Введение в топологию

Фильтры и направленности

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 6, 12.10.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Определение фильтров и баз фильтров

Пусть X множество. Семейство подмножеств $\mathcal{F}$ множества X называют *фильтром* на множестве X, если выполняются условия:

(Filtr$_1$) $\varnothing \notin \mathcal{F} \neq \varnothing$;

(Filtr$_2$) если $A, B \in \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$;

(Filtr$_3$) если $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathcal{F}$.

Семейство подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется *базой фильтра* $\mathcal{F}$, если $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ и для каждого $A \in \mathcal{F}$ найдется $B \in \mathcal{B}$, для которого $B \subset A$. Для базы $\mathcal{B}$ фильтра $\mathcal{F}$ выполняются условия:

(FB$_1$) $\varnothing \notin \mathcal{B} \neq \varnothing$;

(FB$_2$) если $A, B \in \mathcal{B}$, то $C \subset A \cap B$ для некоторого $C \in \mathcal{B}$.

Семейство подмножеств $\mathcal{B}$ множества X называется *базой фильтра* на множестве X, если для $\mathcal{B}$ выполняются условия (FB$_1$) и (FB$_1$).

> Тут схожие, но различные понятия: (1) база (некоторого конкретного) фильтра $\mathcal{F}$ и (2) база фильтра (без привязки к конкретному фильтру).
> Тут аналогия с понятием база топологии.

Фильтры можно охарактеризовать, как базы фильтров, для которых выполняется условие (Filtr$_3$).

Обозначим

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X} = \{M \subset X \,:\, A \subset M \text{ для некоторого } A \in \mathcal{B}\}.$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Утверждение

Семейство $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X}$ является фильтром и $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X}$ единственный фильтр на X, для которого $\mathcal{B}$ является базой фильтра.

Фильтр $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X}$ называется *фильтром, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$.*

Пусть $Y \subset X$ и $\mathcal{Q}$ фильтр на Y. Тогда $\mathcal{Q}$ является базой фильтра на множестве X. Фильтр $\mathcal{F}_{\mathcal{Q}}^{X}$ также называется *фильтром, продолжающий фильтр $\mathcal{Q}$ на X.*

Если $\mathcal{F}$ есть фильтр на X и $Y \in \mathcal{F}$, то семейство

$$\mathcal{F}|_Y = \{M \cap Y \,:\, M \in \mathcal{F}\}$$

совпадает с $\{M \subset Y \,:\, M \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$ и является фильтром на Y. Фильтр $\mathcal{F}|_Y$ называется *ограничением фильтра* $\mathcal{F}$ *на* Y.

Отметим

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^X_{\mathcal{F}|_Y}.$$

Зачастую, фильтры $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{F}^X_{\mathcal{Q}}$ отождествляются, то есть считается, что фильтр $\mathcal{Q}$ на $Y \subset X$ также является фильтром (как фильтр $\mathcal{F}^X_{\mathcal{Q}}$) на X.

Определение ультрафильтров, основные свойства

Все фильтры на множестве X частично упорядоченны порядком включения как семейства множеств на X. Минимальный фильтр на X, это семейство $\{X\}$.

Максимальные элементы в ч.у.м всех фильтров на множестве X называются *ультрафильтрами* на множестве X. Другими словами, фильтр $\mathfrak{U}$ являются ультрафильтром, если из того, что $\mathcal{F}$ фильтр и $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$ вытекает $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$.

Theorem

Любой фильтр содержится в некотором ультрафильтре.

Доказательство.

Пусть $\mathfrak{F}$ есть множество всех фильтров на множестве X. В силу следствия леммы Цорна, для доказательства теоремы достаточно доказать, что если $\mathfrak{C}$ цепь в $\mathfrak{F}$, то $\mathcal{F} = \bigcup \mathfrak{C} \in \mathfrak{F}$.

Проверим (Filtr_1). Очевидно, $\mathcal{F} \neq \varnothing$. Так как $\varnothing \notin \mathcal{P}$ для $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$, то $\varnothing \notin \mathcal{F}$.

