Введение в топологию

Топологические и метрические пространства, топологические свойства

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 2, 14.09.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Топологические пространства

Гомеоморфизмы, топологические свойства

Базы, предбазы, первая и вторая аксиома счетности

Топологические свойства пространств, удовлетворяющая второй аксиоме счетности

Метрические и метризуемые пространства

Методы введения топологий

Линейно упорядоченные пространства

Топологические пространства

Пусть X множество и $\mathcal{T}$ семейство подмножеств множества X. Пара $(X, \mathcal{T})$ называется *топологическим пространством*, если выполняются условия

(Top$_1$) $\varnothing, X \in \mathcal{T}$;

(Top$_2$) если $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$, то $\bigcup \mathcal{M} \in \mathcal{T}$;

(Top$_3$) если $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$ конечное семейство, то $\bigcap \mathcal{I} \in \mathcal{T}$.

Класс всех топологических пространств обозначим через Top.

Отметим, условие (Top$_3$) можно заменить на условие: если $U, V \in \mathcal{T}$, то $U \cap V \in \mathcal{T}$.

Семейство $\mathcal{T}$ называется *топологией* пространства X. Элементы топологии $\mathcal{T}$ называются *открытыми множествами*. Дополнения до открытых множеств называются *замкнутыми* множествами. Множества, которые одновременно открытые и замкнутые называются *открыто-замкнутыми* множествами.

Пусть $x \in X$. Множество $U \subset X$ называется *открытой окрестностью* точки x, если $x \in U$ и U открытое множество. Множество $S \subset X$ называется *окрестностью* точки x, если $x \in S$ и существует открытая окрестность U точки X, для которой $x \in U \subset S$.

Топология подпространства

Пусть $Y \subset X$. Семейство $\mathcal{R} = \{Y \cap U \; : \; U \in \mathcal{T}\}$ удовлетворяет условиям (Top_1)–(Top_3).

Действительно, условие (Top_1) выполнено, так как $\varnothing = Y \cap \varnothing$ и $Y = Y \cap X$, а из равенств

$$\bigcup_{U \in \mathcal{M}} Y \cap U = Y \cap \bigcup \mathcal{M}, \qquad \bigcap_{U \in \mathcal{I}} Y \cap U = Y \cap \bigcap \mathcal{I}$$

для $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ и конечного $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}$, вытекает (Top_2) и (Top_3).

Пространство $(Y, \mathcal{R})$ называют *подпространством* пространства X, а топологию $\mathcal{R}$ называют *индуцированной топологией* или *топологией подпространства*.

Гомеоморфизмы

Пусть $(X, \mathcal{T}_X)$ и $(Y, \mathcal{T}_Y)$ топологические пространства.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *непрерывным отображением*, если $f^{-1}(U)$ открытое в X множество для любого открытого множества $U \subset Y$ пространства Y.

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если f биекция и отображения f и $f^{-1} : Y \to X$ непрерывны.

Отображение $f : X \to Y$ гомеоморфизм если и только если f биекция и отображение

$$\tilde{f} : \mathcal{T}_X \to \mathcal{T}_Y, \; V \mapsto f(V)$$

является биекцией.

Топологические свойства

Пространства X и Y называются *гомеоморфными пространствами*, если существует гомеоморфизм из X в Y.

Предложение

Отношение “пространство X гомеоморфно пространству Y” является отношением эквивалентности на классе Top *всех топологических пространств.*

Свойство $\mathcal{P}(X)$ пространства X называется *топологическим свойством*, если из того, что выполняется $\mathcal{P}(X)$ для пространства X и пространство X гомеоморфно пространству Y вытекает, что выполняется $\mathcal{P}(Y)$ для пространства Y.

Одно из главных направлений исследований в топологии, это изучение топологических свойств топологических пространств.

Базы

Пусть $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Семейство открытых множеств $\mathcal{B}$ называется *базой* пространства X, если выполняется условие:

(TB) для любого открытого множества $U \in \mathcal{T}$ существует семейство $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ элементов базы $\mathcal{B}$, такое что $\bigcup \mathcal{U} = U$.

