Введение в топологию

Фундаментальная группа. Накрытия.

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 14, 07.12.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Фундаментальная группа

В топологии часто приходится рассматривать пространства с отмеченной точкой, т.е. считать, что во всех пространствах выделены отмеченные точки и все отображения переводят отмеченные точки в отмеченные. Одинаковые пространства с разными отмеченными точками считаются разными пространствами. Класс топологических пространств с отмеченными точками и их непрерывных отображений будет обозначаться через Top_b (b — это base-point“ — отмеченная точка).

Переход к пространствам с отмеченной точкой в той или иной степени сказывается на рассмотренных выше топологических операциях. Для некоторых из них изменение сводится к тому, что пространство — результат операции — наделяется отмеченной точкой. Например, в произведении $X \times Y$ отмечается точка (x_0, y_0), где x_0 , y_0 — отмеченные точки сомножителей. Некоторые операции модифицируются более серьёзным образом. Так, в конусе $\mathrm{Con}(X)$ отождествляются между собой точки образующей, соответствующей отмеченной точке. При этом, иногда обычный конус $\mathrm{Con}(X)$ не гомеоморфен конусу $\mathrm{Con}_b(X)$ с отмеченной точкой. Например, если X состоит из трёх точек $(X = 3)$, то $\mathrm{Con}(X)$ — это триод, а $\mathrm{Con}_b(X)$ гомеоморфно отрезку. Но оба эти пространства имеют один гомотопический тип — тип точки.

Букет пространств X и Y с отмеченными точками x_0 и y_0, получается из суммы этих пространств посредством отождествления их отмеченных точек. Эта операция есть частный случай приклеивание пространств (см. раздел **??**).
Букет пространств X и Y обозначается через $X \vee Y$. Например, букет двух окружностей — "восьмёрка".

Пусть A — подмножество пространства X. Гомотопия $F\colon X \times \mathbb{I} \to Y$ называется *связанной на* A, или A-гомотопией, если $F(x,t) = F(x,0)$ при $x \in A$, $t \in \mathbb{I}$. Два отображения, которые можно соединить A-гомотопией называются A-гомотопными. Как и обычная гомотопность, A-гомотопность является эквивалентностью. Как правило, мы будем иметь дело лишь с одноточечными и двухточечными A. Множество гомотопических классов отображений пространств X с отмеченной точкой в пространство Y с отмеченной точкой будет обозначаться как через $\pi(X,Y)$, так и через $\pi_b(X,Y)$.

Утверждение

Пусть $h\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ *непрерывное отображение, для которого* $h(0) = 0$ *и* $f(1) = 1$, $\varphi : \mathbb{I} \to X$ *путь. Тогда путь* $\varphi \circ h$ $\{0, 1\}$*-гомотопен пути* φ.

Пусть φ_1, φ_2, ..., φ_n — пути в X, такие что $\varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0)$ для $i = 1, 2, ..., n-1$. Пусть $0 < a_1 < ... < a_{n_1} < 1$. Положим $a_0 = 0$ и $a_n = 1$. Обозначим через $\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{n-1})$ такое отображение $\varphi : \mathbb{I} \to X$, что $\varphi(ta_{i-1} + (1-t)a_i) = \varphi_i(t)$ для $i = 1, 2, ..., n$ и $t \in \mathbb{I}$.

Утверждение

$\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{n-1})$ *является путем.*

Утверждение

Пусть $\varphi_i = \Sigma(\psi, \xi; c)$, *где* $i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Тогда*

$$\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{n-1}) =$$
$$= \Sigma(\varphi_1, ...\varphi_{i-1}, \psi, \xi, \varphi_{i+1}, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{i-1}, (1-c)a_{i-1} + ca_i, a_i, ..., a_{n-1}).$$

Предложение

Пусть φ_i *и* ψ_i *пути в* X *для* $i = 1, ..., n$, *такие что* $\varphi_i(1) = \varphi_{i+1}(0) = \psi_i(1) = \psi_{i+1}(0)$ *для* $i = 1, 2, ..., n-1$. *Пусть* $0 < a_1 < ... < a_{n_1} < 1$ *и* $0 < b_1 < ... < b_{n_1} < 1$.