Проверим (Filtr_2). Пусть $A, B \in \mathcal{F}$. Тогда $A \in \mathcal{F}_A$ и $B \in \mathcal{F}_B$ для некоторых $\mathcal{F}_A, \mathcal{F}_B \in \mathfrak{C}$. Так как $\mathfrak{C}$ цепь, то $\mathcal{P} = \mathcal{F}_A \cup \mathcal{F}_B$ совпадает либо с $\mathcal{F}_A$, либо с $\mathcal{F}_B$. Тогда $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$ и $A, B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P}$ фильтр, то $A \cap B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, то $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Проверим (Filtr_3). Пусть $A \in \mathcal{F}$ и $A \subset B \subset X$. Тогда $A \in \mathcal{P}$ для некоторого $\mathcal{P} \in \mathfrak{C}$. Так как $\mathcal{P}$ фильтр, то $B \in \mathcal{P}$. Так как $\mathcal{P} \subset \mathcal{F}$, то $B \in \mathcal{F}$. $\square$

Предложение

Пусть $\mathfrak{U}$ фильтр на множестве X. Следующие условия эквивалентны:

(A) *$\mathfrak{U}$ является ультрафильтром;*

(B) *если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$.*

Доказательство.

Докажем $(A) \Rightarrow (B)$. Положим $\mathcal{B} = \{A \cap M \ : \ M \in \mathfrak{U}\}$.

Если $\varnothing \in \mathcal{B}$, то $A \cap M = \varnothing$ для некоторого $M \in \mathfrak{U}$. Тогда $M \subset X \setminus A$ и, следовательно, $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

Рассмотрим случай $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Тогда $\mathcal{B}$ является базой фильтра. Пусть $\mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$ есть есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Так как $\mathcal{U} \subset \mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$ и $\mathcal{U}$ является ультрафильтром, то $\mathcal{U} = \mathcal{F}^X_{\mathcal{B}}$. Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$. Так как $A = X \cap A \in \mathcal{B}$, то $A \in \mathfrak{U}$.

Докажем $(B) \Rightarrow (A)$. Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр на X и $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$. Нужно доказать, что $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$. Пусть $A \in \mathcal{F}$. Так как в фильтре любые два элемента имеют непустое пересечение, то $X \setminus A \notin \mathcal{F}$ и, следовательно, $X \setminus A \notin \mathfrak{U}$. Из (B) вытекает $A \in \mathfrak{U}$. $\square$

Предложение

Пусть $\mathfrak{U}$ фильтр на множестве X. Следующие условия эквивалентны:

(A) *$\mathfrak{U}$ является ультрафильтром;*

(U_1) *если $\mathcal{M}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcup \mathcal{M} = X$, то $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$;*

(U_2) *если $\mathcal{M}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$, то $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$.*

Доказательство.

Докажем $(A) \Rightarrow (U_2)$. Предположим противное. Тогда существует конечное семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества X, такое что $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$ и $M \notin \mathfrak{U}$ для всех $M \in \mathcal{M}$. Из предложения 1 вытекает, что $X \setminus M \in \mathfrak{U}$ для всех $M \in \mathcal{M}$. Положим $\mathcal{L} = \{X \setminus M \ : \ M \in \mathcal{M}\}$. Тогда $\mathcal{L} \subset \mathfrak{U}$. Так как $\mathcal{L}$ конечное семейство, то $\bigcap \mathcal{L} \in \mathfrak{U}$. Следовательно, $\bigcup \mathcal{M} = X \setminus \bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$. Противоречие.

Импликация $(U_2) \Rightarrow (U_1)$ вытекает из того, что $X \in \mathfrak{U}$.

Докажем $(U_1) \Rightarrow (A)$. В силу предложения 1, достаточно показать, что если $A \subset X$, то либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. Положим $\mathcal{M} = \{A, X \setminus A\}$. Так как $X = \bigcup \mathcal{M}$, то из (U_1) вытекает, что либо $A \in \mathfrak{U}$, либо $X \setminus A \in \mathfrak{U}$. □

Предложение

Пусть $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на множестве X. Если $\mathcal{L}$ конечное семейство подмножеств множества X и $\bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$, то $L \notin \mathfrak{U}$ для некоторого $L \in \mathcal{L}$.

Доказательство.