Это условие можно также сформулировать: $U = \bigcup \{V \in \mathcal{B} : V \subset U\}$ для $U \in \mathcal{T}$. Также используются такая эквивалентная формулировка:

(TB*) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности S точки x существует открытая окрестность $U \in \mathcal{B}$ из базы $\mathcal{B}$ точки x, такая что $x \in U \subset S$.

Семейство подмножеств γ множества X называется *покрытием множества* X, если $\bigcup \gamma = X$.

Если для пространства X существует не более чем счетная база топологического пространства X, то говорят, что *пространство* X *удовлетворяет второй аксиоме счетности* или *пространство* X *со счетной базой*.

Предбазы

Пусть $\mathcal{P} \subset \mathcal{T}$. Семейство открытых множеств $\mathcal{P}$ называется *предбазой* пространства X, если выполняется условие:

(TPB) всевозможные конечные пересечения $W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n$, $W_i \in \mathcal{P}$ для $i = 1, 2, \ldots, n$ элементов $\mathcal{P}$ образуют базу пространства X.

Еще одно эквивалентное условие:

(TPB*) для любой точки $x \in X$ и любой окрестности S точки x существует конечное семейство $\mu \subset \mathcal{P}$, такое что $x \in \bigcap \mu \subset S$.

База в точке

Пусть $x \in X$. Семейство открытых окрестностей $\mathcal{B}_x$ точки x называется *базой в точке* x, если для любой окрестности W точки x существует $U \in \mathcal{B}_x$, такое что $x \in U \subset W$.

Если для пространства X и точки $x \in X$ существует не более чем счетная база в точке x топологического пространства X, то говорят, что *пространство* X *удовлетворяет первой аксиоме счетности в точке* x. Если пространство X удовлетворяет первой аксиоме счетности в в каждой точке $x \in X$, то говорят, что *пространство* X *удовлетворяет первой аксиоме счетности.*

Дискретные множества и сепарабельные пространства

Пусть X есть топологическое пространство.

Подмножество $M \subset X$ называется *дискретным*, если подпространство M дискретно.

Подмножество M дискретно, если только если для любого $x \in M$ существует окрестность U точки x, для которой $U \cap M = \{x\}$.

Подмножество M дискретно и замкнуто в X, если только если для любого $x \in X$ существует окрестность U точки x, для которой $|U \cap M| \leqslant 1$.

Множество $D \subset X$ называется *всюду плотным в X множеством*, если $D \cap U \neq \varnothing$ для любого непустого открытого множества $U \subset X$.

Топологическое пространство X называется *сепарабельным*, если в X существует всюду плотное не более чем счетное подмножество.

Пространства со счетной базой

Предложение

Пусть X пространство со счетной базой и $Y \subset X$. Тогда подпространство Y со счетной базой.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X. Тогда $\{U \cap Y : U \in \mathcal{B}\}$ является счетной базой Y. □

Предложение

Пусть X дискретное пространство со счетной базой. Тогда $|X| \leqslant \omega$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{B}$ счетная база X. Так как $\{x\}$ открыто для $x \in X$, то $x \in U \subset \{x\}$ для некоторого $U \in \mathcal{B}$. Тогда $\{x\} = U \in \mathcal{B}$. Следовательно, $|X| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \omega$. □

Из этих предложений вытекает следующее утверждение.

Предложение

Пусть X пространство со счетной базой и $M \subset X$ дискретное подмножество. Тогда $|M| \leqslant \omega$.

Сепарабельность пространства со счетной базой

Предложение

Пусть X пространство со счетной базой. Тогда X сепарабельное пространство.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{B}$ есть счетная база X состоящая из непустых множеств. Для каждого $V \in \mathcal{B}$ зафиксируем $x_V \in U$. Положим $D = \{x_V : V \in \mathcal{B}\}$. Тогда $|D| \leqslant |\mathcal{B}| \leqslant \omega$. Покажем, что D всюду плотно в X. Пусть U открытое непустое подмножество X. Так как $\mathcal{B}$ база, то $V \subset U$ для некоторого $V \in \mathcal{B}$. Тогда $x_V \in D \cap U \neq \varnothing$. $\square$

Метрические пространства

Метрическое пространство есть пара (X, ρ), состоящая из множества X и функции ρ, определенной на множестве $X \times X$, удовлетворяющей следующим условиям:

(Metr$_0$) если $\rho(x, y) = 0$, то $x = y$;

(Metr$_1$) $\rho(x, x) = 0$;

(Metr$_2$) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметричность);

(Metr$_3$) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (транзитивность).

