Введение в топологию

Кривые

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 12, 23.11.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Непрерывные образы отрезка

Пусть T компактное совершенное дискриптивное дерево.

Линейно упорядочим n-ый уровень $\mathsf{Lv}_n(T)$ дерева T. Пусть $u = (u_0, ..., u_{n-1})$ и $v = (v_0, ..., v_{n-1})$ различные элементы $\mathsf{Lv}_n(T)$. Положим $u <_n v$ если $u_k < v_k$, где $k = \min\{i \in \{0, ..., n-1\} : u_i \neq v_i\}$.

Линейно упорядочим тело $[T]$ дерева T. Пусть $u = (u_n)_n$ и $v = (v_n)_n$ различные элементы $[T]$. Положим $u <_\omega v$ если $u_k < v_k$, где $k = \min\{i \in \omega : u_i \neq v_i\}$.

Два элемента a и b линейно упорядоченного множества L назовем *соседними*, если между a и b нет других элементов L.

Топология линейного порядка на $([T], <_\omega)$ совпадает с топологией $[T]$.

Утверждение

Пусть $u = (u_n)_n$ и $v = (v_n)_n$ различные элементы $[T]$ и $u <_\omega v$. Следующие условия эквивалентны:

1. *элементы u и v соседние в $([T], <_\omega)$;*
2. *для каждого $n \in \omega$, либо $u \restriction n = v \restriction n$, либо $u \restriction n$ и $v \restriction n$ соседние элементы в $(\mathsf{Lv}_n(T), <_n)$;*
3. *если $k = \min\{i \in \omega : u_i \neq v_i\}$, то элементы u_k и v_k соседние в $\mathsf{suc}(u \restriction k) = \mathsf{suc}(v \restriction k)$ и*

$$u_n = \max \mathsf{suc}(u \restriction n, T),\ v_n = \min \mathsf{suc}(v \restriction n, T)$$

для $n > k$.

Утверждение

Существует возрастающее непрерывное сюръективное отображение $f_T : [T] \to \mathbb{I}$, такое что $f_T(a) = f_T(b)$ для различных $a, b \in [T]$ если и только если a и b соседние точки в $([T], <_\omega)$.

Доказательство.

Определим A-систему $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(\mathbb{I})$, таким образом, что $\Phi(u)$ является некоторым отрезком $[l_u, r_u]$.

База индукции. Положим $\Phi(\varnothing) = [l_\varnothing, r_\varnothing] = \mathbb{I}$.

Шаг индукции. Пусть построено $u \in T$, $l = \mathsf{lt}(u)$ и $\Phi(u) = [l_u, r_u]$. Пусть $n = |\mathsf{suc}(u, T)|$ и $\mathsf{suc}(u, T) = x_0, x_1, ..., x_{n-1}$, где $(x_i)_{i<n}$ возрастающая последовательность. Положим

$$l_{u^\frown x_i} = l_u + i\frac{r_u - l_u}{n},$$

$$r_{u^\frown x_i} = l_u + (i+1)\frac{r_u - l_u}{n}.$$

Положим $f = \widehat{\Phi}$.

Отображение f_T из утверждения 2 однозначно определяется деревом T. Отображение f_T назовем *стандартным отображением тела дерева* $[T]$ *на отрезок* $\mathbb{I}$.

Пусть $\sim_{\mathfrak{n}}$ есть такое отношение эквивалентности, что $a \sim_{\mathfrak{n}} b$ для различных $a, b \in [T]$ если и только если a и b соседи в $([T], <_\omega)$. Фактор пространство $[T]/\sim_{\mathfrak{n}}$ обозначим как $[T]_{\mathfrak{n}}$ и назовем *связным телом* дерева T. Фактор отображение $q_{\sim_{\mathfrak{n}}} : [T] \to [T]_{\mathfrak{n}}$ обозначим как q_T.

Отношение $\sim_{\mathfrak{n}}$ совпадает с отношением эквивалентности $\sim_{f_T}$, порожденное отображением (см. раздел **??**) стандартным отображением f_T. Существует отображение $h_T : [T]_{\mathfrak{n}} \to \mathbb{I}$, так что $f_T = h_T \circ q_T$

Следствие

Отображение $h_T : [T]_{\mathfrak{N}} \to \mathbb{I}$ *является гомеоморфизмом.*

Отображение $h_T : [T]_{\mathfrak{N}}$ назовем *стандартным гомеоморфизмом связного тела* $[T]_{\mathfrak{N}}$ на отрезок $\mathbb{I}$.

