Введение в топологию

Связность и нульмерность

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 10, 09.11.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Связные пространства

Пространство X называется *связным*, если не существует разбиения $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ пространства X на два непустых открытых подмножества A и B. В противном случае пространство X называется *несвязным*.

Соответственно, пространство X является несвязным, если существует разбиения $X = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ пространства X на два непустых открытых подмножества A и B.

Множество A является дополнением до открытого множества B и, следовательно, замкнуто. Множество A является открытым и замкнутым, то есть *открыто-замкнутым*. Дополнение до открыто-замкнутого множества открыто-замкнуто, то есть множество B тоже открыто-замкнуто.

Предложение

Пространство X связно если и только если любое открыто-замкнутое непустое подмножество U пространства X совпадает с X.

Пустое пространство и одноточечное связны. Среди двоеточий, связны андидискретное двоеточие и связное двоеточие.

Theorem

Непрерывный образ связного пространства связен.

Предложение

Пусть X пространство, $Y \subset X$ связное подпространство и U открыто-замкнутое подмножество X. Тогда либо $Y \subset U$ либо $Y \cap U = \varnothing$.

Предложение

Пусть X *пространство,* $X = A \cup B$*,* $A \cap B \neq \varnothing$ *и подпространства* A *и* B *связны. Тогда* X *связно.*

Предложение

Пусть X *пространство и для любых* $x, y \in X$ *существует связное* $C \subset X$*, такое что* $x, y \in C$*. Тогда* X *связно.*

Предложение

Пусть X *пространство и* $\mathcal{C}$ *есть некоторое семейство связных подмножеств* X*. Если* $A \cap B \neq \varnothing$ *для* $A, B \in \mathcal{C}$*, то множество* $\bigcup \mathcal{C}$ *связно.*

Theorem

Пусть X пространство и $Y \subset X = \overline{Y}$ всюду плотное связное подпространство. Тогда X связно.

Доказательство.

Пусть U непустое открыто-замкнутое подмножество X. Так как Y всюду плотно, то $V = Y \cap U \neq \varnothing$ непусто. Так как V непусто и открыто-замкнуто в Y, то из связности Y, в силу предложения 1, вытекает, что $V = Y$. Следовательно, $Y \subset U$. Так как U замкнуто и Y всюду плотно, то $U = X$. Из предложения 1 вытекает, что X связно. $\square$

Theorem

Пусть X и Y связные пространства. Тогда произведение $X \times Y$ связно.

Доказательство.

Пусть $x = (a, b) \in X \times Y$ и $y = (c, d) \in X \times Y$. Положим $A = \{a\} \times Y$, $B = X \times \{d\}$ и $C = A \cup B$. Ток как A и B связны и $A \cup B \neq \varnothing$, то, в силу предложения 3, C связно. Так как $x, y \in C$, то из предложения 4 вытекает, что $X \times Y$ связно. $\square$

Theorem

Отрезок вещественной прямой связен.

Доказательство.

Предположим, что отрезок $[a, b]$ несвязен. Пусть $[a, b] = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$ есть разбиения отрезка $[a, b]$ на два непустых открыто-замкнутых в $[a, b]$ подмножества A и B. Пусть $a' \in A$ и $b' \in B$.

Будем считать $a' < b'$, случай $b' < a'$ вытекает из случая $a' < b'$. Положим $A' = [a', b'] \cap A$ и $B' = [a', b'] \cap B$. Тогда $a' \in A'$, $b' \in B'$, A' и B' есть разбиение отрезка $[a', b']$ два непустых открыто-замкнутых в $[a', b']$ множества. Пусть $m = \inf B'$. Тогда $m \in B'$ и $a' < m$. Так как $[a', m) \subset A'$ и A' замкнуто, то $m \in A'$. Получаем $m \in A' \cap B' \neq \varnothing$. Противоречие. $\square$

Компоненты и квазикомпоненты связности

Пусть X пространство. Определим два отношения эквивалентности $\sim_c$ и $\sim_q$ на пространстве X. Пусть $x, y \in X$.

