Введение в топологию

Аксиомы отделимости

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 4, 28.09.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Аксиомы отделимости

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство.
Определим для X аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4.

T_0: Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых $y \notin U$ или $x \notin V$.

T_1: Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых $y \notin U$ и $x \notin V$.

T_2: Для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых $U \cap V = \varnothing$.
T_2-Пространства также называются *хаусдорфовыми* пространствами.

T_3: Пространство X является T_1-пространством, для $x \in X$ и замкнутого $F \subset X$, для которого $x \notin F$, существуют открытые U и V, такие что $x \in U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.
T_3-Пространства также называются *регулярными* пространствами.

$T_{3\frac{1}{2}}$: Пространство X является T_1-пространством, для $x \in X$ и замкнутого $F \subset X$, для которого $x \notin F$, существует непрерывная функция $f \colon X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$, для которой $f(x) = 0$ и $f(F) = \{1\}$.
$T_{3\frac{1}{2}}$-Пространства также называются *вполне регулярными* или *тихоновскими* пространствами.

T_4: Пространство X является T_1-пространством, для замкнутых $P, F \subset X$, для которых $P \cap F = \varnothing$, существуют открытые U и V, такие что $P \subset U$, $F \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$.
T_4-Пространства также называются *нормальными* пространствами.

> В литературе, учебниках и статьях, также часто встречается вариант определений T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$ и T_4, в которых не требуется выполнения аксиомы T_1. Так что при чтении литературы нужно быть внимательным.
> Практически всегда, регулярные, вполне регулярные и нормальные пространства определяются как здесь.

Естественно ожидать, что T_i влечет T_j для $i > j$, что мы и докажем с течением времени. Ясно, для $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, свойства T_i являются топологическими. $T_{3\frac{1}{2}}$ также является топологическим свойством, что мы покажем позднее.

T_0, T_1 и T_2 пространства

Пусть X пространство, $x, y \in X$, $x \neq y$, U окрестность x и V окрестность y. Рассмотрим условия на x, y, $U \ni x$, $V \ni y$:

(T_0) $y \notin U$ или $x \notin V$;

(T_1) $y \notin U$ и $x \notin V$;

(T_2) $U \cap V = \varnothing$.

Для $i \in \{0, 1, 2\}$, пространство X является T_i-пространством если и только если выполняется условие:

> для различных $x, y \in X$, существуют окрестность U точки x и окрестность V точки y, для которых выполняется условие (T_i).

Так как $(T_2) \Rightarrow (T_1) \Rightarrow (T_0)$, то верно следующее утверждение.

Предложение

$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$.

Предложение

Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$, X *является* T_i*-пространством и* $Y \subset X$. *Тогда* Y *является* T_i*-пространством.*

Предложение

Пусть $i \in \{0, 1, 2\}$, X *является* T_i*-пространством, пространство* Y *непрерывно и инъективно отображается в* X. *Тогда* Y *является* T_i*-пространством.*

Предложение

Антидискретное не одноточечное пространство не является T_0-пространством.

Example (существует не T_0 пространство)

Антидискретное двоеточие не является T_0-пространством.

Предложение

Пространство X является T_0-пространством если и только если в X не вкладывается антидискретное двоеточие.

Предложение

Пространство X является T_1-пространством если и только если в X любая точка замкнута, то есть $\{x\}$ замкнуто в X для любого $x \in X$.

Example ($T_0 \not\Rightarrow \mathrm{T}_1$)

Связное двоеточие является T_0 не T_1 пространством.

Example ($T_1 \not\Rightarrow \mathrm{T}_2$)

Пусть N есть натуральные числа с кофинитной топологией. В N любая точка замкнута, поэтому N T_1-пространство. Так как в N любые два непустых открытых множества пересекаются, то N не T_2-пространство.

Theorem

Пусть X хаусдорфово пространство, Y пространство, $f, g\colon Y \to X$ непрерывные отображения и

$$E = \{y \in Y \,:\, f(y) = g(y)\}.$$

Тогда

1. *E замкнуто в Y;*
2. *если E всюду плотно в Y, то $f = g$.*

Доказательство.

Докажем (1). Достаточно показать, что множество

$$W = Y \setminus E = \{y \in Y \,:\, f(y) \neq g(y)\}$$

открыто. Пусть $y \in W$. Тогда $f(y) \neq g(y)$. Так как X хаусдорфово пространство, то существуют открытые окрестности U и V точек $f(y)$ и $g(y)$, соответственно, для которых $U \cap V = \varnothing$. Так как отображения f и g непрерывны, то множества $f^{-1}(U)$ и $g^{-1}(V)$ являются открытыми окрестностями точки y. Множество $W_y = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ является открытой окрестностью точки y. Тогда $f(W_y) \subset U$ и $g(W_y) \subset V$. Так как $U \cap V = \varnothing$, то $f(W_y) \cap g(W_y) = \varnothing$. Следовательно, $W_y \subset W$. Мы показали, что произвольная точка $y \in W$ является внутренней точкой множества W. Следовательно, W открыто.

