Топологические группы

Ольга Викторовна Сипачева
Кафедра общей топологии и геометрии
o-sipa@yandex.ru

На всякий случай:
Группа G — это множество вместе с заданными на нём ассоциативной бинарной операцией $* : G \times G \to G$, унарной операцией ${}^{-1} : G \to G$ и 0-арной операцией e. При этом должны выполняться условия $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$ и $g * e = e * g = g$ для всех $g \in G$.

стандартные обозначения для операций над множествами в группах:
$A * B = \{a * b : a \in A, b \in B\}$, $a * B = \{a\} * B$, $A * b = A * \{b\}$, $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$.

Определение

Группа G с топологией $\mathscr{T}$ называется топологической группой, если групповая операция (умножение) $\cdot : G \times G \to G$ и операция взятия обратного элемента ${}^{-1} : G \to G$ непрерывны относительно топологии $\mathscr{T}$ на G и топологии декартова произведения на $G \times G$. При этом $\mathscr{T}$ называется групповой топологией, или топологией, согласованной с групповыми операциями.

Примеры

- Любая группа превращается в топологическую группу, будучи снабжённой дискретной топологией.
- Прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией является топологической группой (а прямая Зоргенфрея с той же операцией сложения топологической группой не является — операция перехода к обратному не непрерывна).
- Топологической группой является и любая тихоновская степень прямой с покоодинатными умножением и взятием обратного, так что любое тихоновское пространство является подпространством топологической группы.
- На пространстве P иррациональных чисел можно ввести групповую операцию, относительно которой P является топологической группой. Действительно, пространство P гомеоморфно тихоновскому произведению $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \cong \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, а на степени $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ дискретной группы $\mathbb{Z}$ определены операции покоординатного сложения и перехода к обратному. Нетрудно убедиться в том, что эти операции непрерывны относительно топологии тихоновского произведения.

- То же верно и для канторова дисконтинуума C — он гомеоморфен счётной тихоновской степени двухэлементной дискретной группы $\mathbb{Z}_2$.

Специфические топологические свойства топологических групп

Уже из самогó существования непрерывных групповых операций вытекают многие топологические свойства топологических групп, вообще говоря, не присущие общим топологическим пространствам, например

1. *Любая топологическая группа G является однородным топологическим пространством, т.е. для любых точек $g, h \in G$ существует гомеоморфизм $f : G \to G$ такой, что $f(g) = h$.*

   Действительно, в качестве f можно взять отображение, определённое правилом $x \mapsto h \cdot g^{-1} \cdot x$. Оно непрерывно в силу непрерывности умножения и обладает непрерывным обратным $x \mapsto g \cdot h^{-1}x$.

   (Неоднородные топологические пространства: сходящаяся последовательность; любое недискретное пространство, имеющее хотя бы одну изолированную точку; отрезок.)

Таким образом, топология любой топологической группы полностью определяется окрестностями единицы в этой группе: для любой окрестности U любого элемента g топологической группы G множество $g^{-1} \cdot U$ (так же как и $U \cdot g^{-1}$) является окрестностью единицы, так что все окрестности любого $g \in G$ являются окрестностями единицы, помноженными на g (или, как говорят, сдвигами окрестностей единицы на g), и зная, например, локальную базу в единице, мы тем самым знаем и локальные базы во всех точках G, т.е. всю топологию.

Поскольку $1 \cdot 1 = 1$ и $1 = 1^{-1}$, из непрерывности умножения и взятия обратного следует, что для любой окрестности единицы U в топологической группе существуют окрестности единицы V и W такие, что $V \cdot V \subset U$ и $W^{-1} \subset U$.

2. *Если топологическая группа удовлетворяет акиоме отделимости T_0, то она удовлетворяет также и аксиомам T_1 и T_2. Кроме того, всякая топологическая группа удовлетворяет аксиомам T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.*

Действительно, предположим, что топологическая группа G удовлетворяет аксиоме T_0. Покажем, что тогда G удовлетворяет аксиоме T_2 (а значит, и T_1). Пусть $g, h \in G$, $g \neq h$, и пусть U — окрестность одной из этих точек, не содержащая другую; допустим для определённости, что $g \in U$ и $h \notin U$.