Положим $x \sim_c y$ если существует связное $C \subset X$, для которого $x, y \in C$. Так как одноточечное пространство связно, то отношение $\sim_c$ рефлексивно, то есть $x \sim_c x$. Ясно, отношение $\sim_c$ симметрично. Транзитвность $\sim_c$ вытекает из предложения 3. Класс эквивалентности по отношению $\sim_c$, содержащий точку x, обозначим через C_x. Множество C_x называется *компонентой связности* точки x.

Положим $x \sim_q y$ если выполняется условие: если U открыто-замкнутое подмножество X и $x \in U$, то $y \in U$. Непосредственно проверяется, что $\sim_q$ является отношением эквивалентности. Класс эквивалентности по отношению $\sim_q$, содержащий точку x, обозначим через Q_x. Множество Q_x называется *квазикомпонентой связности* точки x.

Утверждение

Компонента связности C_x *является наибольшим связным множеством, содержащим* x. *Компонента связности* C_x *замкнута.*

Утверждение

Компонента квазисвязности Q_x *является пересечением открыто-замкнутых множеств, содержащим* x. *Квазикомпонента связности* Q_x *замкнута.*

Утверждение

$C_x \subset Q_x$.

Пространство X называется *локально связным*, если во всякой окрестности произвольной точки $x \in X$ содержится связная окрестность.

Theorem

Пусть X топологическая пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X локально связное пространство;*
2. *для любой точки $x \in X$ компонента связности C_x открыто-замкнута и совпадает с квазикомпонентой Q_x;*
3. *существует база X, состоящая из связных множеств.*

Доказательство.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). В силу утверждения 1, компонента связности C_x замкнута и связна.

Пусть $y \in C_x$. Так как X локально связно, то существует связная окрестность V точки y. Из предложения 3 вытекает, то $C_x \cup V$ связно. Тогда, в силу утверждения 1, $C_x \cup V \subset C_x$, то есть $V \subset C_x$. Следовательно, y внутренняя точка множества C_x. Мы доказали, что C_x открыто.

Компонента связности C_x открыто-замкнута. Из утверждения 2 вытекает $Q_x \subset C_x$. Из утверждения 3 вытекает $C_x \subset Q_x$. Следовательно, $C_x = Q_x$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Докажем, что все открытые связные подмножества X образуют базу X. Пусть $x \in X$ и U окрестность x. Пусть $V \subset U$ открытая окрестность x. Подпространство V локально связно, поэтому, в силу (2), компонента связности C точки x в V открыта в V и связна. Тогда V открытая связная окрестность точки x, для которой $V \subset U$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\square$

Предложение

Пусть X компактное пространство и $\mathcal{B}$ база фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Тогда $F = \bigcap \mathcal{B} \neq \varnothing$ и для любой окрестности U множества F существует $B \in \mathcal{B}$, такое что $F \subset B \subset U$.

Доказательство.

Предположим противное, $F = \bigcup \mathcal{B} = \varnothing$. Тогда $\gamma = \{X \setminus F \,:\, F \in \mathcal{B}\}$ открытое покрытие X. Так как X компактно, то существует конечное подпокрытие $\mu \subset \gamma$. Тогда $\mu = \{X \setminus F \,:\, F \in \mathcal{M}\}$ для некоторого конечного $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}$. Так как $\bigcup \mu = X$, то $\bigcap \mathcal{M} = \varnothing$. Противоречие с тем, что $\mathcal{B}$ база фильтра.

Докажем от противного, что существует $B \in \mathcal{B}$, такое что $F \subset B \subset U$. Семейство $\mathcal{F} = \{V \setminus U \,:\, B \in \mathcal{B}\}$ является базой фильтра, состоящая из замкнутых множеств. Из доказанного вытекает, что $Q = \bigcap \mathcal{F}$ не пусто. Ясно, $Q \subset F$. Противоречие с $F \subset U$ и $U \cap Q = \varnothing$. $\square$

Theorem

Пусть X хаусдорфово компактное пространство. Тогда $C_x = Q_x$ для любого $x \in X$.