Докажем (2). Множество E замкнуто и всюду плотно в Y. Следовательно, $E = Y$, что означает $f = g$. $\square$

Позднее мы покажем, что теорема 4 характеризует хаусдорфовы пространства. То есть если для пространства X выполняется теоремы 4 (достаточно пункта (2)), то X хаусдорфово пространство.

Сходящиеся последовательности

Предложение

Пусть X хаусдорфово пространство. Тогда у любой последовательности в X может быть не более одного предела.

Доказательство.

Предположим противное. Тогда существует последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к двум разным точкам x и y. Пусть U и V есть не пересекающиеся окрестности точек x и y, соответственно. Существует $N_x \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N_x$. Существует $N_y \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in V$ для $n > N_y$. Пусть $m > N_x$ и $m > N_y$. Тогда $x_m \in U \cap V$. Противоречие с $U \cap V = \varnothing$. $\square$

Предложение

Пусть X есть топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Следующие условия эквивалентны.

1. *Пространство X хаусдорфово.*
2. *У любой последовательности в X может быть не более одного предела.*

Доказательство.

Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана. Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Предположим противное. Тогда существуют различные точки $x, y \in X$, такие что $U \cap V \neq \varnothing$ для любых окрестностей U и V точек x и y, соответственно. Пусть $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ есть базы окрестностей в точках x и y, такие что $U_{n+1} \subset U_n$ и $V_{n+1} \subset V_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $x_n \in U_n \cap V_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n)_n$ сходится к двум различным точкам x и y. □

Предложение

Пусть X есть топологическое пространство и у любой последовательности в X может быть не более одного предела. Тогда X является T_1-пространством.

Доказательство.

Предположим противное. В силу предложения 6, существует $x \in X$, для которого $\{x\}$ не замкнуто. Пусть $y \in \overline{\{x\}} \setminus \{x\}$. Положим $x_n = x$ для $n \in \mathbb{N}$. Последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x. Так как $x \in U$ для любой окрестности точки y, то последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке y. У последовательности $(x_n)_n$ два различных предела. Противоречие. $\square$

$A(M)$

Пусть M бесконечное множество и a_M некоторая точка, не принадлежащая M (например $\{M\}$). Положим $A(M) = M \cup \{a_M\}$. Определим топологию на $A(M)$. Положим

$$\mathcal{B}_M = \{\{x\} : x \in M\}, \qquad \mathcal{B}_a = \{\{a_M\} \cup (M \setminus L) : L \subset M, |L| < \omega\},$$
$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_M \cup \mathcal{B}_a.$$

Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, определяемая базой $\mathcal{B}$. Далее $A(M)$ будем рассматривать с топологией $\mathcal{T}$. Точки из M являются изолированными точками пространства $A(M)$. Точка a_M является предельной точкой для множества M. Множество M всюду плотно в $A(M)$.

$A(\mathbb{N})$

Последовательность $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ сходится к точке $a_{\mathbb{N}}$ в пространстве $A(\mathbb{N})$. Пространство $A(\mathbb{N})$ гомеоморфно сходящейся последовательности с пределом $S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Определим гомеоморфизм $f : A(\mathbb{N}) \to S$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } x = n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{если } x = a_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

Пространство $A(\mathbb{N})$ также будем называть сходящейся последовательностью.

$A(\mathbb{N})$

Предложение

Пусть X есть топологическое пространство. Последовательность

$$f : \mathbb{N} \to X,\ n \mapsto x_n$$

сходится к точке $x \in X$, если и только если продолжение

$$\hat{f} : A(\mathbb{N}) \to X,\ a \mapsto \begin{cases} x_n, & \text{если } a = n \in \mathbb{N}, \\ x, & \text{если } a = a_{\mathbb{N}}. \end{cases}$$

отображения f является непрерывном отображением.

Из этого предложения вытекает следующее утверждение.

Предложение

Пусть X есть топологическое пространство. Следующие условия эквивалентны.

1. *Если $f, g : A(\mathbb{N}) \to X$ непрерывные отображения и $f|_{\mathbb{N}} = g|_{\mathbb{N}}$, то $f = g$.*
2. *У любой последовательности в X может быть не более одного предела.*

Это предложение показывает, что предложение 7 является следствием теоремы 4.

T_3. Регулярные пространства

Предложение

T_1-Пространство X является регулярным пространством если и только если выполняется условие:

> *если $x \in X$ и W окрестность x, то $\overline{U} \subset W$ для некоторой окрестности U точки x.*

Предложение

$T_3 \Rightarrow T_2$.