Функция d называется *метрикой.*

Метрика неотрицательна, так как $0 = \rho(x, x) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, x) = 2\rho(x, y)$.

Обозначим

$$B_\rho(x, r) = \{y \in X \,:\, \rho(x, y) < r\}$$

открытый шар радиуса r в точке x. Определим топологию $\mathcal{T}_\rho$ на множестве X: $U \in \mathcal{T}_\rho$ если

(MT) для каждого $x \in U$ существует $\varepsilon > 0$, такое что $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$.

Метрические пространства

Топология $\mathcal{T}_\rho$ на множестве X называется *топологией, индуцированной метрикой* ρ или *топологией метрического пространства* (X, ρ).

Топологическое пространство $(X, \mathcal{T})$ называется *метризуемым пространством*, если существует метрика ρ на X, для которой топология $\mathcal{T}_\rho$, индуцированная метрикой ρ, совпадают с топологией $\mathcal{T}$.

Две метрики ρ и η на множестве X называются *эквивалентными метриками*, если индуцированные метриками топологии $\mathcal{T}_\rho$ и $\mathcal{T}_\eta$ совпадают.

Открытые шары

Утверждение

Пусть $\varepsilon > 0$ и $x \in X$. Открытый шар $B_\rho(x, \varepsilon)$ является открытой окрестностью точки x.

Доказательство.

Из (Metr_1) вытекает $x \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Докажем $B_\rho(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $y \in B_\rho(x, \varepsilon)$. Тогда $\rho(x, y) < \varepsilon$. Положим $\delta = \varepsilon - \rho(x, y)$. Из (Metr_2) и (Metr_3) вытекает $B_\delta(y, \delta) \subset B_\rho(x, \varepsilon)$. $\square$

Из утверждения и определения топологии метрического пространства вытекает следующее утверждение.

Утверждение

Семейство $\{B_\rho(x, \varepsilon) \; : \; x \in X, \varepsilon > 0\}$ является базой метрического пространства (X, ρ).

Открытые шары

Утверждение

Пусть $x \in X$ *и* $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ *последовательность положительных чисел, сходящаяся к* 0*. Тогда семейство* $\{B_\rho(x,\varepsilon_n) : n \in \omega\}$ *является базой в точке* x*.*

Из утверждения вытекает:

Предложение

Метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счетности.

Подпространства

Пусть $Y \subset X$ и $\eta = \rho|_{Y \times Y}$ есть ограничение функции ρ на $Y \times Y$. Тогда η является метрикой на Y, которая называется *ограничением метрики ρ на Y*. Метрическое пространство (Y, η) называется *метрическим подпространством.*

Предложение

Пусть (X, ρ) метрическое пространство, $Y \subset X$ и η есть ограничение метрики ρ на Y. Пусть $(Y, \mathcal{Q})$ есть топологическое подпространство топологического пространства $(X, \mathcal{T}_\rho)$. Тогда $\mathcal{Q} = \mathcal{T}_\eta$.

Доказательство.

По определению $\mathcal{Q} = \{Y \cap U \ : \ U \in \mathcal{T}_\rho\}$.

Докажем $\mathcal{T}_\eta \subset \mathcal{Q}$. Пусть $V \in \mathcal{T}_\eta$. Для каждого $x \in V$ существует $\varepsilon_x > 0$, такое что $B_\eta(x, \varepsilon_x) \subset V$. Положим $U = \bigcup_{x \in V : B_\rho(x, \varepsilon_x)}$. Так $B_\rho(x, \varepsilon) \in \mathcal{T}_\rho$ для $x \in X$ (утверждения 1), то $U \in \mathcal{T}_\rho$. Так как $B_\eta(x, \varepsilon) = Y \cap B_\rho(x, \varepsilon)$ для $x \in Y$, то $V = Y \cap U \in \mathcal{Q}$.