Пусть V — окрестность единицы, для которой $V \cdot V \subset g^{-1} \cdot U$ (она существует, потому что $g^{-1} \cdot U$ — окрестность единицы). Тогда V^{-1} — тоже окрестность единицы, а $g \cdot V$ и $h \cdot V^{-1}$ — окрестности точек g и h соответственно. Покажем, что $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$.

Предположим, что это не так; тогда для некоторых $v_1, v_2 \in V$ имеем $g \cdot v_1 = h \cdot v_2^{-1}$, откуда $h = g \cdot v_1 \cdot v_2$, а значит, $h \in g \cdot V \cdot V \subset g \cdot g^{-1} U = U$ в противоречие с определением U. Следовательно, $g \cdot V \cap h \cdot V^{-1} = \varnothing$. Это доказывает, что $G \in T_2$.

Ввиду доказанного утверждения в дальнейшем мы не будем уточнять, какой именно из аксиом T_0–T_2 удовлетворяет данная топологическая группа, и станем называть группу, удовлетворяющую любой из этих аксиом, просто отделимой.

Теперь докажем, что любая топологическая группа удовлетворяет аксиоме T_3. В силу однородности для этого достаточно показать, что какова бы ни была окрестность единицы U, существует окрестность единицы V, для которой $\overline{V} \subset U$. В качестве V можно взять любую окрестность единицы со свойством $V \cdot V \subset U$.

Действительно, у любой точки $g \notin U$ есть окрестность, не пересекающая V — это $g \cdot V^{-1}$ (если $g \cdot V^{-1} \cap V \neq \varnothing$, то $g \cdot v_1^{-1} = v_2$ для некоторых $v_1, v_2 \in V$, откуда $g \in V \cdot V \subset U$).

Доказательство того, что всегда $G \in T_{3\frac{1}{2}}$, несколько сложнее. Оно основано на понятии нормы и на следующем чисто алгебраическом утверждении, которое имеет исключительную важность для теории топологических групп.

Определение

Полунормой на группе G называется функция $\|\cdot\| \colon G \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $\|1\| = 0$,
2. $\|g\| = \|g^{-1}\|$ для всех $g \in G$ и
3. $\|g + h\| \leqslant \|g\| + \|h\|$ для всех $g, h \in G$.

Из этих свойств вытекает и свойство

4. $\|g\| \geqslant 0$ для всех $g \in G$.

Лемма (исключительной важности)

Пусть G — произвольная группа и U_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность её подмножеств со свойствами

1. $1 \in U_n$, 2. $U_n = U_n^{-1}$ *и* 3. $U_{n+1} \cdot U_{n+1} \subset U_n$

для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда на группе G существует полунорма $\|\cdot\|$ такая, что для каждого $n \in \mathbb{N}$

$$\left\{x \in G : \|x\| < \frac{1}{2^n}\right\} \subset U_n \subset \left\{x \in G : \|x\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}\right\}. \qquad (\star)$$

Доказательство этой леммы сводится к построению монотонной системы множеств $U(\frac{m}{2^n})$ со свойствами

$$U\Big(\frac{1}{2^n}\Big) = U_n \qquad \text{и} \qquad U\Big(\frac{m}{2^n}\Big) \cdot U\Big(\frac{1}{2^n}\Big) \subset U\Big(\frac{m+1}{2^n}\Big),$$

после чего норма определяется как

$$\|x\| = \sup_{y\in G} |f(yx) - f(y)|,$$

где

$$f(x) = \inf\Big\{\frac{m}{2^n} : x \in U(\frac{m}{2^n})\Big\}.$$

Одно из следствий важной леммы — то, что всякая топологическая группа удовлетворяет аксиоме $T_{3\frac{1}{2}}$. Более того, в топологической группе точки отделяются от не содержащих их замкнутых множеств не просто какими-то непрерывными функциями, а непрерывными полунормами, т.е. функциями, хорошо согласованными с групповой структурой; иными словами, шары относительно непрерывных полунорм образуют базу окрестностей единицы. Действительно, для любой окрестности единицы U в топологической группе G легко построить, пользуясь непрерывностью операций, последовательность окрестностей единицы $U_1 \subset U, U_2, U_3, \ldots$ со свойствами 1–3 из формулировки леммы. Нетрудно видеть, что полунорма, существование которой утверждается в лемме, непрерывна (это вытекает из формулы $(\star)$ и неравенства $\|g + h\| \leqslant \|g\| + \|h\|$). Ясно, что она отделяет 1 от $G \setminus U$.

