Введение в топологию

Компактность

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 5, 6.10.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Компактные пространства

Пространство X называется *компактным* пространством, если для любого открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Другими словами, X компактное пространство, если для любого открытого покрытия γ ($\gamma \subset \mathcal{T}$ и $\bigcup \gamma = X$) пространства X существует конечное подпокрытие μ ($\mu \subset \gamma$, $|\mu| < \omega$ и $\bigcup \mu = X$).

Пространство X называется *локально компактным* пространством, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность U точки x, для которой замыкание $\overline{U}$ компактно.

Предложение

Замкнутое подпространство компактного пространства компактно.

Предложение

Непрерывный образ компактного пространства компактен.

Предложение

Если пространство X является объединением конечного семейства компактных подпространств, то X компактное пространство.

Одноточечное пространство компактно, поэтому и предложения 3 вытекает следующее утверждение.

Предложение

Конечное пространство компактно.

Lemma

Пусть X есть хаусдофовое пространство, $x \in X$, F компактное подмножество X и $x \notin F$. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F.

Доказательство.

Для каждого $y \in F$ зафиксируем открытые непересекающиеся окрестности U_y и V_y точек x и y. Так как $\{V_y \cap F : y \in F\}$ есть открытое покрытие F, то $F \subset \bigcup\{V_y : y \in M\}$ для некоторого конечного $M \subset F$. Положим $U = \bigcap\{U_y : y \in M\}$ и $V = \bigcup\{V_y : y \in M\}$. Тогда U и V есть открытые непересекающиеся окрестности точки x и множества F. $\square$

Предложение

Компактное подмножество хаусдофового пространства замкнуто.

Доказательство.

Пусть X есть хаусдофовое пространство и F компактное подмножество X. Пусть $x \in X \setminus F$. Из леммы 1 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F. Тогда $V \subset X \setminus F$ есть открытая окрестность точки x. Получаем, $X \setminus F$ открыто и, следовательно, F замкнуто в X. $\square$

Theorem

Хаусдофовое компактное пространство нормально.

Доказательство.

Пусть X есть хаусдофовое компактное пространство.
Докажем, что X регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Из предложения 1 вытекает, что F компактно. Из леммы 1 вытекает, что существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F.

Докажем, что X нормально. Пусть P и F есть замкнутое непересекающиеся подмножество. Для каждого $x \in P$ зафиксируем открытые непересекающиеся окрестности U_x и V_x точки x и замкнутого множества F. Из предложения 1 вытекает, что P компактно. Так как $\{U_x \cap P : x \in P\}$ есть открытое покрытие P, то $P \subset \bigcup\{U_x : x \in P\}$ для некоторого конечного $M \subset P$. Положим $U = \bigcup\{U_x : x \in M\}$ и $V = \bigcap\{V_x : x \in M\}$. Тогда U и V есть открытые непересекающиеся окрестности множеств P и F. □

Theorem

Хаусдофовое локально компактное пространство вполне регулярно.

Доказательство. Пусть X есть хаусдофовое локально компактное пространство.

Докажем, что X вполне регулярно. Пусть $x \in X$, F замкнутое подмножество X и $x \notin F$. Так как X локально компактно, то существует окрестность W точки x, такая что $\overline{W}$ компактно. Пусть U есть такая открытая окрестность точки x, для которой $U \subset W \cap (X \setminus F)$. Так как $K = \overline{U}$ есть замкнутое подмножество компактного пространства $\overline{W}$, то, в силу предложения 1, подпространство K компактно. Так как K компактное хаусдорфово пространство, то, в силу теоремы 3, пространство K нормально. Тогда вполне регулярное пространство.

Определим непрерывное отображение $g\colon K \to [0,1]$. Если $S = K \setminus U = \varnothing$, то тогда пусть g есть тождественно нулевая функция на K. Если $S \neq \varnothing$, то, учитывая что X вполне регулярно, пусть g есть такая непрерывная функция в $[0,1]$, для которой $g(x) = 0$ и $g(S) = \{1\}$.