Докажем $\mathcal{Q} \subset \mathcal{T}_\eta$. Пусть $V \in \mathcal{Q}$. Тогда $V = Y \cap U$ для некоторого $U \in \mathcal{T}_\rho$. Пусть $x \in V$. Тогда $B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Так как $B_\eta(x, \varepsilon) = Y \cap B_\rho(x, \varepsilon)$, то $B_\eta(x, \varepsilon) \subset V$. $\square$

ε-сети

Пусть $\varepsilon > 0$. Подмножество $M \subset X$ называется *ε-сетью*, если для любого $x \in X$ существует $y \in M$, такое что $\rho(x, y) < \varepsilon$.

Предложение

Пусть (X, ρ) метрическое пространство и $\varepsilon > 0$. Существует ε-сеть $M \subset X$, для которой выполняется условие: если $x, y \in M$ и $x \neq y$, то $\rho(x, y) \geqslant \varepsilon$. ε-Сеть M является дискретным замкнутым подмножеством X.

ε-сети, доказательство

Обозначим

$$\mathcal{L} = \{L \subset X \,:\, \text{если } x, y \in L \text{ и } x \neq y, \text{ то } \rho(x,y) \geqslant \varepsilon\}.$$

Покажем, что если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ есть цепь, то $R = \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$. Пусть $x, y \in R$ и $x \neq y$. Существуют $A, B \in \mathcal{R}$, такие что $x \in A$ и $y \in B$. Пусть $C = A \cup B$. Так как $\mathcal{R}$ цепь, то либо $C = A$ либо $C = B$, в любом случае $C \in \mathcal{R}$. Тогда $x, y \in C \in \mathcal{L}$ и $x \neq y$. Следовательно $\rho(x,y) \geqslant \varepsilon$.

Из следствия леммы Цорна вытекает, что существует максимальный элемент $M \in \mathcal{L}$. Покажем, что M является ε-сетью. Предположим противное. Тогда существует $p \in X$, такой что $\rho(p,x) \geqslant \varepsilon$ для всех $x \in M$. Тогда $M^+ = M \cup \{p\} \in \mathcal{L}$. Противоречие с максимальностью M в $\mathcal{L}$.

Так как $B_\rho(x,\varepsilon) \cap M = \{x\}$ для $x \in M$, то M дискретное подмножество X.

Покажем, что M замкнуто в X. Множество M замкнуто, если множество $W = X \setminus M$ открыто в X. Пусть $p \in W$. Так как M ε-сеть и $p \notin M$, то $0 < \rho(p,x) < \varepsilon$ для некоторого $x \in M$. Тогда $B_\rho(p,\delta) \subset B_\rho(x,\varepsilon)$ и $x \notin B_\rho(p,\delta)$, где $\delta = \min(\rho(p,x), \varepsilon - \rho(p,x))$. Так как $B_\rho(p,\delta) \subset B_\rho(x,\varepsilon) \cap M = \{x\}$, то $B_\rho(p,\delta) \cap M = \varnothing$ и $B_\rho(p,\delta) \subset W$.

Базы в метрических пространствах

Предложение

Пусть (X, ρ) метрическое пространство, множество M всюду плотно в X и $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ последовательность положительных чисел, сходящаяся к 0. Тогда семейство множеств

$$\mathcal{B} = \{B_\rho(x, \varepsilon_n) \,:\, x \in M, n \in \omega\}$$

является базой пространства X.

Доказательство.

Пусть $x \in X$ и U окрестность точки x. Существует $\varepsilon > 0$, для которого $x \in B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$.

Так как $(\varepsilon_n)_{n\in\omega}$ сходится к 0, то $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{2}$ для некоторого $n \in \omega$.

Так как M всюду плотно в X, то существует $y \in M \cap B_\rho(x, \varepsilon_n)$.