Theorem

Пусть T *компактное совершенное дескриптивное дерево,* X *пространство,* $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ *непрерывная* A*-система, для которой выполняется условие:*

(A_6) *для* $n \in \omega$ *и* $u, v \in \mathsf{Lv}_n(T)$, $\Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \varnothing$ *если и только если* u *и* v *соседние элементы в* $\mathsf{Lv}_n(T)$.

Тогда существуют гомеоморфизм $h \colon [T]_{\mathfrak{N}} \to \ker \Phi$, *такой что* $\widehat{\Phi} = h \circ q_T$.

Theorem

Пусть T компактное дескриптивное совершенное дерево, X пространство, $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ непрерывная A-система, для которой выполняется условие:

(A7) *для $n \in \omega$, $\Phi(u) \cap \Phi(v) \neq \varnothing$ для любых соседних $u, v \in \mathsf{Lv}_n(T)$.*

Тогда существуют непрерывное отображение $h\colon [T]_{\mathfrak{N}} \to \ker \Phi$, такое что $\widehat{\Phi} = h \circ q_T$.

Предложение

Пусть T компактное дескриптивное совершенное дерево, X пространство, $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$ непрерывная A-система, для которой выполняется условие:

(A8) *Для каждого $u \in T$, можно выбрать $a_u, b_u \in \Phi(u)$ таким образом, что выполняются условия:*

0.1 *если $u \in T$, $x, y \in \mathsf{suc}(u, T)$, $x < y$, x и y соседние элементы в $\mathsf{suc}(u, T)$, то*
$$b_{u^\frown x} = a_{u^\frown y};$$

0.2 *если $n \in \omega$, $u, v \in \mathsf{Lv}_n(T)$, $u <_n v$, u и v соседние элементы в $(\mathsf{Lv}_n(T), <_n)$, $x = \max \mathsf{suc}(u, T)$ и $y = \min \mathsf{suc}(v, T)$, то*

$$b_{u^\frown x} = a_{v^\frown y}.$$

Тогда существуют непрерывное отображение $h\colon [T]_{\mathfrak{N}} \to \ker \Phi$, такое что $\widehat{\Phi} = h \circ q_T$.

Фракталы

Пусть (X,ρ) компактное метрическое пространство.

Пусть $f_0, f_1, ..., f_{n-1} : X \to X$ отображения. Обозначим $\mathbf{n} = \{0, 1, ..., n-1\}$. Определим A-систему $\Phi : \mathbf{n}^{<\omega} \to \mathsf{Exp}(X)$ и семейство отображений $f_u : X \to X$ для $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$.

База индукции. $\Phi(\varnothing) = X$ и $f_\varnothing : X \to X$ тождественное отображение.

Шаг индукции. Пусть $u \in \mathbf{n}^{<\omega}$, $l = \mathsf{lt}(u)$ и построены $\Phi(u) \subset X$ и $f_u : X \to X$. Для $i \in \mathbf{n} = \mathsf{suc}(u, \mathbf{n}^{<\omega})$ положим

$$f_{u^\frown i} = f_u \circ f_i, \qquad \Phi_{u^\frown i} = f_{u^\frown i}(X).$$

Отметим, что $f_{(i)} = f_i$, где (i) последовательность длины 1.

Ядро $\ker \Phi$ A-системы Φ является частным важным случаем *фракталов*.

Особенно наглядная картина получается в случае, когда f_i являются композицией гомотетии и изометрии.

Пусть $\lambda > 0$. Отображение $f : X \to X$ называется *λ-сжимающим*, если $\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y)$ для $x, y \in X$. Ясно, λ-сжимающие отображения непрерывны.

Утверждение

Если $\lambda < 1$, отображения f_i являются λ-сжимающими, то A-система непрерывна.

Доказательство.

Так как $\operatorname{diam}_\rho(\Phi(u)) \leqslant \operatorname{diam}_\rho(X)\lambda^{\mathsf{lt}(u)}$, то, в силу утверждения **??**, A-система Φ непрерывна. $\square$

Из предложения **??** вытекает следующие утверждение.

Утверждение

Если Φ *непрерывная* A*-система и* $f_i(X) \cap f_j(X) = \varnothing$ *для различных* $i, j \in \mathbf{n}$*, то отображение* $\widehat{\Phi}$ *гомеоморфно отображает* $\mathbf{n}^\omega$ *на* $\ker \Phi$*.*

Утверждение

Пусть Φ *непрерывная* A*-система,* $a, b \in X$ *и выполняются условия:*

1. $a = f_0(a)$ *и* $b = f_{n-1}(b)$*;*
2. $f_i(b) = f_{i+1}(a)$ *для* $i = 0, 1, ..., n-2$*.*

