Введение в топологию

Гомотопия

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 13, 30.11.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Гомотопия

Непрерывные отображения $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ называются гомотопными, $(f \sim_h g)$ если существует такое непрерывное отображение $\Phi\colon X \times \mathbb{I} \to Y$, что $\Phi(x,0) = f(x)$, $\Phi(x,1) = g(x)$ для каждого $x \in X$. Всякое такое отображение Φ называется *гомотопией*, связывающей f с g. Оно называется также гомотопией отображения f.

Иногда отображение Φ заменяется семейством отображений

$$f_t\colon X \to Y,\ t \in \mathbb{I},\ f_t(x) = \Phi(x,t).$$

Theorem

Отношение гомотопности является отношением эквивалентности на множестве $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из X в Y.

Все отображения $X \to \mathbb{I}$ гомомотопны между собой.

Гомотопическая эквивалентность

Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами*. Множество гомотопических классов отображений $X \to Y$ обозначается через $\pi(X, Y)$. Гомотопический класс отображения $f\colon X \to Y$ будем обозначать через $[f]$.

А вообще, элементы множества $\pi(X, Y)$ будут обозначаться греческими буквами α, β и т.д. Отображение f , для которого $\alpha = [f]$ или $f \in \alpha$, называется представителем класса α в $C(X, Y)$. Как правило представитель определён неоднозначно.

Пусть X, Y_1, Y_2 — пространства и $h\colon Y_1 \to Y_2$ — непрерывное отображение.

Классу $\alpha \in \pi(X, Y_1)$ поставим в соответствие класс $h_*(\alpha) = [h \circ f] \in \pi(X, Y_2)$, где f — какой-нибудь представитель класса α, т.е. $[f] = \alpha$. Тем самым определено отображение $h_*\colon \pi(X, Y_1) \to \pi(X, Y_2)$.

Предложение

Отображение h_* определено корректно, т.е. класс $h_*(\alpha) = [h \circ f]$ не зависит от выбора представителя $f \in \alpha$.

Theorem

Пусть даны пространства X, Y_1, Y_2, Y_3 *и непрерывные отображения* $g\colon Y_1 \to Y_2$, $h\colon Y_2 \to Y_3$. *Тогда следующая диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\pi(X, Y_1) \arrow[rr, "g_*"] \arrow[dr, "(h \circ g)_*"'] & & \pi(X, Y_2) \arrow[dl, "h_*"] \\
& \pi(X, Y_3) &
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Пространства X_1 и X_2 называются *гомотопически эквивалентными* ($X_1 \sim X_2$), если существуют такие непрерывные отображения $f\colon X_1 \to X_2$, $g\colon X_2 \to X_1$, что композиции $g \circ f\colon X_1 \to X_1$, $f \circ g\colon X_2 \to X_2$ гомотопны тождественным отображениям $X_1 \to X_1$, $X_2 \to X_2$.

Отношение гомотопической эквивалентности является обобщением отношения гомеоморфности.

Theorem

Отношение гомотопической эквивалентности является отношением эквивалентности на классе Top *всех топологических пространств.*

Класс гомотопически эквивалентных пространств называется *гомотопическим типом.*

Стягиваемые пространства

Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ гомотопно постоянному отображению $\mathrm{const}_{x_0}\colon X \to X$, переводящему все X в точку $x_0 \in X$.

1. Пространство стягиваемо тогда и только тогда когда оно имеет гомотопический тип точки.
2. Конус над любым пространством стягиваем.
3. Цилиндр отображения $f\colon X \to Y$ гомотопически эквивалентен пространству Y.

Гомотопически эквивалентные пространства не обязаны быть гомеоморфными.

Конец