Введение в топологию

Упорядоченные множества, ординалы, кардиналы, аксиома выбора

Резниченко Евгений Александрович

мехмат, МГУ

Лекция 1, 07.09.2024

http://gtopology.math.msu.su/t2024

Содержание

Упорядоченные множества

Пусть X множество и $<$ отношение на X. Множество с отношением также обозначается как $(X, <)$. Если выполняются условия

(O_1) (транзитивность) если $x < y$ и $y < z$, то $z < z$;

(O_2) (строгая антисимметричность) если $x < y$, то $y \nless x$.

то множество называется *частично упорядоченным* (ч.у.м). С отношением $<$ связана отношение $\leqslant$: $x \leqslant y$ если $x < y$ или $x = y$.

Если дополнительно выполняется условие

(O_3) либо $x < y$, либо $y < x$, для различных x и y,

то множество называется *линейно упорядоченным* (л.у.м).

Отображение $f : X \to Y$ линейно упорядоченных множеств является порядковым изоморфизмом, если и только если f сюръекция и отображение f строго возрастающее.

Если дополнительно выполняется условие

(O_4) существует минимум $\min M$ множества M для каждого непустого $M \subset X$

то множество называется *вполне упорядоченным* (в.у.м).

Ординалы

Множество λ назовем *ординалом*, если выполняются условия

(Ord_0) каждый элемент λ является множеством (λ — семейство множеств);

(Ord_1) если $\gamma \in \lambda$, то $\gamma \subset \lambda$;

(Ord_2) $(\lambda, <)$ вполне упорядоченное множество, где порядок $<$ на λ определен следующим образом: для $\alpha, \beta \in \lambda$, $\alpha < \beta$ если $\alpha \in \beta$.

Класс всех ординалов обозначим через Ord.

Утверждение

Пусть $\lambda \in \mathsf{Ord}$ и $\alpha \in \lambda$. Тогда $\alpha \in \mathsf{Ord}$ и $(-\infty, \alpha) = \alpha$, α как множество является собственным начальным интервалом в λ.

Определим порядок $<$ на классе Ord: для ординалов $\alpha, \beta \in \mathsf{Ord}$, $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \in \beta \Leftrightarrow \alpha \subsetneq \beta \Leftrightarrow$ множество α собственный начальный интервал множества β. Тогда каждый ординал является собственным начальным интервалом класса Ord.

Утверждение

Любые два ординала $\lambda, \gamma \in \mathsf{Ord}$ *сравнимы: либо* $\lambda = \gamma$*, либо* $\lambda < \gamma$*, либо* $\gamma < \lambda$*.*

Следовательно, Ord линейно упорядоченно, также легко видеть Ord вполне упорядочен.

Для $\lambda \in \mathsf{Ord}$ обозначим

$$\lambda + 1 = \lambda \cup \{\lambda\}.$$

Утверждение

$\lambda + 1 \in \mathsf{Ord}$ *и* λ *является максимальным элементом в* $\lambda + 1$*.*

Утверждение

Пусть $M \subset \mathsf{Ord}$ *есть множество ординалов и* $\mu = \bigcup M$*. Тогда* $\mu \in \mathsf{Ord}$*,* $M \subset \mu + 1$ *и* $\mu = \sup M$*.*

Для отображения $\psi : A \to B$ обозначим

1. $\operatorname{Dom}\psi = A$ — *область определения* отображения ψ;
2. $\operatorname{Im}\psi = \{\psi(a) : a \in A\}$ — *образ* отображения ψ.

Для отображения $f : \lambda \to X$, определенного на ординале, обозначим

$$f[\gamma] = \{f(\alpha) : \alpha \in \gamma\}$$

для $\gamma \in \lambda + 1$ — образ множества $\gamma \subset \lambda$ при отображении f.

Предложение (Главный технический результат)

Пусть X множество, $\mathcal{M} = \{M \subset X : M \neq X\}$ и $\Phi : \mathcal{M} \to X$ есть отображение, для которого выполняется условие: $\Phi(M) \notin M$ для $M \in \mathcal{M}$. Тогда существуют единственные ординал λ и биекция $\varphi : \lambda \to X$, такие что $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$.

