произведения на* P.

Доказательство.

Проекции $\pi_n : (P, \rho) \to (X_n, \rho_n)$ не увеличивают расстояние и поэтому непрерывны. Следовательно, топология (P, ρ) сильнее топологии произведения. Базу в (P, ρ) образуют множества вида $B_\rho(x, \varepsilon)$ для $\varepsilon > 0$ и $x = (x_n)_n \in P$.

Тогда
$$B_\rho(x, \varepsilon) = \prod_{n=1}^{\infty} B_{\rho_n}(x, \varepsilon)$$

Так как $B_{\rho_n}(x, \varepsilon) = X_n$ для $n > \frac{1}{\varepsilon}$, то из утверждения 12 вытекает, что $B_\rho(x, \varepsilon)$ открыто в топологии произведения.

Следовательно, (P, ρ) слабее топологии произведения. $\square$

Theorem

Счетное произведение метризуемых пространств метризуемо.

Пространство $[0,1]^{\mathbb{N}}$ называется *гильбертов куб* или *гильбертов кирпич.*

Из теоремы 2 и теоремы 1 Тихонова вытекает следующее утверждение.

Предложение

Гильбертов куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$ *является метризуемым компактным пространством.*

Theorem (метризационная теорема Урысона)

Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны.

1. *X метризуемое сепарабельное пространство.*
2. *X вкладывается в гильбертов куб $[0,1]^{\mathbb{N}}$.*
3. *X является регулярным пространством со второй аксиомой счетности.*

Доказательство.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (3) вытекает из ...

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из ...

Докажем (3) $\Rightarrow$ (2). Из теоремы ... вытекает, что X нормальное пространство. Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X. Положим $\mathcal{D} = \{(U, V) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B} : \overline{V} \subset U\}$. Занумеруем $\mathcal{D} = \{(U_n, V_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Из леммы Урысона (теорема ...) вытекает, что существует непрерывная функция $f_n : X \to [0, 1]$, так что $f(\overline{V}) = \{0\}$ и $f(X \setminus U_n) = \{1\}$. Так как семейство $\{f^{-1}([0, 1)) : n \in \mathbb{N}\}$ образует базу X, то семейство функций $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ определяют топологию X. Из утверждения 16 вытекает, что диагональное произведение $\triangle_{n=1}^{\infty} f_n$ вкладывает X в гильбертов куб $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. $\square$

Конец