Введение в топологию

Типы точек, замыкание и внутренность, сходящиеся последовательности, непрерывность

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 3, 21.09.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Типы точек

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство и $\mathcal{F} = \{X \setminus U \ : \ U \in \mathcal{T}\}$ семейство замкнутых подмножеств пространства X.

Пусть $M \subset X$. Точка $x \in X$ называется

- *точкой прикосновения* множества M, если $U \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x;
- *предельной точкой* множества M, если $(U \setminus \{x\}) \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x;
- *граничной точкой* множества M, если $U \cap M \neq \varnothing$ и $U \setminus M \neq \varnothing$ для любой окрестности U точки x;
- *внутренней точкой* множества M, если $U \subset M$ для некоторой окрестности U точки x.

В этих определениях можно заменить “окрестности” на “открытой окрестности”. Если $\mathcal{B}_x$ база в точке x, то в определениях можно заменить “окрестности” на “элемента базы $\mathcal{B}_x$”.

Множество $\mathring{U} \subset X$ называется *проколотой окрестностью* точки x, если $\mathring{U} = U \setminus \{x\}$ для некоторой окрестности U точки x. Точка x является предельной точкой множества M если и только если $\mathring{U} \cap M \neq \varnothing$ для любой проколотой окрестности $\mathring{U}$ точки x.

Точка x является предельной точкой множества M если и только если x является точкой прикосновения множества $M \setminus \{x\}$. Любая предельная точка является точкой прикосновения.

Точка x называется *изолированной* точкой пространства X, если $\{x\}$ открытое множество, то есть множество $\{x\}$ является окрестностью точки x. Точка $x \in M$ называется изолированной точкой множества X, если x изолированная точка подпространства M, то есть $\{x\} = M \cap U$ для некоторой окрестности U точки x в пространстве X.

Утверждение

1. *Если $x \in M$, то x точка прикосновения множества M.*
2. *Если $x \notin M$, то x точка прикосновения множества M тогда и только тогда когда x предельная точка M.*
3. *Если x изолированная точка M, то x не предельная точка M.*
4. *Если x точка прикосновения не предельная точка M, то x изолированная точка M;*
5. *Точка x является граничной точкой множества M если и только если x точка прикосновения множеств M и $X \setminus M$.*

Замыкание, внутренность граница

Положим

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \{x \in X \,:\, x \text{ точка прикосновения } M\} && \text{— замыкание множества } M, \\ \operatorname{Fr} X &= \{x \in X \,:\, x \text{ граничная точка } M\} && \text{— граница множества } M, \\ \operatorname{Int} M &= \{x \in X \,:\, x \text{ внутренния точка } M\} && \text{— внутренность множества } M. \end{aligned}$$

Утверждение

1. *Замыкание* $\overline{M}$ *множества* M *замкнуто,*

$$M \subset \overline{M} = \bigcap \{F \in \mathcal{F} \,:\, M \subset F\}$$

и $\overline{M}$ *характеризуется тем, что* $\overline{M}$ *есть наименьшее замкнутое множество, которое содержит* M*.*

2. *Внутренность* $\operatorname{Int} M$ *множества* M *открыта,*

$$\operatorname{Int} M = \bigcup \{U \in \mathcal{T} \,:\, U \subset M\} \subset M$$

и $\operatorname{Int} M$ *характеризуется тем, что* $\operatorname{Int} M$ *есть наибольшее открытое множество, которое содержится в* M*.*

Утверждение

$$\operatorname{Int} M = X \setminus \overline{X \setminus M},$$
$$\overline{M} = X \setminus \operatorname{Int}(X \setminus M).$$

Доказательство.

Докажем первое равенство. Так как $X \setminus \overline{X \setminus M}$ открыто и лежит в M, то $X \setminus \overline{X \setminus M} \subset \operatorname{Int} M$. Так как $\operatorname{Int} M$ открыто и $\operatorname{Int} M \subset M$, то $\operatorname{Int} M \cap (X \setminus M) = \varnothing$ и, следовательно, $\operatorname{Int} M \cap \overline{X \setminus M} = \varnothing$. Тогда $\operatorname{Int} M \subset X \setminus \overline{X \setminus M}$.