Пересечение H всех окрестностей единицы в любой топологической группе G является замкнутой нормальной подгруппой, потому что в силу непрерывности операций и того, что $G \in T_3$, для любой окрестности единицы U и любого $g \in G$ существуют окрестности единицы V_1, V_2, V_3 и V_4 такие, что $V_1 \cdot V_1, V_2^{-1}, g^{-1} \cdot V_3 \cdot g, \overline{V}_4 \subset U$. Ясно, что факторгруппа G/H с топологией факторпространства является отделимой топологической группой, и между топологическими свойствами групп G и G/H имеется прозрачная связь. Так что по существу изучение топологических групп сводится к изучению отделимых топологических групп.

3. *Всякая отделимая топологическая группа, удовлетворяющая первой аксиоме счётности, метризуема.*

   Действительно, если у единицы топологической группы G имеется счётная база окрестностей $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, то неё имеется и счётная база окрестностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ со свойствами 1–3 из важной леммы. Её легко построить по индукции: надо положить $U_1 = V_1 \cap V_1^{-1}$, а затем, считая, что окрестность U_n уже построена, найти окрестность единицы W со свойством $W \cdot W \subset U_n \cap V_{n+1}$ и положить $U_{n+1} = W \cap W^{-1}$. Очевидно, множества $B_n = \left\{x : \|x\| < \frac{1}{2^n}\right\}$, где $\|\cdot\|$ — полунорма, существование которой утверждается важной леммой, тоже образуют базу окрестностей единицы, причём эта полунорма является нормой (т.е. $\|g\| \neq 0$ для $g \neq 1$), а соответствующая этой норме метрика $d(g,h) = \|g^{-1} \cdot h\|$ порождает топологию.

4. *Всякая σ-компактная (т.е. являющаяся объединением счётного числа компактов) топологическая группа обладает свойством Суслина.*

   Для компактов, не являющихся топологическими группами, это неверно, даже в предположении однородности этих компактов.

5. *Группы Ли*

   Определение

   Группа Ли — это группа вместе с заданной на ней структурой вещественно-аналитического многообразия, в которой групповые операции выражаются вещественно-аналитическими функциями от локальных координат.

   Другими словами, это топологическая группа G, в некоторой окрестности единицы которой (а значит, и в некоторой окрестности любой другой точки) все элементы можно представить в виде $g(\mathrm{t})$, где $\mathrm{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ — набор вещественных параметров, причём операции умножения и взятия обратного выражаются вещественно-аналитической вектор-функцией от совокупности параметров, что можно кратко записать как $g(\mathrm{t}) \cdot g^{-1}(\mathrm{s}) = g(f(\mathrm{t}, \mathrm{s}))$, где f — вещественно-аналитическая вектор-функция.

Известно, что не на всяком топологическом многообразии можно ввести структуру гладкого многообразия: существует компактное триангулируемое многообразие размерности 10 (т.е. компакт, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^{10}$, и который допускает триангуляцию), которое не гомеоморфно никакому гладкому многообразию. С группами ситуация иная: всякая топологическая группа, локально гомеоморфная евклидову пространству, допускает структуру группы Ли, и притом единственную; другими словами, для любой такой топологической группы G существуют группа Ли $\hat{G}$ и топологический изоморфизм (т.е. изоморфизм, являющийся одновременно гомеоморфизмом) между G и $\hat{G}$. Более того, вместо локальной евклидовости достаточно требовать, чтобы группа была локально компактной и не имела малых подгрупп (последнее условие означает, что некоторая окрестность единицы не содержит нетривиальных подгрупп). Таким образом, с точки зрения топологической алгебры группы Ли — это в точности локально компактные группы без малых подгрупп.