Доказательство

Продолжим функцию g до функции f на X. Положим

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{если } x \in K \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus K \end{cases}$$

для $x \in X$. Тогда $f(X) \subset [0,1]$, $f(x) = 0$ и $f(F) \subset f(X \setminus U) = \{1\}$. Нам осталось проверить непрерывность f. Достаточно проверить для элементов предбазы $[0,t)$, $(t,1]$, $t \in (0,1)$ отрезка $[0,1]$, что прообразы $f^{-1}([0,t))$ и $f^{-1}((t,1])$ открыты. Пусть $t \in (0,1)$.

Проверим открытость $V = f^{-1}([0,t))$. Так как $V = g^{-1}([0,t)) \subset U$, отображение g непрерывно, то V является открытым подмножеством U и, следовательно, открыто в X.

Проверим открытость $f^{-1}((t,1])$. Пусть $Q = f^{-1}([0,t])$. Так как $Q = g^{-1}([0,t]) \subset K$, отображение g непрерывно, то Q является замкнутым подмножеством K и, следовательно, замкнуто в X. Так как $f^{-1}((t,1]) = X \setminus Q$, то $f^{-1}((t,1])$ открыто в X.

Example

Связное двоеточие является T_0 не T_1 компактным пространством.

Example

Пусть X есть натуральные числа $\mathbb{N}$ с кофинитной топологией. Покажем, что X компактно. Пусть γ открытое покрытие X и $U \in \gamma$ не пусто. Тогда $X \setminus U$ конечно и $X \setminus U \subset \bigcup \mu'$ для некоторого конечного $\mu' \subset \gamma$. Тогда $\mu = \{U\} \cup \mu'$ конечное подпокрытие γ.
Пространство X является компактным не T_2 T_1-пространством.

Счетно компактные пространства

Пространство X называется *счетно компактным* пространством, если для любого не более чем счетного открытого покрытия пространства X существует конечное подпокрытие.

Из определений вытекает

Предложение

Компактные пространства счетно компактны.

Предложение

Замкнутое подпространство счетно компактного пространства счетно компактно.

Предложение

Непрерывный образ счетно компактного пространства счетно компактен.

Предложение

Если пространство X является объединением конечного семейства счетно компактных подпространств, то X счетно компактное пространство.

Lemma

Пусть X есть хаусдофовое пространство с первой аксиомой счетности, $x \in X$, F счетно компактное подмножество X и $x \notin F$. Тогда существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества F.

Доказательство.

Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ счетная открытая база в x, $U_{n+1} \subset U_n$. Положим $F_n = \overline{U_n} \cap F$ для $n \in \mathbb{N}$.

Покажем, что $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing$. Предположим противное. Пусть $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Так как X хаусдорфово, то существуют непересекающиеся открытые окрестности O_x и O_y точек x и y. Так как (U_n) база в x, то $U_n \subset O_x$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $y \notin \overline{U_n}$ и $y \notin F_n$. Противоречие.

Положим $V_n = F \setminus F_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Семейство $\{V_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$ является открытым счетным покрытием счетно компактного пространства F. Тогда $\{V_n \,:\, n \in N\}$ является покрытием X для некоторого конечного $N \subset \mathbb{N}$. Положим $n = \max N$. Тогда $V_n = F$ и $\overline{U_n} \cap F = \varnothing$. Положим $U = U_n$ и $V = X \setminus \overline{U_n}$. $\square$

Предложение

Счетно компактное подмножество хаусдофового пространства с первой аксиомой счетности замкнуто.

Theorem

Хаусдофовое счетно компактное пространство с первой аксиомой счетности регулярно.

Предложение

В счетно компактном пространстве любое дискретное и замкнутое подмножество конечно.

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $x \in X$ и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ последовательность точек.

Последовательность $(x_n)_n$ *касается точки* x, если для любой окрестности U точки x множество $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in U\}$ бесконечно. Также говорят, что точка x является *предельной точкой* для последовательности $(x_n)_n$.

Очевидно, если последовательность сходится к точке x, то тогда она касается точки x.

Theorem

Пусть X пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X счетно компактное пространство;*
2. *любая последовательность $(x_n)_n$ в X имеет предельную точку;*
3. *если $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ убывающая последовательность непустых замкнутых множеств, то пересечение $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ непусто.*

Секвенциально компактные пространства

Пространство X называется *секвенциально компактным*, если для любой последовательности $(x_n)_n \subset X$ существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к некоторой точке пространства X.