Положим $\mathcal{M} = \{X \setminus L : L \in \mathcal{L}\}$. Тогда $\bigcup \mathcal{M} = X \setminus \bigcap \mathcal{L}$. Так как $\bigcap \mathcal{L} \notin \mathfrak{U}$, то из предложения 1 вытекает $\bigcup \mathcal{M} \in \mathfrak{U}$. Из предложения 2 вытекает, что $M \in \mathfrak{U}$ для некоторого $M \in \mathcal{M}$. Тогда $L = X \setminus M \notin \mathfrak{U}$ и $L \in \mathcal{L}$. $\square$

Предложение

Пусть $\mathfrak{U}$ *фильтр на множестве* X *и* $Y \in \mathfrak{U}$. *Следующие условия эквивалентны:*

(A) $\mathfrak{U}$ *является ультрафильтром на* X;

(Y) $\mathfrak{U}|_Y$ *является ультрафильтром на* Y.

Отображение фильтров и баз фильтров

Пусть $f : X \to Y$ есть отображения множеств, $\mathcal{F}$ фильтр на X и $\mathcal{B}$ база фильтра на X. Обозначим

$$f(\mathcal{B}) = \{f(M) \,:\, M \in \mathcal{B}\}.$$

Утверждение

$f(\mathcal{B})$ является базой фильтра на Y.

Утверждение

$f(\mathcal{F})$ является фильтром на $f(X)$.

Фильтр $\mathcal{F}^{Y}_{f(\mathcal{F})}$, продолжающий фильтр $f(\mathcal{F})$ на Y, будем называть *образом фильтра $\mathcal{F}$ при отображении f* и будем обозначать как $f(\mathcal{F})$.

Утверждение

Пусть $\mathfrak{U}$ есть ультрафильтр на X. Образ $f(\mathfrak{U})$ ультрафильтра $\mathfrak{U}$ при отображении f является ультрофильтром.

Пределы и предельные точки фильтров и баз фильтров

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $\mathcal{F}$ фильтр на X, $\mathcal{B}$ база фильтра и $x \in X$.

Точка x называется *пределом фильтра* $\mathcal{F}$, если каждая ее окрестность есть элемент $\mathcal{F}$. В этом случае говорят, что фильтр $\mathcal{F}$ *сходится к точке* x, и пишут $x \in \lim \mathcal{F}$.

Точка x называется *пределом базы фильтра* $\mathcal{B}$, если x является пределом фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X}$, порожденного базой фильтра $\mathcal{B}$. В этом случае говорят, что база фильтра $\mathcal{B}$ сходится к x, и пишут $x \in \lim \mathcal{B}$. Очевидно, что $x \in \lim \mathcal{B}$ в том и только том случае, если любая окрестность точки x содержит элемент $\mathcal{B}$.

Точка x называется *предельной точкой фильтра* $\mathcal{F}$, если она принадлежит замыканию каждого элемента из $\mathcal{F}$. Очевидно, что x — предельная точка фильтра $\mathcal{F}$ в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{F}$.

Точка x называется *предельной точкой базы фильтра* $\mathcal{B}$, если x является предельной точкой фильтра $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X}$, порожденного базой фильтра $\mathcal{B}$. Очевидно, что x — предельная точка база фильтра $\mathcal{B}$ в том и только том случае, если любая ее окрестность пересекает все элементы из $\mathcal{B}$.

Отметим, что

$$\bigcap_{M\in\mathcal{F}} \overline{M} \text{ — предельные точки для фильтра } \mathcal{F},$$

$$\bigcap_{M\in\mathcal{B}} \overline{M} \text{ — предельные точки для базы фильтра } \mathcal{B}.$$

Предложение

Пусть $\mathfrak{U}$ есть ультрафильтр на пространстве X. Любая предельная точка $\mathfrak{U}$ является пределом для $\mathfrak{U}$.

Доказательство.

Пусть x есть предельная точка для $\mathfrak{U}$ и U есть окрестность x. Положим $\mathcal{B} = \{U \cap M \,:\, M \in \mathfrak{U}\}$. Так как x предельная точка для $\mathfrak{U}$, то $\varnothing \notin \mathcal{B}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой фильтра. Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}^{X}$ есть фильтр, порожденный базой фильтра $\mathcal{B}$. Тогда $\mathfrak{U} \subset \mathcal{F}$. Так как $\mathfrak{U}$ ультрафильтр, то $\mathfrak{U} = \mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{B} \subset \mathfrak{U}$. Так как $U = U \cap X \in \mathcal{B}$, то $U \in \mathfrak{U}$. $\square$

Предложение

Пусть X пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:

1. $x \in \overline{M}$;
2. *x является предельной точкой для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на X, для которого $M \in \mathcal{F}$;*
3. *x является пределом для некоторого фильтра $\mathcal{F}$ на X, для которого $M \in \mathcal{F}$;*
4. *x является пределом для некоторого ультрафильтра $\mathfrak{U}$ на X, для которого $M \in \mathfrak{U}$.*

Аксиомы отделимости

Theorem

Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

1. *X хаусдорфово пространство;*
2. *у любого фильтра на X не более одного предела;*
3. *у любого ультрафильтра на X не более одного предела.*

Непрерывные отображения

Theorem

Пусть $f : X \to Y$ отображение топологических пространств и $x \in X$. Следующие условия эквивалентны:

1. *отображение f непрерывно в x;*
2. *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и x является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$;*
3. *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и x является пределом для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является пределом для фильтра $f(\mathcal{F})$;*
4. *если $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на X и x является пределом для ультрафильтра $\mathfrak{U}$, то $f(x)$ является пределом для ультрафильтра $f(\mathfrak{U})$.*

Так как отображение непрерывно, если оно непрерывно в каждой точке (утверждение **??**), то из теоремы 3 вытекает следующее утверждение.

Theorem

Пусть $f : X \to Y$ отображение топологических пространств. Следующие условия эквивалентны:

1. *отображение f непрерывно;*
2. *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и $x \in X$ является предельной точкой для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является предельной точкой для фильтра $f(\mathcal{F})$;*
3. *если $\mathcal{F}$ фильтр на X и $x \in X$ является пределом для фильтра $\mathcal{F}$, то $f(x)$ является пределом для фильтра $f(\mathcal{F})$;*
4. *если $\mathfrak{U}$ ультрафильтр на X и $x \in X$ является пределом для ультрафильтра $\mathfrak{U}$, то $f(x)$ является пределом для ультрафильтра $f(\mathfrak{U})$.*

Компактность

Theorem

Пусть X топологической пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X компактное пространство;*
2. *у любого фильтра $\mathcal{F}$ на X есть предельные точки;*
3. *любой ультрафильтр $\mathfrak{U}$ на X сходится к некоторой точке пространства X.*

Theorem (теорема Александера)

Пусть X топологической пространство и $\mathcal{P}$ предбаза X. Следующие условия эквивалентны:

1. *X компактное пространство;*
2. *для любого открытого покрытия γ, состоящего из элементов $\mathcal{P}$ (т.е. $\gamma \subset \mathcal{P}$), существует конечное подпокрытие.*

Доказательство.

Импликация $(1) \Rightarrow (2)$ очевидна.

Докажем $(2) \Rightarrow (1)$. Предположим противное, то что X не компактно. Из теоремы 5 вытекает, что существует ультрафильтр $\mathfrak{U}$ на X, не сходящейся ни к какой точке X.

Покажем, что для каждой точки $x \in X$ существует $W_x \in \mathcal{P}$, такое что $W_x \notin \mathfrak{U}$. Так как x не предел $\mathfrak{U}$, то $U \notin \mathfrak{U}$ для некоторой окрестности U точки x. Так как $\mathcal{P}$ предбаза X, то $x \in \bigcap \mathcal{W} \subset U$ для некоторого конечного $\mathcal{W} \subset \mathcal{P}$. Тогда $\bigcap \mathcal{W} \notin \mathfrak{U}$. Из предложения 3 вытекает, что $W_x \notin \mathfrak{U}$ для некоторого $W_x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{P}$.

Семейство $\gamma = \{W_x : x \in X\} \subset \mathcal{P}$ является открытым покрытием X элементами $\mathcal{P}$ и $W \notin \mathfrak{U}$ для $W \in \gamma$. Из (2) вытекает, что существует конечное подподкрытие $\mu \subset \gamma$ покрытия γ. Так как $\bigcup \mu = X$, то из предложения 2 вытекает, что $W \in \mathfrak{U}$ для некоторого $W \in \mu$. Противоречие с тем, что $\mu \subset \gamma$ и $W \notin \mathfrak{U}$ для $W \in \gamma$.

Направленности

Множество Σ с отношением $\leqslant$ называется *направленным множеством*, если выполняются условия

(Net$_1$) если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$;

(Net$_2$) $x \leqslant x$;

(Net$_3$) для любых x и y существует z, такой что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$.