1. *Пути* $\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{n-1})$ *и* $\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; b_1, ..., b_{n-1})$ $\{0,1\}$*-гомотопны.*
2. *Пути* $\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{n-1})$ *и* $\Sigma(\psi_1, ..., \psi_n; a_1, ..., a_{n-1})$ $\{0,1\}$*-гомотопны.*
3. *Пути* $\Sigma(\varphi_1, ..., \varphi_n; a_1, ..., a_{n-1})$ *и* $\Sigma(\psi_1, ..., \psi_n; b_1, ..., b_{n-1})$ $\{0,1\}$*-гомотопны.*

Для пути φ обозначим

$$\varphi^{-1} : \mathbb{I} \to X,\ t \mapsto \varphi(1-t)$$

обратный путь.

Для $x_0 \in X$ обозначим

$$\mathsf{C}_{x_0}^X : \mathbb{I} \to X,\ t \mapsto x_0$$

постоянный путь.

Утверждение

Пусть $x_0 = \varphi(0)$ *и* $x_1 = \varphi(1)$.

1. *Путь* $\Sigma(\varphi, \varphi^{-1}; \frac{1}{2})$ $\{0,1\}$*-гомотопен постоянному пути* $\mathsf{C}^X_{x_0}$.
2. *Путь* $\Sigma(\varphi^{-1}, \varphi; \frac{1}{2})$ $\{0,1\}$*-гомотопен постоянному пути* $\mathsf{C}^X_{x_1}$.
3. *Путь* $\Sigma(\mathsf{C}^X_{x_0}, \varphi; \frac{1}{2})$ $\{0,1\}$*-гомотопен пути* φ.
4. *Путь* $\Sigma(\varphi, \mathsf{C}^X_{x_1}; \frac{1}{2})$ $\{0,1\}$*-гомотопен пути* φ.

Рассматриваются *петли* пространства X, т.е. такие отображения $\varphi\colon \mathbb{I} \to X$, что $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, где x_0 — отмеченная точка. Петли φ_0 и φ_1 называются *гомотопными*, если пути φ_0 и φ_1 $\{0, 1\}$-гомотопны.

Множество гомотопических классов петель $\varphi\colon \mathbb{I} \to (X, x_0)$ обозначается через $\pi_1(X, x_0)$.

Петля, рассматриваемая как отображение $\varphi\colon \mathbb{I} \to X$ с условием $\varphi(0) = \varphi(1) = x_0$, равносильна отображению $\varphi_b\colon S_1 \to X$, переводящему точку $0 = \{2\pi n\colon n \in \mathbb{Z}\}$ в отмеченную точку $x_0 \in X$. При этом, мы отождествляем точку $\varphi(t)$ с точкой $\varphi(2\pi t)$. Поэтому множество $\pi_1(X, x_0)$ можно рассматривать как множество гомотопических классов $\pi_b(S1, X, x_0)$ с фиксированной отмеченной точкой $0 \in S_1$.

Определим *произведение петель* $\varphi\psi = \Sigma(\varphi, \psi; \frac{1}{2})$. Другими словами, произведение двух петель — это петля, составленная из этих двух петель, которые проходятся последовательно.

Это умножение порождает умножение и в множестве $\pi_1(X, x_0)$:

$$[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi\psi]. \tag{1}$$

Надо проверить только, что равенство (1) не зависит от выбора представителей в гомотопических классах $[\varphi]$ и $[\psi]$.

Lemma

Если $\varphi_0 \sim \varphi_1$ *и* $\psi_0 \sim \psi_1$, *то* $\varphi_0\psi_0 \sim \varphi_1\psi_1$.

Доказательство.

Так как $\varphi_0\psi_0 = \Sigma(\varphi_0, \psi_0; \frac{1}{2})$, $\varphi_1\psi_1 = \Sigma(\varphi_1, \psi_1; \frac{1}{2})$, φ_0 $\{0,1\}$-гомотопно φ_1 и ψ_0 $\{0,1\}$-гомотопно ψ_1, то из предложения 1 вытекает, что $\varphi_0\psi_0$ $\{0,1\}$-гомотопно $\varphi_1\psi_1$. $\square$

Проверим, что относительно введенной операции $\pi_1(X, x_0)$ является группой.

Единица в $\pi_1(X, x_0)$. Из утверждения 2 вытекает, что

$$\mathsf{C}_{x_0}^X \varphi \sim \varphi \sim \varphi \mathsf{C}_{x_0}^X$$

для любой петли $\varphi \in \pi_1(X, x_0)$. Поэтому гомотопический класс $[\mathsf{C}_{x_0}^X]$ является левой и правой единицей в множестве $\pi_1(X, x_0)$.