Тогда $x \in B_\rho(y, \varepsilon_n) \in \mathcal{B}$ и $B_\rho(y, \varepsilon_n) \subset B_\rho(x, 2\varepsilon_n) \subset B_\rho(x, \varepsilon) \subset U$. $\square$

Метрические пространства со счетной базой

Theorem

Пусть (X,ρ) метрическое пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X удовлетворяет второй аксиоме счетности;*
2. *X сепарабельно;*
3. *любое дискретное замкнутое подмножество X не более чем счетно.*

Доказательство.

Импликация (1)⇒(2) и (1)⇒(3) были доказаны в общем случае.

Докажем (2)⇒(1). Пусть $M = \{x_m : m \in \omega\} \subset X$ не более чем счетное плотное подмножество X. Положим $\mathcal{B} = \{B_\rho(x_m, \frac{1}{2^n}) : m, n \in \omega\}$. Тогда $|\mathcal{B}| \leqslant \omega$ и $\mathcal{B}$ является базой X.

Докажем (3)⇒(2). Пусть $n \in \omega$. Существует дискретная и замкнутая $\frac{1}{2^n}$-сеть $M_n \subset X$.

Из (3) вытекает $|M_n| \leqslant \omega$. Положим $M = \bigcup_{n\in\omega} M_n$. Тогда $|M| \leqslant \omega$. Покажем, что M всюду плотно в X. Пусть $U \subset X$ непустое открытое подмножество. Тогда $B_\rho(x,\varepsilon) \subset U$ для некоторого $x \in U$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем $n \in \omega$, такое что $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Существует $y \in M_n$, такое что $\rho(x,y) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Тогда $y \in B_\rho(x,\varepsilon) \cap M \subset U \cap M \neq \varnothing$. □

Методы введения топологий

Пусть X — произвольное множество; под введением тополотопологии на X мы понимаем выбор семейства $\mathcal{T}$ подмножеств X, удовлетворяющих условиям (Top_1)–(Top_3), т. е. такого семейства $\mathcal{T}$, что пара $(X, \mathcal{T})$ есть топологическое пространство. Часто бывает удобнее давать косвенное описание семейства открытых множеств. Мы приведем несколько методов введения топологий, которые заключаются в том, что определяется предбаза или определяется база.

Явное задание топологии

Иногда топологию $\mathcal{T}$ можно задать в явном виде.

Пространство X называется *дискретным пространством*, если $\mathcal{T} = \mathsf{Exp}(X)$. Дискретные пространства характеризуются тем, что каждая точка $\{x\} \subset X$ является открытым множеством.

Пространство X называется *антидискретным пространством*, если $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$.

Example (связное двоеточие)

Пусть $D = \{0, 1\}$ и $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Для семейство $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1)–(Top_3) на D. Пространство $(D, \mathcal{T})$ называется *связным двоеточием* или *пространством Серпинского*.

Еще бывают *дискретное двоеточие* — двоеточие с дискретной топологией и *антидискретное двоеточие* — двоеточие с антидискретной топологией. Любое пространство из двух точек гомеоморфно одному из этих трех двоеточий.

Явное задание топологии

Example (связная стрелка)

Пусть $\mathcal{B} = \{(x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{T} = \{\varnothing, \mathbb{R}\} \cup \mathcal{B}$. Для семейство $\mathcal{T}$ выполняются условия (Top_1)–(Top_3) на $\mathbb{R}$. Пространство $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ называется *связной стрелкой*. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии связной стрелки.

Любое двухточечное подпространство связной стрелки гомеоморфно связному двоеточию.

Задание топологии через базу

Пусть $\mathcal{B}$ есть семейство подмножеств X, для которой выполняются условия:

(TB$_1$) $\mathcal{B}$ покрытие X;

(TB$_2$) если $x \in X$, $U, V \in \mathcal{B}$ и $x \in U \cap V$, то $x \in W \subset U \cap V$ для некоторого $W \in \mathcal{B}$.

Утверждение

Для семейства $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} = \{\bigcup \mu \ : \ \mu \subset \mathcal{B}\}$ *выполняются условия* (Top$_1$)–(Top$_3$) *и* $\mathcal{B}$ *является базой топологического пространства* $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{B}})$.