Предложение

Если пространство секвенциально компактно, то оно счетно компактно.

Lemma

Пусть X пространство с первой аксиомой счетности, $(x_n)_n$ последовательность в X и x предельная точка последовательности $(x_n)_n$. Тогда существует подпоследовательность $(x_{n_k})_k$, сходящаяся к точке x.

Theorem

Пусть X пространство с первой аксиомой счетности. Следующие условия эквивалентны:

1. *X счетно компактное пространство;*
2. *X секвенциально компактное пространство.*

Предложение

Пусть X счетно компактное пространство. Тогда

1. *любое бесконечное подмножество в X имеет предельную точку;*
2. *любое дискретное и замкнутое подмножество X конечно.*

Lemma

Пусть X T_1*-пространство,* $x \in X$ *и* $M \subset X$*. Следующие условия эквивалентны:*

1. x *предельная точка множества* M*;*
2. *множество* $M \cap U$ *бесконечно для любой окрестности точки* x*.*

Theorem

Пусть X T_1*-пространство. Следующие условия эквивалентны:*

1. X *счетно компактное пространство;*
2. *любое бесконечное подмножество в* X *имеет предельную точку;*
3. *любое дискретное и замкнутое подмножество* X *конечно.*

Финально компактные пространства

Пространство X называется *финально компактным* пространством, если для любого открытого покрытия пространства X существует не не более чем счетное подпокрытие.

Из определений вытекает

Предложение

Компактные пространства финально компактны.

Предложение

Пространство компактно если и только если оно счетно компактно и финально компактно.

Предложение

Замкнутое подпространство финально компактного пространства финально компактно.

Предложение

Непрерывный образ финально компактного пространства финально компактен.

Предложение

Если пространство X является объединением не более чем счетным семейства финально компактных подпространств, то X финально

Lemma

Пусть X регулярное пространство, P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X, пространство P финально компактно. Тогда существует последовательность открытых множеств $(U_n)_n$, для которой $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ и $\overline{U_n} \cap F = \varnothing$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{T}$ топология X. Положим $\gamma = \{U \in \mathcal{T} : \overline{U} \cap F = \varnothing\}$. Так как X регулярно, то $\bigcup \gamma = X \setminus F$. Так как P линделефово, то $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ для некоторого $(U_n)_n \subset \gamma$. $\square$

Theorem

Регулярное финально компактное пространство нормально.

Доказательство.

Пусть X регулярное финально компактное пространство. Пусть P и F замкнутые непересекающиеся подмножества X. Тогда, в силу предложения 16, пространства P и F финально компактны. Из леммы 13 вытекает, что существуют последовательности $(U_n)_n$ и $(V_n)_n$ открытых множеств, для которых $P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$, $F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ и $\overline{U_n} \cap F = \varnothing$, $\overline{V_n} \cap P = \varnothing$ для $n \in \mathbb{N}$. Положим

$$\widetilde{U}_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}, \qquad \widetilde{V}_n = V_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i},$$

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{U}_n, \qquad V = \bigcup_{n=1}^{\infty} \widetilde{V}_n.$$

Тогда $P \subset U$ и $F \subset V$. Так как $U_n \cap V_m = \varnothing$ для $n.m \in \mathbb{N}$, то $\cap V = \varnothing$. □

Предложение

Если X пространство со второй аксиомой счетности, то X финально компактно.

Theorem

Регулярное со второй аксиомой счетности пространство нормально.

Предложение

В финально компактном пространстве любое дискретное и замкнутое подмножество не более чем счетно.

Метрические и метризуемые пространства

Theorem

Пусть X метризуемое пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X удовлетворяет второй аксиоме счетности;*
2. *X финально компактно.*

Theorem

Пусть X метризуемое пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X компактно;*
2. *X счетно компактно;*
3. *X секвенциально компактно.*

Theorem

Пусть X *компактное метризуемое пространство. Тогда* X *удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Theorem

Пусть X *счетно компактное пространство и* f *непрерывная функция на* X*. Тогда* f *достигает на* X *минимум и максимум.*

Конец