Доказательство.

В силу утверждений 1 и 3, достаточно показать, что Q_x связно. Предположим противное. Квазикомпонета связности Q_x замкнуты (утверждение 2). Пусть $Q_x = P \cup F$, $P \cap F = \varnothing$ и $x \in P$ для некоторых замкнутых непустых $P, F \subset X$.

Так как X нормальное пространство (теорема **??**), то существуют открытые непересекающиеся окрестности U и V множеств P и F. Множества $W = U \cup V$ является открытой окрестностью множества Q_x.

Лемма

Существует открыто-замкнутое $O \subset X$, такое что $Q_x \subset O \subset W$.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{U}$ есть семейство открыто-замкнутых множеств, содержащим x. Семейство $\mathcal{U}$ является базой фильтра и, в силу утверждения 2, $Q_x = \bigcap \mathcal{U} \subset W$. Из предложения 6 вытекает, что $Q_x \subset O \subset W$ для некоторого $O \in \mathcal{U}$. □

Множество $S = O \cap U$ открыто. Так как $S = O \cap \overline{U}$, то S замкнуто. Тогда множество S открыто замкнуто и

$$x \in P \subset S \subset U \subset X \setminus F.$$

Из утверждения 2 вытекает, что $Q_x \subset S$. Противоречие с $\varnothing \neq F \subset Q_x$. □

Пример не совпадения компоненты и квазикомпоненты

Определим пространство X как подпространство плоскости $\mathbb{R}^2$. Прямая l_0 — прямая $x = 0$. Прямая l_1 — прямая $x = 1$. Для целых $n \geqslant 3$, обозначим через P_n прямоугольник (периметр прямоугольника) со сторонами на прямых: $x = \frac{1}{n}$, $x = 1 - \frac{1}{n}$, $y = n$, $y = -n$. Положим

$$X = l_0 \cup l_1 \cup \bigcup_{n=3}^{\infty} P_n.$$

Пространство X локально компактно.

Пример не совпадения компоненты и квазикомпоненты, II

Найдем квазикомпоненту Q_O точки $O = (0,0)$. Пусть U открыто-замкнутое подмножество X, содержащие O. Тогда существует $m \in \mathbb{N}$, такое что $P_n \cap U \neq \varnothing$ для $n > m$. Так как множества l_0 и P_n связны, то $l_0 \subset U$ и $P_n \subset U$ для $n > m$. Положим $M = l_0 \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} P_n$. Тогда

$$U_m = \overline{M} = l_0 \cup l_1 \cup \bigcup_{n=m+1}^{\infty} P_n \subset U.$$

Множество U_m открыто-замкнуто. Следовательно,

$$Q_O = \bigcap_{m=4}^{\infty} U_m = l_0 \cup l_1.$$

Квазикомпонента Q_O отличается от компоненты точки O, так как Q_O несвязно.

Линейно связные пространства

Пусть X пространство. Обозначим через $\mathbb{I}$ отрезок $[0, 1]$.

Непрерывное отображение $\varphi\colon \mathbb{I} \to X$ называется *путём* в пространстве X. Точки $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ называются соответственно *началом* и *концом* пути φ. Если начало и конец пути φ совпадают, то путь φ называется *петлёй*. Будем говорить, что путь φ *соединяет точки* $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$.

Пространство X называется *линейно связным*, если любые две его точки можно соединить путём.

Предложение

Линейно связное пространство связно.

Введем отношение $\sim_l$ на пространстве X. Пусть $x, y \in X$. Положим $x \sim_l y$ если существует путь φ в пространстве X, такое что x начало пути φ и y конец пути φ.

Утверждение

Отношение $\sim_l$ является отношением эквивалентности.

Доказательство.

Пусть $x, y, z \in X$.

Проверим рефлексивность $\sim_l$: $x \sim_l x$. Положим $\varphi(t) = x$ для $t \in \mathbb{I}$. Путь φ соединяет x с x.