Предложение

Если пространство X регулярно, то подпространство $Y \subset X$ регулярно.

Example ($T_2 \not\Rightarrow$T$_3$)

Положим $F = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, $W = \mathbb{R} \setminus F$, $\mathcal{B}_\mathbb{R} = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$ — счетная база $\mathbb{R}$. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \cup \{U \cap W : U \in \mathcal{B}_R\}$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология, которая определяется этой базой. Пусть $X = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Пространство X хаусдорфово, со счетной базой, но не регулярно, так W является окрестностью 0, но $\overline{U} \not\subset W$ для любой окрестности U точки 0.

Непрерывные отображения

Предложение

Если $f\colon X \to Y$ *и* $g\colon Y \to Z$ *непрерывные отображения топологических пространств, то композиция*

$$g \circ f\colon X \to Z,\ \ x \mapsto g(f(x))$$

отображений f *и* g *непрерывна.*

Предложение

Если $f\colon X \to Y$ *непрерывное отображение топологических пространств и* $Z \subset X$, *то ограничение*

$$f|_Z : Z \to Y,\ \ z \mapsto f(z)$$

отображения f *на* Z *непрерывно.*

Доказательство.

Пусть $U \subset Y$ открыто. Из непрерывности f вытекает, вытекает, что $f^{-1}(U)$ открыто в X. Тогда

$$\left(f|_Z\right)^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap Z$$

открыто в Z. □

$T_{3\frac{1}{2}}$. Вполне регулярные пространства

Предложение

$T_{3\frac{1}{2}}$ является топологическим свойством.

Предложение

$T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3$.

Предложение

Подпространство вполне регулярного пространства вполне регулярно.

T_4. Нормальные пространства

Предложение

T_1-Пространство X является нормальным пространством если и только если выполняется условие:

> *если P замкнутое подмножество X, $W \supset P$ открыто, то $\overline{U} \subset W$ для некоторого открытого $U \supset P$.*

Theorem (Лемма Урысона)

Пусть X нормальное пространство, множества $P, F \subset X$ замкнуты и не пересекаются. Тогда существует непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, такая что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.

Доказательство лемма Урысона

Положим $D_0\{0,1\}$,

$$D_n = \left\{ \frac{k}{2^n} : 0 < k < 2^n,\ k \text{ нечетное целое число} \right\}$$

для $n > 0$, $D_n^* = \bigcup_{i=0}^{n} D_i$ для $n \in \omega$ и $D = \bigcup_{i=0}^{\infty} D_i$ — двоично рациональные числа на отрезке $[0,1]$. Ясно, $D_{n+1}^* = D_n^* \cup D_{n+1}$.

Индукцией по n, построим семейства $\{U_r : r \in D_n\}$ открытых множеств, такие что выполняются условия:

(I_0) $P \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1 \subset X \setminus F$;

(I_n) если $p, q \in D_n^*$ и $p < q$, то $\overline{U_p} \subset U_q$.

База индукции. Положим $U_1 = X \setminus F$. Множество U_1 является открытой окрестностью множества P. В силу предложения 20, существует открытое U_0, такое что $P \subset U_0 \subset \overline{U_0} \subset U_1$.

Доказательство лемма Урысона

Шаг индукции, $n > 0$**.** Для $r = \frac{s}{2^n} \in D_n$, где s нечетно и $0 < s < 2^n$, обозначим $r_- = \frac{s-1}{2^n}$ и $r_+ = \frac{s+1}{2^n}$. Тогда $r_-, r_+ \in D^*_{n-1}$ и $(r_-, r_+) \cap D^*_n = \{r\}$.

Пусть $r \in D_n$. По предположению индукции (I_{n-1}), $\overline{U_{r_-}} \subset U_{r_+}$. Из нормальности X вытекает, что существует открытое множество U_r, такое что

$$\overline{U_{r_-}} \subset U_r \subset \overline{U_r} \subset U_{r_+}.$$

Проверим (I_n). Пусть $p, q \in D^*_n$ и $p < q$. Надо доказать, $\overline{U_p} \subset U_q$.

Рассмотрим четыре случая.

1. $p \notin D_n$, $q \notin D_n$. Тогда $\overline{U_p} \subset U_q$ вытекает из (I_{n-1}).
2. $p \in D_n$, $q \notin D_n$. Тогда $p_+ \leqslant q$ и $\overline{U_p} \subset U_{p_+} \subset U_q$.
3. $p \notin D_n$, $q \in D_n$. Тогда $p \leqslant q_-$ и $\overline{U_p} \subset \overline{U_{q_-}} \subset U_q$.
4. $p \in D_n$, $q \in D_n$. Тогда $p_+ \leqslant q_-$ и $\overline{U_p} \subset \overline{U_{p_+}} \subset \overline{U_{q_-}} \subset U_q$.

