Введение в топологию

Вычисление фундаментальной группы

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 15, 14.12.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Универсальное накрытие

Пусть X связное локально линейно связное пространство. Накрытие $\pi : U \to X$ назовем *универсальным*, если пространство U односвязно.

Отметим, связное локально линейно связное пространство линейно связно.

Theorem

Пусть X связное локально линейно связное пространство, $p : E \to X$ накрытие, $\pi : U \to X$ универсальное накрытие, пространство E связно. Пусть $x_0 \in X$, $e_0 \in E$, $u_0 \in U$ и $x_0 = p(e_0) = \pi(u_0)$. Существует единственное накрытие $\varphi : U \to E$, для которого $\pi = p \circ \varphi$.

Следствие

Если существует, универсальное накрытие единственно.

Theorem

Пусть X *связное локально односвязное пространство, то универсальное накрытие* X *существует.*

Вычисление фундаментальной группы

Пусть $f : X \to Y$ непрерывное отображение, $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$. Положим

$$f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0), \ [\varphi] \mapsto [\varphi \circ f].$$

Отображение f_* является гомоморфизмом групп.

Пусть $p : E \to X$ накрытие, $e_0 \in E_0$, $x_0 = p(e_0)$. Пространства X и E линейно связны.

Для $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ путь φ однозначно поднимается до пути $\psi = p^*(\varphi, e_0)$, такого что e_0 начало ψ.

Группа $\pi_1(X, x_0)$ действует на множестве $Z = p^{-1}(x_0)$. Для $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ и $z \in Z$ положим

$$[\varphi]z = p^*(\varphi, z)(1).$$

Соответствие

$$\pi_1(X, x_0) \to Z,\ \alpha \mapsto \alpha e_0$$

является сюрьекцией.

Способ вычисление фундаментальной группы

Пусть $\pi : U \to X$ универсальное накрытие, $u_0 \in U$, $x_0 = \pi(x_0)$.

Группа $\pi_1(X, x_0)$ транзитивно и эффективно действует на множестве $Z = \pi^{-1}(x_0)$.

Соответствие

$$\Psi : \pi_1(X, x_0) \to Z, \ \alpha \mapsto \alpha u_0$$

является биекцией.

Для $z \in Z$ возьмем путь ψ_z в U, для которого $\psi_z(0) = e_0$ и $\psi_z(1) = z$.

Положим $\varphi_z = \pi \circ \psi_z$, $[\varphi_z] \in \pi_1(X, x_0)$.

Определим перестановку

$$\sigma_z : Z \to Z,\ x \mapsto [\varphi_z]x.$$

Операцию на Z можно ввести так: $ab = \sigma_a(b)$. Группа Z изоморфна $\pi_1(X, x_0)$, отображение Ψ является изоморфизмом.

Проективное пространство

Для $n > 1$ n-мерная сфера S_n односвязно.

Определим RP_n проективное пространство как фактор пространства S_n по отношению эквивалентности $x \sim -x$.

Фактор отображение $i_n : S_n \to RP_n$ является 2-х кратным универсальным накрытием.

Следовательно, $\pi_1(RP_n, x_0)$ изоморфно $\mathbb{Z}_2$. Единственным не единичным элементом будет петля $i_n \circ \varphi$, где φ путь в S_n, с началом в x_0 и в конце в $-x_0$.

Окружность

Будем считать, что $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = 1\}$. Отображение

$$\pi : \mathbb{R} \to S_1, \;\; x \mapsto e^{2\pi i x}$$

является накрытием. Тогда $\pi^{-1}(1) = \mathbb{Z}$.

Для $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$\psi_n : \mathbb{I} \to \mathbb{R}, \;\; t \mapsto nt.$$

Положим

$$\varphi_n = \pi \circ \psi_n : \mathbb{I} \to S_1,\ t \mapsto e^{2\pi i n t}.$$

Тогда для $m \in \mathbb{Z}$

$$p^*(\varphi_n, m) : \mathbb{I} \to \mathbb{R},\ t \mapsto m + nt.$$

Получаем
$$\sigma_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ m \mapsto m + n.$$

Следовательно, стандартные операции на $\mathbb{Z}$ задают операции на $\pi_1(S_1, 1)$. Изоморфизм:
$$\mathbb{Z} \to \pi_1(S_1, 1),\ n \mapsto \varphi_n : \mathbb{I} \to S_1,\ t \mapsto e^{2\pi i n t}.$$

Конец