Обратный в $\pi_1(X, x_0)$. Из утверждения 2 вытекает, что обратным к элементу $[\varphi]$ является элемент $[\varphi^{-1}]$.

Ассоциативность умножения в $\pi_1(X, x_0)$. Наконец, умножение в $\pi_1(X, x_0)$ ассоциативно. В самом деле, пусть $\varphi, \psi, \xi \in \pi_1(X, x_0)$. Из утверждения 2 вытекает

$$\varphi(\psi\xi) = \Sigma(\varphi, \Sigma(\psi, \xi; \tfrac{1}{2}); \tfrac{1}{2}) = \Sigma(\varphi, \psi, \xi; \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}),$$
$$(\varphi\psi)\xi = \Sigma(\Sigma(\varphi, \psi; \tfrac{1}{2}), \xi; \tfrac{1}{2}) = \Sigma(\varphi, \psi, \xi; \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2}).$$

Из предложения 1 вытекает $\varphi(\psi\xi) \sim (\varphi\psi)\xi$.

Theorem

Пусть $x_0, x_1 \in X$ *лежат в одной компоненте линейной связности в* X. *Тогда группы* $\pi_1(X, x_0)$ *и* $\pi_1(X, x_1)$ *изоморфны.*

Доказательство.

Пусть θ есть путь в X, для которого x_0 начало и x_1 конец. Определим отображения

$$\Theta : \pi_1(X, x_1) \to \pi_0(X, x_1),\ [\varphi] \mapsto [\Sigma(\theta, \varphi, \theta^{-1}; \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})],$$
$$\Delta : \pi_0(X, x_1) \to \pi_1(X, x_1),\ [\psi] \mapsto [\Sigma(\theta^{-1}, \psi, \theta; \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3})].$$

Из предложения 1 вытекает, что определение корректно, не зависит от выбора $\varphi \in [\varphi]$ и $\psi \in [\psi]$.
Проверим, что Θ гоморфизм групп. ... $\square$

Замечание. Из Теоремы 1.4 следует, что для линейно связного пространства X группы $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках $x_0 \in X$ изоморфны между собой и могут рассматриваться как одна группа $\pi_1(X)$, которая называется фундаментальной группой линейно связного пространства X.

Definition

Линейно связное пространство X называется односвязным, если любые два такие пути $\alpha_1 \colon \mathbb{I} \to X$ и $\alpha_2 \colon \mathbb{I} \to X$, что $\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = x_0$, $\alpha_1(1) = \alpha_2(1) = x_1$, принадлежат одному гомотопическому классу путей с закреплёнными концами.

Theorem

Линейно связное пространство X односвязно тогда и только тогда, когда $\pi_1(X) = 0$.

Доказательство.

Импликация $(\Rightarrow)$ вытекает из того, что петля гомотопна постоянному пути. ... $\square$

Накрытия.

Непрерывное сюръективное отображение $p : E \to X$ называется *накрытием*, если существует база $\mathcal{B}$ пространства X, такая что для каждого $V \in \mathcal{B}$ существует дискретное пространство D_V и гомеоморфизм

$$h_V : p^{-1}(V) \to V \times D_V,$$

такие что

$$\pi_V \circ h_V = p|_{p^{-1}(V)}.$$

Пространство E называется *тотальным пространством* накрытия, пространство X — *базой* накрытия.

Отображения

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \mapsto z^n,$$
$$\mathbb{R} \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},\ \varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

являются накрытиями.

Пусть $f\colon Y \to X$ и $\tilde{f} : Y \to E$ непрерывные отображения. Отображение $\tilde{f}$ называется *поднятием* отображения f, если $f = p \circ \tilde{f}$.

Theorem (лемма о поднятии пути)

Пусть $p : X \to E$ накрытие, φ путь в X, $x_0\varphi(0)$ и $e_0 \in p^{-1}(x_0)$. Существует и единственное поднятие $\tilde{\varphi}$ пути φ, для которого $\tilde{\varphi}(0) = e_0$.

Theorem ((о накрывающей гомотопии)

Пусть $p : X \to E$ *накрытие,* $\Phi : Y \times \mathbb{I} \to X$ *гомотопия,* $f : Y \to X,\ y \mapsto \Phi(y, 0),\ \tilde{f}$ *поднятие отображения* f*.* *Существует и единственное поднятие* $\widetilde{\Phi}$ *гомотопии* Φ*, для которого* $\widetilde{\Phi}(y, 0) = \tilde{f}(y)$ *для* $y \in Y$*.*

Конец