Тогда существуют непрерывное отображение $h\colon [T]_{\mathfrak{n}} \to \widehat{\Phi}([T])$*, такое что* $\widehat{\Phi} = h \circ q_T$*.*

Утверждение

Пусть Φ *непрерывная* A*-система и* $X = \bigcup_{i=0}^{n-1} f_i(X)$*. Тогда ядро* $\ker \Phi$ *совпадает с* X*.*

Канторово множество

Пусть $X = \mathbb{I}$, $n = 2$,

$$f_0 \colon \mathbb{I} \to [0, \tfrac{1}{3}],\ x \mapsto \tfrac{1}{3}x,$$
$$f_1 \colon \mathbb{I} \to [\tfrac{2}{3}, 1],\ x \mapsto \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}x$$

возрастающие линейные сюрьективные функции.

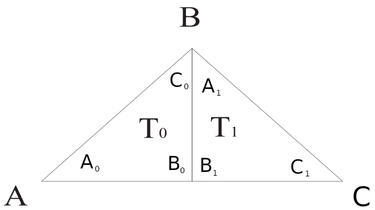
Ядром этой A-системы получаем *канторово множество* C. Отображения f_0 и f_1 являются $\frac{1}{3}$-сжимающим. Из утверждения 3 вытекает, что A-система непрерывна. Так как $f_0(X) \cap f_1(X) = \varnothing$, то из утверждения 4 вытекает, что отображение $\widehat{\Phi} : \mathbf{2}^\omega \to \mathsf{C}$ является гомеоморфизмом. Отображение $\widehat{\Phi}$ является порядковым изоморфизмом $(\mathbf{2}^\omega, <_\omega)$ на C.

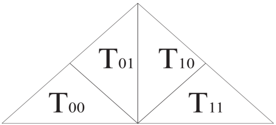
Отображение $f_{\mathbf{2}^{<\omega}} : \mathbf{2}^\omega \to \mathbb{I}$ есть стандартное отображение тела канторова дерева $[\mathbf{2}^{<\omega}] = \mathbf{2}^\omega$ на отрезок $\mathbb{I}$. Отображение

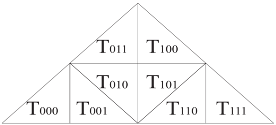
$$\psi = f_{\mathbf{2}^{<\omega}} \circ \widehat{\Phi}^{-1} : \mathsf{C} \to \mathbb{I}$$

является непрерывным возрастающим отображением. При этом, если a и b соседние точки в канторовом множестве C, то $\psi(a) = \psi(b)$. Функция ψ однозначно продолжается до монотонной функции $g : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$: если $a < b$ соседние точки в C и $a < x < b$, то $g(x) = \psi(a) = \psi(b)$. Функция g является *канторовой лестницей*.

Кривая Пеано

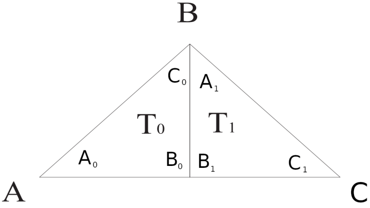


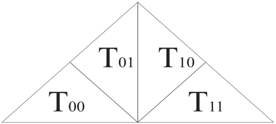


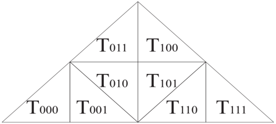


Пусть $X = T$ это прямоугольный равносторонний треугольник ABC, B прямой угол. Пусть $T_0 = A_0B_0C_0$ и $T_1 = A_1B_1C_1$ разбиение T на два треугольника высотой $C_0B_0 = A_1B_1$. При этом $A = A_0$, $B = C_0 = A_1$, $C = C_1$.

Пусть $f_0 : T \to T_0$ и $f_1 : T_1 \to T_1$ аффинные отображения, для которых $f_0(A) = A_0$, $f_0(B) = B_0$, $f_0(C) = C_0$ и $f_1(A) = A_1$, $f_1(B) = B_1$, $f_1(C) = C_1$.







Отображения f_0 и f_1 являются $\frac{1}{2}$-сжимающим. Из утверждения 3 вытекает, что отображение $\widehat{\Phi}$ непрерывно. Так как $X = f_0(X) \cup f_1(X)$, то из утверждения 6 вытекает, что ядро $\ker \Phi$ совпадает с $X = T$.