Докажем второе равенство. Положим $L = X \setminus M$. Из первого равенства вытекает $\operatorname{Int} L = X \setminus \overline{X \setminus L}$ и, следовательно, $\overline{X \setminus L} = X \setminus \operatorname{Int} L$. Заменяя L на $X \setminus M$ и $X \setminus L$ на M, получаем второе равенство. $\square$

Theorem

Пусть X *топологическое пространство и* $A, B \subset X$. *Тогда*

1. (co$_1$) $\overline{\varnothing} = \varnothing$;

   (co$_2$) $A \subset \overline{A}$;

   (co$_3$) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

   (co$_3^*$) *если* $A \subset B$, *то* $\overline{A} \subset \overline{B}$;

   (co$_4$) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

2. (io$_1$) $\operatorname{Int} X = X$;

   (io$_2$) $\operatorname{Int} A \subset A$;

   (io$_3$) $\operatorname{Int}(A \cap B) = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$;

   (io$_3^*$) *если* $A \subset B$, *то* $\operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;

   (io$_4$) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Доказательство.

Докажем (1). Пункты (co_1), (co_2), (co_3^*) и (co_4) вытекает из утверждения 2.

Докажем (co_3). Включение $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ вытекает из того, что множество $\overline{A} \cup \overline{B}$ замкнуто, $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ и $\overline{A \cup B}$ есть наименьшее замкнутое множество, содержащие $A \cup B$.

Включение $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$ вытекает из того, что $A, B \subset A \cup B$ и, следовательно, $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ и $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Пункт (2) вытекает из (1) и формулы $\operatorname{Int} M = X \setminus \overline{X \setminus M}$ (утверждение 3). $\square$

Утверждение

Граница $\operatorname{Fr} M$ *замкнута в* X *и*

$$\begin{aligned} \operatorname{Fr} M &= \overline{M} \cap \overline{X \setminus M} \\ &= \overline{M} \setminus \operatorname{Int} M \\ &= \operatorname{Fr}(X \setminus M). \end{aligned}$$

Доказательство.

Докажем первое равенство. Пусть $x \in X$. Точка x граничная если и только если x точка прикосновения для множеств M и $X \setminus M$ (утверждение 1(5)), то есть $x \in \overline{M} \cap \overline{X \setminus M}$. Следовательно, первое равенство верно и $\operatorname{Fr} X$ замкнуто в X как пересечение двух замкнутых множеств.

Докажем второе равенство.

$$\operatorname{Fr} X = \overline{M} \cap \overline{X \setminus M} = \overline{M} \cap (X \setminus \operatorname{Int} M) = \overline{M} \setminus \operatorname{Int} M.$$

Докажем третье равенство.

$$\operatorname{Fr}(X \setminus M) = \overline{X \setminus M} \cap \overline{X \setminus (X \setminus M)} = \\ \overline{X \setminus M} \cap \overline{M} = \operatorname{Fr} X.$$

Всюду плотные и нигде не плотные множества

Множество M *всюду плотно* в X если $M \cap U \neq \varnothing$ для любого непустого открытого $U \subset X$.

Множество M *нигде не плотно* в X если для любого непустого открытого $V \subset X$ существует непустое открытое $U \subset V$, для которого $M \cap U = \varnothing$.

Утверждение

1. *Множество M всюду плотно в X если и только если $\overline{M} = X$.*
2. *Множество M нигде не плотно в X если и только если $X \setminus \overline{M}$ всюду плотно в X.*

Доказательство.

Докажем (1). ($\Rightarrow$). Пусть $x \in X$. Тогда $U \cap M \neq \varnothing$ для любой окрестности точки x, то есть x есть точка прикосновения множества M и $x \in \overline{M}$.

($\Leftarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Пусть $x \in U$. Так как $x \in \overline{M}$ и U есть окрестность x, то $U \cap M \neq \varnothing$.

Докажем (2). ($\Rightarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Так как M нигде не плотно в X, то существует непустое открытое $V \subset U$, для которого $V \cap M = \varnothing$. Тогда $V \subset X \setminus \overline{M}$ и, следовательно, $U \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \varnothing$.

($\Leftarrow$). Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Так как $X \setminus \overline{M}$ всюду плотно в X, то $V = U \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \varnothing$. Непусто множество V открыто и $V \subset U$.

Утверждение

Если M нигде не плотно в X, то $\overline{M}$ нигде не плотно в X.

Утверждение

Если M замкнуто или открыто в X, то граница $\operatorname{Fr} M$ *нигде не плотна в X.*

Доказательство.

Так как $\operatorname{Fr} M = \operatorname{Fr}(X \setminus M)$ (утверждение 4), то достаточно доказать утверждение для замкнутого M.