Приведённые примеры показывают, что наличие непрерывных групповых операций на топологическом пространстве оказывает весьма сильное влияние на топологические свойства этого пространства. Верно и обратное.

1. Недискретные отделимые групповые топологии существуют на на всех бесконечных группах. Группы, на которых такие топологии существуют, называются топологизируемыми. Вопрос о существовании нетопологизируемых бесконечных групп был поставлен в 1941 г. А.А. Марковым, который сформулировал гипотезу, что *всякая бесконечная группа топологизируема.* Проблема Маркова оставалась нерешённой почти сорок лет — до 1980 г., когда были построены сразу два принципиально разных примера нетопологизируемых групп, счётный и несчётный.

Счётную нетопологизируемую группу построил А.Ю. Ольшанский. Эта группа G содержит конечное множество $Z = \{1, z_1, \dots, z_k\}$ с тем свойством, что для всякого $g \in G \setminus \{1\}$ существует $n_g \in \mathbb{N}$, для которого $g^{n_g} \in Z \setminus \{1\}$, причём все числа n_g ограничены в совокупности одним числом $N \in \mathbb{N}$.

Таким образом, каждый отличный от единицы элемент g является решением одного из уравнений $x^i = z_j$, где $i \leqslant N$ и $j \leqslant k$. Множество решений любого такого уравнения замкнуто в любой отделимой групповой топологии на G, потому что оно является прообразом одноточечного (и следовательно, замкнутого в любой T_1-топологии) множества $\{z_j\}$ при отображении $f\colon x \mapsto x^i$, которое обязано быть непрерывным в силу непрерывности умножения. Стало быть, дополнение до единицы в группе G является конечным объединением замкнутых множеств и потому замкнуто в любой групповой топологии. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ (а значит, и все остальные одноточечные множества, так как топологические группы однородны) открыто в любой отделимой групповой топологии, т.е. любая отделимая групповая топология на G дискретна.

Несчётный пример построил С. Шелах. Он сконструировал свою группу G в предположении справедливости континуум-гипотезы (оно совместимо с аксиомами теории множеств). Эта группа G обладает тем замечательным свойством, что она порождается любым своим несчётным подмножеством, причём в очень сильном смысле:

$$S^{10000} = G \text{ для любого несчётного } S \subset G.$$

Кроме того, $G = \bigcup_{\alpha<\omega_1} M_\alpha$, где все M_α — счётные подгруппы G со свойством, которое называется малнормальностью:

$$g^{-1} \cdot M_\alpha \cdot g \cap M_\alpha = \{1\} \text{ для любого } g \in G \setminus M_\alpha,$$

причём

$$M_\alpha \subset M_\beta \text{ для } \alpha < \beta.$$

Предположим, что U — окрестность единицы в некоторой недискретной групповой топологии на группе G.

Если U счётна, то она содержится в некоторой подгруппе M_α, а значит, для любого $g \in G \setminus M_\alpha$ имеем $g^{-1} \cdot U \cdot g \cap U = \{1\}$. Следовательно, одноточечное множество $\{1\}$ является окрестностью единицы, будучи пересечением двух окрестностей единицы, а значит, топология дискретна, вопреки предположению. Таким образом, в недискретной групповой топологии на G счётные окрестности единицы не могут существовать.

В силу непрерывности умножения какова бы ни была окрестность единицы U, найдётся окрестность единицы V, для которой $V^{10000} \subset U$. Мы только что показали, что V должна быть несчётной; значит, $U = G$. Таким образом, всякая недискретная групповая топология на G антидискретна.

2. Всякая группа, допускающая компактную отделимую групповую топологию, вкладывается в качестве подгруппы в декартово произведение конечных групп.