Биекция φ означает нумерацию множества X: $X = \{x_\alpha : \alpha < \lambda\}$, где $x_\alpha = \varphi(\alpha)$. Тогда $\varphi[\alpha] = \{x_\beta : \beta < \alpha\}$. Формула $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ означает

$$x_\alpha = \Phi(\{x_\beta : \beta < \alpha\}).$$

Доказательство предложения 1.

Обозначим

$$\mathcal{Q} = \{\psi : \psi \text{ иньекция в } X,\ \operatorname{Dom}\psi \in \mathsf{Ord},$$
$$\psi(\alpha) = \Phi(\psi[\alpha]) \text{ для } \alpha \in \operatorname{Dom}\psi\}.$$

Lemma

Пусть $\psi, \nu \in \mathcal{Q}$, $\gamma = \operatorname{Dom}\psi$ *и* $\theta = \operatorname{Dom}\psi$. *Если* $\gamma \leqslant \theta$, *то* $\psi = \nu|_\gamma$.

Доказательство.

Предположим противное. Пусть $\mu = \min\{\alpha \in \gamma : \psi(\alpha) \neq \nu(\alpha)\}$. Тогда $M = \psi[\mu] = \nu[\mu]$ и $\psi(\mu) \neq \nu(\mu)$. Противоречие с тем что $\psi(\mu) = \Phi(\psi[\mu]) = P(M) = \Phi(\nu[\mu]) = \nu(\mu)$. □

Положим $\lambda = \bigcup_{\psi \in \mathcal{Q}} \operatorname{Dom}\psi \in \mathsf{Ord}$. Из леммы вытекает, что существует отображение $\varphi : \lambda \to X$, продолжающее любое $\psi \in \mathcal{Q}$, $\varphi|_\gamma = \psi$ для $\gamma = \operatorname{Dom}\psi$. Тогда $\varphi \in \mathcal{Q}$.

Продолжение доказательство предложения 1.

Пусть $Y = \operatorname{Dom}\varphi$. Докажем, что $Y = X$. Предположим противное. Определим отображение $\varphi^+ : \lambda + 1 \to X$:

$$\varphi^+(\alpha) = \begin{cases} \varphi(\alpha), & \text{если } \alpha < \lambda, \\ \Phi(Y), & \text{если } \alpha = \lambda. \end{cases}$$

Тогда $\varphi^+ \in \mathcal{Q}$. Противоречие, так как $\operatorname{Dom}\varphi^+ \not\subset \operatorname{Dom}\varphi$.

Мы нашли $\varphi \in \mathcal{Q}$ с $\operatorname{Im}\varphi = X$. Единственность вытекает из леммы. $\square$

Theorem

Для любого в.у.м X существует единственный ординал λ, порядково изоморфный X.

Доказательство.

Пусть $\mathcal{M} = \{M \subset X \ : \ M \neq X\}$ и

$$\Phi : \mathcal{M} \to X, \ \ M \mapsto \min X \setminus M.$$

Для ординала λ, биекция $\varphi : \lambda \to X$ является порядковым изоморфизмом если и только если выполняется условие: $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$. Из предложения вытекает, что существуют единственные λ и φ, для которых выполняется это условие. □

Для в.у.м X обозначим через $\mathsf{Ord}(X)$ тот единственный ординал, который порядково изоморфный X.

Утверждение

Пусть $\lambda, \gamma \in \mathsf{Ord}$. Если λ порядково изоморфно γ, то $\lambda = \gamma$.

Доказательство.