Из утверждения 4 вытекает, что $\operatorname{Fr} M = \overline{M} \setminus \operatorname{Int} M = M \setminus \operatorname{Int} M$.

Пусть $U \subset X$ открытое непустое множество.
Если $U \setminus M \neq \varnothing$, то $V = U \setminus M \subset U$ непусто открытое множество и $V \cap M = \varnothing$. Если $U \setminus M = \varnothing$, то $U \subset M$ и, следовательно, $U \subset \operatorname{Int} M$. Так как $\operatorname{Fr} M = M \setminus \operatorname{Int} M$, то $U \cap \operatorname{Fr} M = \varnothing$. $\square$

Непрерывные отображения

Пусть $(X, \mathcal{T})$ и $(Y, \mathcal{R})$ топологические пространства и $x \in X$. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* x, если для любой окрестности W точки $f(x)$ существует окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset W$.

Отображение f называется *непрерывным*, если $f^{-1}(W)$ открыто для любого открытого $W \subset Y$.

Утверждение

Следующие условия эквивалентны.

1. *Отображение f непрерывно.*
2. *Отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть W открытая окрестность точки $f(x)$. Тогда $U = f^{-1}(W)$ открыто, $x \in U$ и $f(U) = W$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $W \subset Y$ открыто. Для каждого $x \in f^{-1}(W)$ существует окрестность U точки x, для которой $f(U) \subset W$. То есть $x \in U \subset f^{-1}(W)$. Следовательно $f^{-1}(W)$ открыто. $\square$

Утверждение

Следующие условия эквивалентны.

1. *Отображение f непрерывно в точке x.*
2. $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любой окрестности W точки $y = f(x)$.*
3. *Если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $y \in \overline{f(M)}$.*

Пусть $\mathcal{B}_x$ база в точке x, $\mathcal{B}_y$ база в точке $y = f(x)$, $\mathcal{P}$ предбаза пространства Y.

Утверждение

1. *Следующие условия эквивалентны.*
   1.1 *Отображение f непрерывно в точке x.*
   1.2 *Для любого $W \in \mathcal{B}_y$ существует $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset W$.*
   1.3 *Для любого окрестности $W \in \mathcal{P}$ точки y существует $U \in \mathcal{B}_x$, для которой $f(U) \subset W$.*
2. *Следующие условия эквивалентны.*
   2.1 $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любой окрестности W точки y.*
   2.2 $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любого $W \in \mathcal{B}_y$.*
   2.3 $x \in \operatorname{Int} f^{-1}(W)$ *для любой окрестности $W \in \mathcal{P}$ точки y.*

Предложение

Пусть X и Y топологические пространства и $f : X \to Y$ отображение. Пусть $\mathcal{B}$ база Y и $\mathcal{P}$ предбаза пространства Y. Следующие условия эквивалентны.

1. *Отображение f непрерывно.*
2. *$f^{-1}(U)$ открыто для каждого $U \in \mathcal{B}$.*
3. *$f^{-1}(U)$ открыто для каждого $U \in \mathcal{P}$.*
4. *Отображение f непрерывно в каждой точке $x \in X$.*
5. *$f^{-1}(F)$ замкнуто в X для каждого замкнутого $F \subset Y$.*
6. *Если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{M}$.*

Доказательство.

Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) очевидны.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть U открыто в Y. Так как $\mathcal{B}$ база, то $U = \bigcup \gamma$ для некоторого $\gamma \subset \mathcal{B}$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} f^{-1}(V)$ и так как $f^{-1}(V)$ открыто для $V \in \mathcal{B}$, то U открыто в X.

Докажем (3) $\Rightarrow$ (1). Положим $\widetilde{\mathcal{B}} = \{\bigcap \mu : \mu \subset \mathcal{P}, |\mu| < \omega\}$. Тогда $\widetilde{\mathcal{B}}$ база X. Пусть $U \in \widetilde{\mathcal{B}}$. Тогда $U = \bigcap \mu$ для некоторого конечного $\mu \subset \mathcal{P}$. Тогда $f^{-1}(U) = \bigcap_{V \in \mu} f^{-1}(V)$ открыто в X. Так как $f^{-1}(U)$ открыто в X для U из базы $\widetilde{\mathcal{B}}$, то из (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает (1).

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (4) это утверждение 8.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (5) вытекает из того, что $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(U)$ и $f^{-1}(U) = X \setminus f^{-1}(F)$ для открытого $U \subset Y$ и замкнутого $F = Y \setminus U$.