Простейшие свойства топологических групп

Теорема

Пусть G *— топологическая группа и* $g \in G$*. Тогда*

1. *отображение* $R_g\colon G \to G$*, определённое правилом* $x \mapsto x \cdot g$*, является гомеоморфизмом;*
2. *отображение* $L_g\colon G \to G$*, определённое правилом* $x \mapsto g \cdot x$*, является гомеоморфизмом;*
3. *отображение* $i\colon G \to G$*, определённое правилом* $x \mapsto x^{-1}$*, является гомеоморфизмом.*

Предложение

Топология $\mathscr{T}$ на группе G является групповой тогда и только тогда, когда

$$\text{для любых } x, y \in G \text{ и любой окрестности } U \text{ элемента } x \cdot y^{-1} \text{ в } (G, \mathscr{T})$$
$$\text{существуют такие окрестности } V_x \text{ и } V_y \text{ элементов } x \text{ и } y \text{ соответственно,} \qquad (\star)$$
$$\text{что } V_x \cdot V_y^{-1} \subset U.$$

Доказательство. *Необходимость.* Если U — окрестность элемента $x \cdot y^{-1}$, то из непрерывности умножения следует, что существуют такие окрестности V_x и $V_{y^{-1}}$ элементов x и y^{-1}, что $V_x V_{y^{-1}} \subset U$. Поскольку взятие обратного непрерывно, существует окрестность V_y элемента y, для которой $V_y^{-1} \subset V_{y^{-1}}$. Имеем $V_x \cdot V_y^{-1} \subset V_x \cdot V_{y^{-1}} \subset U$.

Достаточность. Пусть выполнено условие $(\star)$. Проверим, что взятие обратного непрерывно. Пусть $x \in G$ и U — окрестность элемента x^{-1} в $(G, \mathscr{T})$. Поскольку $x^{-1} = 1 \cdot x^{-1}$, из условия $(\star)$ вытекает существование окрестностей V и V_x элементов 1 и x, для которых $V \cdot V_x^{-1} \subset U$. Имеем $V_x^{-1} = 1 \cdot V_x^{-1}$ и $1 \in V \implies V_x^{-1} = 1 \cdot V_x^{-1} \subset V \cdot V_x^{-1} \subset U$. $\square$

Предложение

Топология $\mathscr{T}$ *на группе* G *является групповой тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered}\text{для любых } x, y \in G \text{ и любой окрестности } U \text{ элемента } x^{-1} \cdot y \text{ в } (G, \mathscr{T}) \\ \text{существуют такие окрестности } V_x \text{ и } V_y \text{ элементов } x \text{ и } y, \\ \text{что } V_x^{-1} \cdot V_y \subset U.\end{gathered} \tag{$\star$}$$

Предложение

Пусть G *— топологическая группа,* $U \subset G$ *и* $g \in G$*. Тогда следующие условия равносильны:*

1. U *— окрестность* 1;
2. U^{-1} *— окрестность* 1;
3. $g^{-1} \cdot U \cdot g$ *— окрестность* 1;
4. $U \cdot g$ *— окрестность* g;
5. $g \cdot U$ *— окрестность* g.

Предложение

Пусть G — топологическая группа, $U \subset G$ и $g \in G$. Тогда следующие условия равносильны:

1. *U — окрестность g;*
2. *$g^{-1} \cdot U$ — окрестность 1;*
3. *$U \cdot g^{-1}$ — окрестность 1.*

Предложение

Если $\mathscr{B}$ — база окрестностей единицы в топологической группе G, то для любого $g \in G$ каждое из семейств

$$\{V \cdot g : V \in \mathscr{B}\} \quad \text{и} \quad \{g \cdot V : V \in \mathscr{B}\}$$

— база окрестностей точки g в G.

Доказательство. Для любого $V \in \mathscr{B}$ множество $V \cdot g$ — окрестность элемента g в G. Если U — окрестность g, то $U \cdot g^{-1}$ — окрестность 1 в G. Значит, существует множество $V \in \mathscr{B}$, для которого $V \subset U \cdot g^{-1}$. Имеем $V \cdot g \subset U$. $\square$

Теорема

Пусть G — группа. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(G)$ является базой окрестностей 1 в некоторой групповой топологии $\mathscr{T}$ на G тогда и только тогда, когда

1. $U \in \mathscr{B} \implies 1 \in U$;
2. $U, V \in \mathscr{B} \implies \exists W \in \mathscr{B}\colon\ W \subset U \cap V$;
3. $U \in \mathscr{B} \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon\ V \cdot V \subset U$;
4. $U \in \mathscr{B} \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon\ V^{-1} \subset U$;
5. $U \in \mathscr{B},\ g \in G \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon\ g^{-1} \cdot V \cdot g \subset U$;
6. $U \in \mathscr{B},\ u \in U \implies \exists V \in \mathscr{B}\colon\ u \cdot V \subset U$ (*и* $V \cdot u \subset U$).