Так как λ порядково изоморфно γ, то $\mathsf{Ord}(\gamma) = \lambda$. Так как γ порядково изоморфно γ, то $\mathsf{Ord}(\gamma) = \gamma$. Следовательно, $\lambda = \gamma$. □

Натуральные числа

В теории множеств натуральны числа определяются как конечные ординалы:

$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing, \\
1 &= 0 + 1 = \{0\} = \{\varnothing\}, \\
2 &= 1 + 1 = \{0, 1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \\
3 &= 2 + 1 = \{0, 1, 2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}, \\
&\ldots \\
n + 1 &= \{0, 1, 2, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

Множество всех неотрицательных целых чисел обозначается как ω, это первый бесконечный ординал:

$$\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Индукция и трансфинитная индукция

Пусть λ ординал (или даже $\lambda = \mathsf{Ord}$). Пусть $\mathcal{P}(\alpha)$ есть некоторое математическое высказывание (логическая формула) с параметром $\alpha \in \lambda$. Трансфинитная индукция, это рассуждения, как правило, по следующей схеме:

> Докажем по (трансфинитной) индукции, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.
>
> 1) **База индукции.** Доказываем $\mathcal{P}(0)$.
> 2) **Шаг индукции, α последовательный ординал.** Пусть $\alpha = \beta + 1 < \lambda$ последовательный ординал. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.
> 3) **Шаг индукции, α предельный ординал.** Пусть $\alpha < \lambda$ предельный ординал. Предположим, что $\mathcal{P}(\beta)$ верно для $\beta < \alpha$. Доказываем тогда, что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно.
>
> Мы доказали (по индукции), что $\mathcal{P}(\alpha)$ верно для $\alpha < \lambda$.

Для обычной индукции ($\lambda = \omega$), случай 3) не бывает, так как конечные ординалы не предельные. Тогда получается стандартная математическая индукция.

Теорема Цермело

В этом разделе содержатся наиболее важные и полезные следствия аксиомы выбора.

Theorem (Цермело)

Любое множество может быть вполне упорядочено.

Доказательство.

Пусть X множество и $\mathcal{M} = \{M \subset X \,:\, M \neq X\}$. Из аксиомы выбора вытекает, что существует отображение $\Phi : \mathcal{M} \to X$, такое что $\Phi(M) \in X \setminus M$ для $M \in \mathcal{M}$. Из главного предложения вытекает, что существуют $\lambda \in \mathsf{Ord}$ и биекция $\varphi : \lambda \to X$. □

Цепи

Пусть P есть ч.у.м и $M \subset P$. Множество M называется *цепью*, если M есть линейно упорядоченное подмножество P. Элемент $u \in P$ называется *верхней гранью* M, если $x \leqslant u$ для любого $x \in M$.
На множестве всех подмножеств

$$\mathscr{P}(X) = \{M \,:\, M \subset X\}$$

множества X есть естественная структура ч.у.м, $A \leqslant B$ если $A \subset B$. Соответственно, для $\mathcal{R} \subset \mathscr{P}(X)$ определены понятия цепи и верхней грани.

Предложение (2)

Пусть X есть множество, $\mathcal{L} \subset \mathscr{P}(X)$, $\mathcal{L} \neq \varnothing$ и выполняются условия

1. *если $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь, то $\bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$;*
2. *если $M \in \mathcal{L}$ и $M \neq X$, то $M \cup \{x\} \in \mathcal{L}$ для некоторого $x \in X \setminus M$.*

Тогда $X \in \mathcal{L}$.

Доказательство предложения 2

Рассмотрим сначала случай $\varnothing \in \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{M} = \{M \subset X \ : \ M \neq X\}$. Определим $\Phi : \mathcal{M} \to X$. Для $M \in \mathcal{M} \cap \mathcal{L}$ выберем $\Phi(M) \in X \setminus M$ таким образом, что $M \cup \{\Phi(M)\} \in \mathcal{L}$. Для $M \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L}$ выберем $\Phi(M) \in X \setminus M$ произвольно. Тогда $\Phi(M) \notin M$ для $M \in \mathcal{M}$.

Из предложения 1 вытекает, что существуют $\lambda \in \mathsf{Ord}$ и $\varphi : \lambda \to X$, для которых выполняется условие: $\varphi(\alpha) = \Phi(\varphi[\alpha])$ для $\alpha \in \lambda$.