Построение завершено.

Доказательство лемма Урысона

Выполняется условие

(I_∞) если $p, q \in D$ и $p < q$, то $\overline{U_p} \subset U_q$.

Определим функцию $f : X \to [0,1]$. Пусть $x \in X$. Положим $f(x) = 1$ если $x \notin U_1$. Положим

$$f(x) = \inf\{r \in D \,:\, x \in U_r\}$$

если $x \in U_1$.

Из (I_0) вытекает, что $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.

Для непрерывности f достаточно проверить, что прообразы элементов предбазы $[0,t)$ и $(t,1]$ открыты. Множество

$$f^{-1}([0,t)) = \bigcup\{U_r \,:\, r \in D, r < t\}$$

открыто.

Проверим открытость множества $f^{-1}((t,1])$. Пусть $x \in f^{-1}((t,1])$. Тогда $f(x) > t$ и $x \notin U_q$ для некоторого $q \in D$, $q > t$. Пусть $p \in D \cap (x,q)$. Тогда $x \in W = X \setminus \overline{U_p}$. Для $y \in W$, $f(y) \geqslant p > t$. Следовательно, $x \in W \subset f^{-1}((t,1])$.

Предложение

$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$.

Предложение

Пусть X нормальное пространство и $Y \subset X$ замкнутое подпространство. Тогда Y нормальное пространство.

Метрические и метризуемые пространства

Пусть (X, ρ) метрическое пространство.

Для непустых $A, B \subset X$ положим

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) \,:\, x \in A, y \in B\}.$$

Положим $\rho(x, A) = \rho(\{x\}, A)$ для $x \in X$.

Утверждение

Положим $f(x) = \rho(x, A)$. *Тогда*

1. $|f(x) - f(y)| \leqslant \rho(x, y)$;
2. *функция* f *непрерывна;*
3. $\rho(x, A) = 0$ *если и только если* $x \in \overline{A}$.

Доказательство.

Докажем (1). Достаточно доказать $f(x) - f(y) \leqslant \rho(x, y)$. Пусть $\varepsilon > 0$ и $\rho(y*, y) \leqslant f(y) + \varepsilon$ для некоторого $y^* \in A$. Тогда

$$\rho(x, y) + f(y) + \varepsilon \geqslant \rho(x, y) + \rho(y*, y) \geqslant \rho(x, y^*) \geqslant f(x).$$

Тогда $f(x) \leqslant \rho(x, y) + f(y) + \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $f(x) \leqslant \rho(x, y) + f(y)$.

Докажем (2). Пусть $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Если $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$, то $||f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Докажем (3). Если $\rho(x, A) = 0$, то $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$. Если $x \in \overline{A}$, то $B_\rho(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ для любого $\varepsilon > 0$ и, следовательно, $\rho(x, A) = 0$. $\square$

Theorem

Метризуемые пространства нормальны.

Доказательство. Пусть X метризуемое пространство и ρ метрика, которая задает топологию пространства X.

Покажем, что X хаусдофово пространство. Пусть x и y различные точки X и $r = \rho(x, y)$. Тогда $B_\rho(x, \frac{r}{2})$ и $B_\rho(y, \frac{r}{2})$ есть непересекающиеся окрестности x и y.

Покажем, что X нормальное пространство. Пусть $P, F \subset X$ замкнутые в Y непересекающиеся множества. Положим

$$U = \bigcup \{B_\rho\,(x, \rho(x, F)/2) : x \in P\}\,,$$
$$V = \bigcup \{B_\rho\,(y, \rho(y, P)/2) : y \in F\}\,.$$

Из утверждения вытекает, что U и V являются открытыми окрестностями P и F.

Покажем $U \cap V = \varnothing$. Предположим противное. Тогда

$$B_\rho\,(x, \rho(x, F)/2) \cap B_\rho\,(y, \rho(y, P)/2) \neq \varnothing$$

для некоторых $x \in P$ и $y \in F$.

Следовательно,

$$\rho(x, y) < \rho(x, F)/2 + \rho(y, P)/2 \leqslant \rho(x, y)/2 + \rho(y, x)/2 = \rho(x, y).$$

Противоречие.

Возможно простое доказательство леммы Урысона для метрических пространств: функция

$$f(x) = \frac{\rho(x, P)}{\rho(x, P) + \rho(x, F)}$$

непрерывна и разделяет замкнутые непересекающиеся множества P и F — $f(X) \subset [0, 1]$, $f(P) = \{0\}$ и $f(F) = \{1\}$.

Конец