В этом случае каждое из семейств

$$\{U \cdot g : U \in \mathscr{B}, g \in G\} \quad \text{и} \quad \{g \cdot U : U \in \mathscr{B}, g \in G\}$$

является базой топологии $\mathscr{T}$.

Теорема

Пусть G — топологическая группа и $\mathscr{B}$ — база окрестностей 1. Тогда для любого $A \subset G$

1. $\overline{A} = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} A \cdot U$;
2. $\overline{A} = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} U \cdot A$;
3. $N = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} U$ — *замкнутая нормальная подгруппа группы* G.

Доказательство. 1. Если $x \in \overline{A}$, то $\forall U \in \mathscr{B}$ $x \cdot U^{-1}$ — окрестность $x \implies x \cdot U^{-1} \cap A \neq \varnothing$. Значит, $x \cdot u^{-1} = a$ для некоторых $u \in U$ и $a \in A$, так что $x = a \cdot u \in A \cdot U$.

Обратно, пусть $x \in \bigcap\limits_{U \in \mathscr{B}} A \cdot U$, и пусть V — любая окрестность x. Тогда $V^{-1} \cdot x$ — окрестность 1, и $U \subset V^{-1} \cdot x$ для некоторого $U \in \mathscr{B}$. Поскольку $x \in A \cdot U$, имеем $x = a \cdot v^{-1} \cdot x$ для некоторых $a \in A$ и $v \in V$, откуда $a \in A \cap V$.

3. $1 \cdot 1 = 1 \implies \forall U \in \mathscr{B}\ \exists V_U \in \mathscr{B}$ т.,что $V_U \cdot V_U \subset U$. Значит,

$$N \cdot N = \Big(\bigcap_{V \in \mathscr{B}} V\Big) \cdot \Big(\bigcap_{V \in \mathscr{B}} V\Big) \subset \Big(\bigcap_{V \in \mathscr{B}} V \cdot V\Big) \subset \Big(\bigcap_{V_U \in \mathscr{B}} V_U \cdot V_U\Big) \subset \Big(\bigcap_{U \in \mathscr{B}} U\Big) = N.$$

Аналогично доказывается, что

$$N^{-1} \subset N \qquad \text{и} \qquad g^{-1} \cdot N \cdot g \subset N\ \forall g \in G.$$

Покажем, что подгруппа N замкнута. Для каждого $U \in \mathscr{B}$ имеем $\overline{U} = \bigcap_{V \in \mathscr{B}} U \cdot V$.

Кроме того, для каждого $U \in \mathscr{B}$ существует $V_U \in \mathscr{B}$ со свойством $V_U \cdot V_U \subset U$ (и $V_U \subset U$). Значит, $\overline{U} \subset U \cdot U$. Следовательно,

$$\overline{N} \subset \bigcap_{V \in \mathscr{B}} \overline{V} \subset \bigcap_{V \in \mathscr{B}} V \cdot V \subset \bigcap_{U \in \mathscr{B}} V_U \cdot V_U \subset \bigcap_{U \in \mathscr{B}} U = N.$$

Обратное включение очевидно. □

Замечание

В любой топологической группе G существует база $\mathscr{B}$ окрестностей 1, состоящая из симметричных множеств, т.е. такая, что $U = U^{-1}$ для всех $U \in \mathscr{B}$.

Действительно, для любой базы $\mathscr{B}'$ окрестностей 1 семейство $\{U \cap U^{-1} : U \in \mathscr{B}'\}$ — тоже база окрестностей 1, и

$$(U \cap U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap (U^{-1})^{-1} = U^{-1} \cap U.$$

Теорема

Любая топологическая группа удовлетворяет аксиомам отделимости T_3 и $T_{3\frac{1}{2}}$.