Импликация (1) $\Leftrightarrow$ (6) вытекает из (1) $\Leftrightarrow$ (4) и утверждения 11. $\square$

Сходящиеся последовательности

Пусть $(X, \mathcal{T})$ топологическое пространство, $x \in X$ и $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ последовательность точек. Последовательность $(x_n)_n$ *сходится к точке* x, если для любой окрестности U точки x существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$.

Пусть $\mathcal{B}_x$ есть база в точке x и $\mathcal{P}$ есть предбаза пространства X.

Утверждение

Следующие условия эквивалентны.

1. *Последовательность* $(x_n)_n$ *сходится к точке* x.
2. *Для любого* $U \in \mathcal{B}_x$ *существует* $N \in \mathbb{N}$, *такое что* $x_n \in U$ *для* $n > N$.
3. *Для любого* $U \in \mathcal{P}$, *такого что* $x \in U$, *существует* $N \in \mathbb{N}$, *такое что* $x_n \in U$ *для* $n > N$.

Утверждение

Если $M \subset X$, $(x_n)_n \subset M$ *и* $(x_n)_n$ *сходится к точке* x, *то* $x \in \overline{M}$.

Доказательство.

Пусть U окрестность точки x. Тогда $U \cap M \supset U \cap (x_n)_n \neq \varnothing$. Следовательно, $x \in \overline{M}$. $\square$

Предложение

Пусть X топологическое пространство $x \in X$ точка с первой аксиомой счетности. Тогда

(FU$_p$) *для $M \subset X$, $x \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x.*

Доказательство.

Импликация $(\Leftarrow)$ вытекает из утверждения 12.

Доказем $(\Rightarrow)$. Пусть $(U_n)_n$ счетная база в x, для которой $U_{n+1} \subset U_n$ для $n \in \mathbb{N}$. Так как $x \in \overline{M}$, то $U_n \cap M \neq \varnothing$. Возьмем $x_n \in U_n \cap M$. Тогда $(x_n)_n \subset M$. Покажем, что последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x. Пусть U окрестность точки x. Существует $N \in \mathbb{N}$, для которого $U_N \subset U$. Тогда $x_n \in U$ для $n > N$. $\square$

Из этого утверждения вытекает следующее предложение.

Предложение

Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда

(FU) *для любого $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x.*

Из этого утверждения вытекает следующее предложение.

Предложение

Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности. Тогда

(SEQ) *множество $F \subset X$ замкнуто X если и только если предел любой сходящейся последовательности $(x_n)_n \subset F$ принадлежит F.*

Предложение

Пусть X топологическое пространство, $x \in X$, Y топологической пространство и $f : X \to Y$ отображение. Если отображение f непрерывно в точке x и последовательность $(x_n)_n$ сходится к точке x, то образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.

Доказательство.

Пусть W окрестность точки $y = f(x)$. Так как отображение f непрерывно в точке x, то $f(U) \subset W$ для некоторой окрестности точки x. Так как $(x_n)_n$ сходится к точке x, то существует $N \in \mathbb{N}$, такое что $x_n \in U$ для $n > N$. Тогда $f(x_n) \in f(U) \subset W$ для $n > N$. □

Theorem

Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности в точке $x \in X$, Y топологической пространство и $f : X \to Y$ отображение. Тогда отображение f непрерывно в точке x если и только если для любой последовательности $(x_n)_n$, сходящейся к точке x, образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.

Доказательство.

Импликация $(\Rightarrow)$ вытекает из предложения 5.

Докажем $(\Leftarrow)$. В силу предложения 11, для доказательства непрерывности отображения f в точке x достаточно проверить, что если $M \subset X$ и $x \in \overline{M}$, то $f(x) \in \overline{f(M)}$. Из предложения 2 вытекает, что существует последовательность $(x_n)_n \subset M$, сходящаяся к точке x. Тогда образ последовательности $(f(x_n))_n \subset f(M)$ сходится к точке $f(x)$. Из утверждения 12 вытекает, что $f(x) \in \overline{f(M)}$. $\square$

Из теоремы вытекает следующее утверждение.

Theorem

Пусть X топологическое пространство с первой аксиомой счетности, Y топологической пространство и $f : X \to Y$ отображение. Тогда отображение f непрерывно в если и только если для любой последовательности $(x_n)_n$, сходящейся к некоторой точке $x \in X$, образ последовательности $(f(x_n))_n$ сходится к точке $f(x)$.

Конец