Проверим симметричность $\sim_l$: если $x \sim_l y$, то $y \sim_l x$. Пусть φ есть путь, который соединяет x и y. Положим $\psi(t) = \varphi(1-t)$ для $t \in \mathbb{I}$. Тогда ψ соединяет y и x.

Проверим транзитивность $\sim_l$: если $x \sim_l y$ и $y \sim_l z$, то $x \sim_l z$. Пусть путь φ соединяет x с y и путь ψ соединяет y с z. Положим

$$\theta(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & \text{для } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \psi(2(t - \frac{1}{2})), & \text{для } t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

для $t \in \mathbb{I}$. Путь θ соединяет x с z. $\square$

Класс эквивалентности по отношению эквивалентности $\sim_l$ называется *компонентой линейной связности*. Компонента линейной связности, содержащая точку x, обозначим L_x.

Утверждение

Компонента линейной связности L_x линейно связна.

Утверждение

$L_x \subset C_x$

Пространство X назовем *локально линейно связным*, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности U точки x существует линейно связная окрестность V, такая что $x \in V \subset U$.

Theorem

Пусть X топологическая пространство. Следующие условия эквивалентны:

1. *X локально линейно связное пространство;*
2. *для любой точки $x \in X$ компонента линейной связности L_x открыто-замкнута и совпадает с компонентой C_x и квазикомпонентой Q_x;*
3. *существует база X, состоящая из линейно связных множеств.*

Доказательство.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $y \in L_x$. Так как X локально линейно связно, то существует линейно связная окрестность V точки y. Тогда $L_x \cup V$ линейно связно. Тогда $L_x \cup V \subset L_x$, то есть $V \subset L_x$. Следовательно, y внутренняя точка множества L_x. Мы доказали, что L_x открыто. Каждый класс эквивалентности $\sim_l$ открыт. Следовательно, множество $L_x = X \setminus \bigcup\{L_y : y \in X \setminus L_x\}$ замкнуто.

Компонента линейной связности L_x открыто-замкнута. Из утверждения 2 вытекает $Q_x \subset L_x$. Из утверждений 3 и 6 вытекает $L_x \subset C_x \subset Q_x$. Следовательно, $L_x = C_x = Q_x$.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Докажем, что все открытые линейно связные подмножества X образуют базу X. Пусть $x \in X$ и U окрестность x. Пусть $V \subset U$ открытая окрестность x. Подпространство V локально линейно связно, поэтому, в силу (2), компонента линейной связности L точки x в V открыта в V и линейно связна. Тогда V открытая линейно связная окрестность точки x, для которой $V \subset U$.

Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\square$

Вполне не связные и нульмерные пространства

T_1-Пространство X называется *нульмерным*, если оно имеет базу, состоящую из открыто-замкнутых множеств.

Пространство X называется *вполне несвязным*, если несвязно всякое его подпространство, содержащее более одной точки.

Предложение

Нульмерное пространство вполне регулярно.

Предложение

Нульмерное пространство вполне несвязно.

Предложение

1. *Подпространство нульмерного пространства нульмерно.*
2. *Подпространство вполне несвязного пространства вполне несвязно.*
3. *Произведение нульмерных пространств нульмерно.*
4. *Произведение вполне несвязных пространств вполне несвязно.*

Предложение

Пространство X вполне несвязно если и только если $C_x = \{x\}$ для всех $x \in X$.

Theorem

Вполне несвязное компактное хаусдорфово пространство нульмерно.

Доказательство.

Из предложения 11 и теоремы 6 вытекает, что $Q_x = \{x\}$ для всех $x \in X$.

Пусть $x \in X$ и U окрестность x. Пусть $\mathcal{B}_x$ есть семейство открытых-замкнутых множеств, содержащих точку x. Тогда $\{x\} = Q_x = \bigcap \mathcal{B}_x$. Семейство $\mathcal{B}_x$ является базой фильтра, состоящей замкнутых множеств. Из предложения 6 вытекает, что $O \subset U$ для некоторого $O \in \mathcal{B}_x$. $\square$

Конец