Если топологическая группа удовлетворяет аксиоме T_0, то она вполне регулярна (и удовлетворяет аксиомам T_1–$T_{3\frac{1}{2}}$).

Мы будем называть топологическую группу, удовлетворяющую любой (каждой) из аксиом T_0–T_2, $T_3 + T_1$ и $T_{3\frac{1}{2}} + T_1$ просто отделимой.

Подмножества топологических групп

Предложение

Пусть G — топологическая группа, $g \in G$ и $X \subset G$. Следующие условия равносильны:

1. *X открыто (замкнуто);*
2. *X^{-1} открыто (замкнуто);*
3. *$X \cdot g$ открыто (замкнуто); $g \cdot X$ открыто (замкнуто).*

Теорема

Если G — топологическая группа, $X, Y \subset G$ и X открыто, то множества $X \cdot Y$ и $Y \cdot X$ тоже открыты.

$$X \cdot Y = \bigcup_{y \in Y} X \cdot y.$$

Теорема

Пусть G — топологическая группа и $X, Y \subset G$. Тогда $\overline{X} \cdot \overline{Y} \subset \overline{X \cdot Y}$ и $\overline{X^{-1}} = \overline{X}^{-1}$.

Доказательство. Пусть $x \in \overline{X}$ и $y \in \overline{Y}$, и пусть U — любая окрестность элемента $x \cdot y$ в G. Возьмём окрестности V и W элементов x и y, для которых $V \cdot W \subset U$. Имеем $V \cap X \neq \varnothing$ и $W \cap Y \neq \varnothing$. Для $x' \in V \cap X$ и $y' \in W \cap Y$ имеем $x' \cdot y' \in (V \cdot W) \cap (X \cdot Y) \subset U \cap (X \cdot Y)$. $\square$

Теорема

Пусть G — топологическая группа, $X \subset G$ замкнуто и $K \subset G$ компактно. Тогда $X \cdot K$ и $K \cdot X$ замкнуты.

Доказательство. Предположим, что $X \cdot K$ не замкнуто. Пусть $x \in \overline{X \cdot K} \setminus X \cdot K$. Тогда $x \cdot K^{-1} \cap X = \varnothing$. Значит, $x \cdot K^{-1} \subset G \setminus X$.

Для каждого $y \in K$ пусть U_y — окрестность точки x и V_y — открытая окрестность точки y такие, что $U_y \cdot V_y^{-1} \subset G \setminus X$.

Семейство $\{V_y : y \in K\}$ — открытое покрытие компакта K. Пусть $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда $U = \bigcap\limits_{i \leqslant n} U_{y_i}$ — окрестность точки x и

$$U \cdot K^{-1} \subset U \cdot \Big(\bigcup_{i \leqslant n} V_{y_i}\Big)^{-1} = \bigcup_{i \leqslant n} U \cdot V_{y_i}^{-1} \subset \bigcup_{i \leqslant n} U_{y_i} \cdot V_{y_i}^{-1} \subset G \setminus X.$$

Покажем, что $U \cap X \cdot K = \varnothing$. Пусть это не так, и пусть $u = x' \cdot y$ для некоторых $u \in U$, $x' \in X$ и $y \in K$. Тогда $x' = u \cdot y^{-1} \in U \cdot K^{-1} \subset G \setminus X$. Противоречие.

Итак, $U \cap X \cdot K = \varnothing$ в противоречие с выбором x. $\square$

Теорема

Если G — топологическая группа и A, B — её непустые связные подмножества, то множество $A \cdot B$ тоже связно.

Доказательство. Для любых $a \in A$ и $b \in B$ имеем $a \cdot b \in a \cdot B \cap A \cdot b$. Значит, множество $a \cdot B \cup A \cdot b$ связно, будучи объединением двух пересекающихся связных множеств $a \cdot B$ и $A \cdot b$. Любые два таких множества пересекаются: если $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$, то $a_1 \cdot b_2 \in a_1 \cdot B \cap A \cdot b_2$. Значит, их объединение $\bigcup\limits_{a \in A, b \in B} a \cdot B \cup A \cdot b = A \cdot B$ связно. □

Предложение

Если G — отделимая топологическая группа, $n \in \mathbb{N}$, $A \subset G$ и $a^n = 1$ $\forall a \in A$, то $a^n = 1$ $\forall a \in \overline{A}$.