Семейство $\mathcal{B}$ подмножеств X, для которых выполняется условия (TB$_1$) и (TB$_2$) называется *базой топологии* (на множестве X). Топология $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ называется *топология, порожденная базой* $\mathcal{B}$.

Задание топологии через предбазу

Пусть $\mathcal{P}$ есть семейство подмножеств X, для которой выполняются условия

(TPB$_1$) $\mathcal{P}$ покрытие X.

Утверждение

Для семейства $\mathcal{B}_\mathcal{P} = \{\bigcap \mu \,:\, \mu \subset \mathcal{P},\ |\mu| < \omega\}$ *выполняются условия* (TB$_1$) *и* (TB$_2$). *Для семейства* $\mathcal{T}_\mathcal{P} = \{\bigcup \mu \,:\, \mu \subset \mathcal{B}_\mathcal{P}\}$ *выполняются условия* (Top$_1$)–(Top$_3$), $\mathcal{P}$ *является предбазой топологического пространства* $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$ *и* $\mathcal{B}_\mathcal{P}$ *является базой* $(X, \mathcal{T}_\mathcal{P})$.

Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств X, для которых выполняется условия (TPB$_1$) (то есть $\mathcal{P}$ покрытие X) называется *предбазой топологии* (на множестве X). Топология $\mathcal{T}_\mathcal{P}$ называется *топология, порожденная предбазой* $\mathcal{P}$.

Примеры

Example (прямая Зоргенфрея)

Пусть $\mathcal{P}_r = \{[x, +\infty) : x \in \mathbb{R}\}$, $\mathcal{P}_l = \{(-\infty, x) : x \in \mathbb{R}\}$ и $\mathcal{P} = \mathcal{P}_l \cup \mathcal{P}_r$. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пораженная предбазой $\mathcal{P}$. Пространство $\mathsf{S} = (\mathbb{R}, \mathcal{T})$ называется *прямой Зоргенфрея*. Семейство $\mathcal{B} = \{[a, b) : a < b \in \mathbb{R}\}$ является базой прямой Зоргенфрея S.

Example (плоскостью Немыцкого)

Пусть $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ есть верхняя полуплоскость. Обозначим $B(x_0, y_0, R) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < R\}$ открытый круг радиуса R с центром в точке (x_0, y_0). Положим
$\mathcal{B}_1 = \{B(x_0, y_0, R) : (x_0, y_0) \in P, R > 0, R \leqslant y_0\}$,
$\mathcal{B}_2 = \{\{(x_0, 0)\} \cup B(x_0, R, R) : x_0 \in \mathbb{R}, R > 0\}$ и $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$. Семейство $\mathcal{B}$ является базой топологии. Пусть $\mathcal{T}$ есть топология пораженная базой $\mathcal{B}$. Пространство $(P, \mathcal{T})$ называется *плоскостью Немыцкого*.

Линейно упорядоченные пространства

Пусть $(X,<)$ линейно упорядоченное множество. Положим

$$\mathcal{P} = \{X\} \cup \{(x,+\infty)_X, (-\infty,y)_X \ : \ x,y \in X\}.$$

Топология $\mathcal{T}$, порожденная предбазой топологии $\mathcal{P}$, называется *топологией линейно упорядоченного пространства* или *порядковой топологией* и пространство $(X,\mathcal{T})$ *линейно упорядоченным пространством.*

Базу топологий $\mathcal{T}$ образует семейство

$$\mathcal{B} = \{X\} \cup \{(x,+\infty)_X, (-\infty,y)_X, (x,y)_X \ : \ x,y \in X\}.$$

Топология линейно упорядоченного пространства на $\mathbb{R}$ совпадает со стандартной топологией на $\mathbb{R}$.

Пусть $(X,<)$ вполне упорядоченное множество и $x_{\min}$ минимальный элемент X. Тогда семейство

$$\{\{x_{\min}\}\} \cup \{(x,y] \ : \ x,y \in X, x<y\}$$

образует базу X.

Спасибо