Иными словами, $x_\alpha = \Phi(R_\alpha)$ для $\alpha < \lambda$, где $x_\alpha = \varphi(\alpha)$ для $\alpha < \lambda$ и $R_\alpha = \{x_\beta \ : \ \beta < \alpha\}$ для $\alpha \leqslant \lambda$.

Тогда $R_0 = \varnothing$, $R_\lambda = X$, $R_\beta \subset R_{\beta+1} = R_\beta \cup \{\Phi(R_\beta)\} \in \mathcal{L}$ для $\beta < \lambda$ и $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$ если $\alpha \leqslant \lambda$ предельный ординал. Последовательность множеств $(R_\alpha)_{\alpha \leqslant \lambda}$ возрастающая: если $\alpha \leqslant \beta \leqslant \lambda$, то $R_\alpha \subset R_\beta$.

Доказательство предложения 2

Трансфинитной индукцией по $\alpha < \lambda + 1$ докажем $R_\alpha \in \mathcal{L}$.

База индукции. По условию $R_0 = \varnothing \in \mathcal{L}$.
Шаг индукции. Пусть $0 < \alpha < \lambda + 1$ и $P_\beta \in \mathcal{L}$ для $\beta < \alpha$.

Рассмотрим случай: $\alpha = \gamma + 1$ последовательный ординал. Тогда $R_\alpha = R_\gamma \cup \{\Phi(R_\gamma)\}$. Так как $R_\gamma \in \mathcal{L}$, то, по определению Φ, $R_\alpha \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим случай: α предельный ординал. Тогда $R_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} R_\beta$. Так как семейство $\mathcal{R} = \{R_\beta \, : \, \beta < \alpha\}$ является цепью и $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$, то из условия (1) вытекает, что $R_\alpha = \bigcup \mathcal{R} \in \mathcal{L}$.

Итак, мы доказали R_α для всех $\alpha \leqslant \lambda$. Так как $R_\lambda = X$, то $X \in \mathcal{L}$.

Рассмотрим общий случай, не обязательно $\varnothing \in \mathcal{L}$. Пусть $L \in \mathcal{L}$. Положим $\widetilde{X} = X \setminus L$, $\widetilde{\mathcal{L}} = \{M \setminus L \, : \, L \subset M \in \mathcal{L}\}$. Тогда $\varnothing \in \widetilde{\mathcal{L}}$ и для $\widetilde{X}$ и $\widetilde{\mathcal{L}}$ выполняются условия (1) и (2) предложения. Тогда из доказанного случая предложения вытекает $\widetilde{X} \in \widetilde{\mathcal{L}}$. Следовательно, $X \in \mathcal{L}$.

Лемма Цорна

Theorem (Лемма Цорна)

Если в частично упорядоченном множестве X для всякой цепи существует верхняя грань, то для каждого элемента $a \in X$ существует максимальный элемент множества X, больший или равный элементу a.

Доказательство.

Предположим противное. Положим

$$\mathcal{L} = \{L \subset X : a \in L,\ L \text{ является цепью в } X\}.$$

Проверим условия предложения 2.

Проверим условие (1). Пусть $\mathcal{R} \subset \mathcal{L}$ цепь множеств и $R = \bigcup \mathcal{R}$. Ясно, $a \in R$. Так как каждый элемент $\mathcal{R}$ является цепью и $\mathcal{R}$ цепь множеств, то R цепь в X.

Проверим условие (2). Пусть $L \in \mathcal{L}$. Пусть m есть верхняя грань L. Так как $a \leqslant m$, то m не максимальный элемент X. Пусть $b > m$. Тогда b верхняя грань L и $b \notin L$. Так как L цепь и b верхняя грань L, то $L \cup \{b\}$ тоже цепь. Так как $b \notin L$, $L \cup \{b\}$ цепь и $a \in L \subset L \cup \{b\}$, то $L \cup \{b\} \in \mathcal{L}$.