Пример направленного множества — натуральные числа $\mathbb{N}$.

Направленностью называется отображение направленного множества Σ в топологическое пространство X, которое обычно записывается как индексированное множество $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ или $(x_\sigma)_\sigma$.

Типичный пример направленности — последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ *сходится к точке* x, если для любой окрестности U точки x существует $\sigma_0 \in \Sigma$, такой что $x_\sigma \in U$ для $\sigma \geqslant \sigma_0$.

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ *касается точки* x, если для любой окрестности U точки x и любого $\sigma_0 \in \Sigma$ существует $\sigma \geqslant \sigma_0$, такой что $x_\sigma \in U$.

Обозначим

$$\Sigma_{\sigma_0}\{\sigma \in \Sigma \,:\, \sigma \geqslant \sigma_0\}.$$

Направленность $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ касается точки x, если и только если

$$x \in \overline{\{x_\sigma \,:\, \sigma \in \Sigma_{\sigma_0}\}}$$

для $\sigma_0 \in \Sigma$.

На направленном множестве Σ есть *база фильтра порожденная порядком* $\leqslant$:

$$\mathcal{B}_{\Sigma} = \{\Sigma_{\sigma_0} \, : \, \sigma_0 \in \Sigma\}.$$

Образ база фильтра $\mathcal{B}_{\Sigma}$ при отображении $\sigma \mapsto x_{\sigma}$:

$$\mathcal{B}_{(x_{\sigma})_{\sigma}} = \{\{x_{\sigma} \, : \, \sigma \in \Sigma_{\sigma_0}\} \, : \, \sigma_0 \in \Sigma\}$$

назовем *базой фильтра порожденная направленностью* $(x_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$.

Соответствующие фильтры будем называть *фильтром порожденным порядком* $\leqslant$ и *фильтром порожденная направленностью* $(x_{\sigma})_{\sigma \in \Sigma}$.

Утверждение

Пусть $\mathcal{F}$ есть фильтр порожденный направленностью $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$.

1. $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ *сходится к x если и только если $\mathcal{F}$ сходится к x;*
2. $(x_\sigma)_{\sigma\in\Sigma}$ *касается x если и только если $\mathcal{F}$ касается x;*
3. *если $f : X \to Y$ отображение, то фильтр порожденный направленностью $(f(x_\sigma))_{\sigma\in\Sigma}$ совпадает с фильтром $f(\mathcal{F})$.*

Утверждение

Любой фильтр порождается некоторой направленностью.

Из этих утверждений вытекают аналоги утверждений про фильтры.

Предложение

Пусть X пространство, $x \in X$ и $M \subset X$. Следующие условия эквивалентны:

1. $x \in \overline{M}$;
2. *x является предельной точкой для некоторой направленности $(x_\sigma)_\sigma \subset M$;*
3. *x является пределом для для некоторой направленности $(x_\sigma)_\sigma \subset M$.*

Theorem

Для топологического пространства X следующие условия эквивалентны:

1. *X хаусдорфово пространство;*
2. *у любого направленности $(x_\sigma)_\sigma$ не более одного предела.*

Theorem

Пусть $f : X \to Y$ *отображение топологических пространств и* $x \in X$. *Следующие условия эквивалентны:*

1. *отображение* f *непрерывно в* x;
2. *если направленность* $(x_\sigma)_\sigma$ *касается* x, *то* $(f(x_\sigma))_\sigma$ *касается* $f(x)$;
3. *если направленность* $(x_\sigma)_\sigma$ *сходится к* x, *то* $(f(x_\sigma))_\sigma$ *сходится к* $f(x)$.

Theorem

Пусть $f : X \to Y$ *отображение топологических пространств. Следующие условия эквивалентны:*

1. *отображение* f *непрерывно;*
2. *для любого* $x \in X$*, если направленность* $(x_\sigma)_\sigma$ *касается* x*, то* $(f(x_\sigma))_\sigma$ *касается* $f(x)$*;*
3. *для любого* $x \in X$*, если направленность* $(x_\sigma)_\sigma$ *сходится к* x*, то* $(f(x_\sigma))_\sigma$ *сходится к* $f(x)$*.*

Theorem

Пусть X топологической пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X компактное пространство;*
2. *у любоой направленности $(x_\sigma)_\sigma$ есть предельные точки.*

Конец