Положим $a = A$ и $b = C$. Тогда (1) $a = f_0(a) = A = A_0$, $b = f_1(b) = C = C_1$; (2) $f_0(b) = f_1(a) = C_0 = A_1 = B$. Из утверждения 5 вытекает, что существует непрерывное отображение $h : [\mathbf{2}^{<\omega}]_{\mathfrak{n}} \to \ker \Phi = T$, такое что $\widehat{\Phi} = h \circ q_{\mathbf{2}^{<\omega}}$. Положим

$$g = h \circ h_{\mathbf{2}^{<\omega}}^{-1} : \mathbb{I} \to T,$$

где $h_{\mathbf{2}^{<\omega}} : [\mathbf{2}^{<\omega}]_{\mathfrak{n}} \to \mathbb{I}$ стандартный изоморфизм.

Локально связные полные метрические пространства

Lemma

Пусть (X, ρ) *метрическое связное локально связное пространство. Для любых двух точек* $x, y \in X$ *и* $\varepsilon > 0$ *существуют открытые связные множества* $(U_i)_{i<n}$*, так что* $x \in U_0$*,* $y \in U_{n-1}$*,* $\mathrm{diam}_\rho(U_i) \leqslant \varepsilon$ *для* $i = 0, 1, ..., n-1$ *и* $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ *для* $i = 0, 1, ..., n-2$.

Theorem (Теорема Мазуркевича)

Пусть X *полное метризуемое связное локально связное пространство. Тогда* X *линейно связно.*

Предложение

Пусть $f : X \to Y$ *непрерывное сюрьективное отображение хаусдорфовых компактов и* X *локально связно. Тогда* Y *локально связно.*

Lemma

Пусть X *локально компактное связное локально связное хаусдорфово пространство. Любое компактное* $K \subset X$ *содержится в связном компактном* $F \subset X$.

Lemma

Пусть (X,ρ) *компактное связное локально связное метрическое пространство,* $\varepsilon > 0$, $K \subset U \subset X$ *связные подмножества,* K *компактно,* U *открыто и* $a, b \in K$*. Существует* $n \in \mathbb{N}$, *связные подмножества* $K_i \subset U_i \subset U$ *для* $i = 0, 1, ..., n-1$, *так что*

1. K_i *компактно,* U_i *открыто,* $\mathrm{diam}_\rho(U_i) \leqslant \varepsilon$ *для* $i = 0, 1, ..., n-1$;
2. $a \in K_0$ *и* $b \in K_{n-1}$;
3. $K_i \cap K_{i+1} \neq \varnothing$ *для* $i = 0, 1, ..., n-2$.

Theorem (Теорема Хана-Мазуркевича)

Метризуемый компакт X является непрерывным образом отрезка если и только если X связен и локально связен.

Доказательство

($\Rightarrow$) **вытекает из предложения 2. Докажем** ($\Leftarrow$)**.**

Пусть ρ метрика X. Построим компактное дескриптивное совершенное дерево T, a_u, b_u, K_u, U_u для $u \in T$ таким образом, что выполняются условия:

1. $a_u, b_u \in K_u \subset U_u \subset X$, K_u компактное связное, U_u открытое связное для $u \in T$;
2. $a_\varnothing, b_\varnothing \in K_\varnothing = U_\varnothing = X$;
3. $$K_u \subset \bigcup\{K_{u\frown x} \ : \ x \in \mathsf{suc}(u,T)\} \subset \bigcup\{U_{u\frown x} \ : \ x \in \mathsf{suc}(u,T)\} \subset U_u$$ для $u \in T$;
4. $\operatorname{diam}_\rho(U_u) \leqslant \frac{1}{n}$ если $n > 0$ и $u \in \mathsf{Lv}_n(T)$;
5. если $u \in T$, $x, y \in \mathsf{suc}(u,T)$, $x < y$, x и y соседние элементы в $\mathsf{suc}(u,T)$, то $$b_{u\frown x} = a_{u\frown y};$$
6. если $n \in \omega$, $u, v \in \mathsf{Lv}_n(T)$, $u <_n v$, u и v соседние элементы в $(\mathsf{Lv}_n(T), <_n)$, $x = \max \mathsf{suc}(u,T)$ и $y = \min \mathsf{suc}(v,T)$, то $$b_{u\frown x} = a_{v\frown y}.$$

Определим A-систему $\Phi : T \to \mathsf{Exp}(X)$. Положим $\Phi(u) = \overline{U_u}$ для $u \in T$.

A-система Φ непрерывна. Из (2), (3) и предложения **??** вытекает, что $\ker \Phi = X$. Из (4), (5) и предложения 1 вытекает, что существуют непрерывное отображение $h\colon [T]_{\mathfrak{n}} \to \ker \Phi$, такое что $\widehat{\Phi} = h \circ q_T$. Так как $\ker \Phi = X$ и $[T]_{\mathfrak{n}}$ гомеоморфно $\mathbb{I}$, то X является непрерывным образом $\mathbb{I}$.

Конец