Из предложения 2 вытекает $X \in \mathcal{L}$. Следовательно X цепь, X л.у.м. Пусть m есть верхняя грань X. Так как X л.у.м, то m является максимумом X и $a \leqslant m$. Противоречие. □

Цепь в ч.у.м X называется *максимальной*, если она не содержится ни в какой другой цепи.

Theorem (принцип максимума Хаусдорфа)

Любая цепь ч.у.м содержится в максимальной цепи.

Доказательство.

Множество $\mathcal{C}$ цепей в ч.у.м X образуют ч.у.м относительно порядка включения множеств. Тогда максимальная цепь это максимальный элемент в $\mathcal{C}$. Так как объединение цепи цепей является цепью, то любая цепь $\mathcal{Q} \subset \mathcal{C}$ имеет верхнею грань $\bigcup \mathcal{Q}$. Тогда из леммы Цорна вытекает, что любая цепь X содержится в максимальной цепи. $\square$

Кардиналы

Пусть X и Y множества. Множества X и Y называется равномощными, если существует биекция между X и Y. В этом случае пишем $|X| = |Y|$. Отношение равномощности является отношением эквивалентности.

Definition (1-ый вариант, Кантор)

Мощностью $|X|$ называется класс эквивалентности относительно отношения равномощности, который содержит X: $|X| = \{Y : |X| = |Y|\}$.

Введем отношение $\leqslant$ на мощностях множеств: $|X| \leqslant |Y|$ если существует иньективное отображение из X в Y.

Очевидно это отношение транзитивно: если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |Z|$, то $|X| \leqslant |Z|$.

Ординал τ назовем *кардиналом*, если для любого $\gamma \in \tau$ не существует биекции между γ и λ. Класс всех кардиналов обозначим Card. Для множества X обозначим

$$\mathsf{Card}(X) = \min\{\lambda \in \mathsf{Ord} : \lambda \text{ равномощно } X\}.$$

Очевидно, $\mathsf{Card}(X) \in \mathsf{Card}$.

Definition (2-ой вариант, современный)

Определим *мощность* $|X| = \mathsf{Card}(X)$ для множества X.

По сути, это эквивалентные определения.

Теорема Кантора – Бернштейна

Из определения и свойств ординалов вытекает следующее утверждение.

Из определения и свойств ординалов вытекает следующее утверждение.

Theorem (Кантора – Бернштейна)

Пусть X и Y множества. Если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.

Обозначим

$$\mathscr{P}(X) = \{M \ : \ M \subset X\}$$

множество всех подмножеств множества X. Множество

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

называется *симметрической разностью* множеств A и B. Очевидно, $A = B$ если и только если $A \triangle B = \varnothing$.

Теорема Кантора

Theorem (Кантора)

Пусть X множество. Тогда $|X| < |\mathscr{P}(X)|$.

Доказательство.

Множество X иньективно вкладывается в $\mathscr{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$. Следовательно $|X| \leqslant |\mathscr{P}(X)|$. Докажем, что $|X| \neq |\mathscr{P}(X)|$. Предположим противное. Тогда существует биекция $f : X \to \mathscr{P}(X)$. Положим $M = \{x \in X \ : \ x \notin f(x)\}$. Тогда $M \notin f(X)$ так как $x \in M \triangle f(x) \neq \varnothing$ для $x \in X$. □

Отметим, что $\omega \subset \mathsf{Card}$ и $\omega \in \mathsf{Card}$. Теорема Кантора обеспечивает, что Card неограниченно в Ord. Обозначим через Card_* все бесконечные кардиналы, $\mathsf{Card}_* = \mathsf{Card} \setminus \omega$. Тогда Card_* порядково изоморфно Ord, класс Card_* можно занумеровать ординалами

$$\mathsf{Card}_* = \{\omega_\alpha \ : \ \alpha \in \mathsf{Ord}\}.$$

Тогда $\omega = \omega_0$. Также часто обозначают $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$.

Спасибо