Доказательство. Предположим, что найдётся $a \in \overline{A}$, для которого $a^n \neq 1$. Пусть U — окрестность a^n, не содержащая 1, и пусть V — окрестность a, для которой $V^n \subset U$. Возьмём $b \in V \cap A$. Имеем $b^n \in V^n$, так что $b^n \neq 1$. Противоречие. □

Подгруппы

Отныне семейство всех открытых окрестностей элемента g в топологической группе G будем обозначать τ_g.

Если G — топологическая группа и H — подгруппа группы G, то H с индуцированной топологией — топологическая группа.

Доказательство. Если $x, y \in H$ и U — окрестность $x \cdot y^{-1}$ в H, то по определению индуцированной топологии $U = O \cap H$ для некоторой окрестности O точки $x \cdot y^{-1}$ в G. Существуют окрестности V и W точек x и y в G, для которых $V \cdot W^{-1} \subset O$. Множества $V \cap H$ и $U \cap H$ — окрестности x и y в X, и $(U \cap H) \cdot (V \cap H) \subset O \cap H = U$. □

В дальнейшем подгруппы всегда рассматриваются с индуцированной топологией.

Следствие (из теоремы о замыкании произведения)

Если H — подгруппа топологической группы G, то $\overline{H}$ — тоже подгруппа G.

Предложение

Если G — топологическая группа, H — её подгруппа и $\operatorname{Int} H \neq \varnothing$, то H открыто-замкнута.

Доказательство. Пусть $h \in H$ и $U \subset H$ — окрестность h. Тогда $V = U \cdot h^{-1}$ — окрестность 1, и $V \subset H$. Для любого $x \in H$ имеем $x \cdot V \subset x \cdot H \subset H \cdot H \subset H$. Значит, H открыта.

Пусть $x \notin H$. Тогда $x \cdot H \cap H = \varnothing$. Значит, H замкнута. □

Теорема

В любой топологической группе G связная компонента единицы C_1 является замкнутой нормальной подгруппой.

Доказательство. Множества $C_1 \cdot C_1$, C_1^{-1} и $g^{-1} \cdot C_1 \cdot g$ связны и содержат 1. □

Любое семейство нормальных подгрупп группы G, замкнутое относительно конечных пересечений, является базой окрестностей единицы некоторой групповой топологии на G.

Любое семейство нормальных подгрупп с тривиальным пересечением, замкнутое относительно конечных пересечений, является базой окрестностей единицы некоторой отделимой групповой топологии.

Определение

Групповая топология называется *линейной*, если она порождена базой окрестностей единицы, состоящей из подгрупп.

Теорема (van Dantzig)

Если топологическая группа G локально компактна и вполне несвязна, то её топология отделима и линейна.

Доказательство. G вполне несвязна $\implies \{1\} = C_1 = \overline{\{1\}} \implies G \in T_1$ ($\implies G \in T_2$).

Пусть $U \in \tau_1$, и пусть $V \in \tau_1$ имеет компактное замыкание $\overline{V} \subset U$. Тогда $\overline{V}$ — вполне несвязный компакт $\implies \overline{V}$ нульмерно $\implies \exists$ открыто-замкнутая (и компактная) окрестность 1 $W = \overline{W} \subset V$, $W^{-1} = W$. Для каждого $g \in W$ выберем $W_g \in \tau_1$ так, что $W_g \cdot g \subset W$, и возьмём $O_g \in \tau_1$ со свойством $O_g \cdot O_g \subset W_g$. Пусть $\{O_{g_1} \cdot g_1, \ldots, O_{g_n} \cdot g_n\}$ — конечное подпокрытие открытого покрытия $\{O_g \cdot g : g \in W\}$ компакта W. Положим $O' = \bigcap\limits_{i \leqslant n} O_{g_i}$ и $O = O' \cap O'^{-1}$. Для каждого $g \in W$ имеем $g \in O_{g_i} \cdot g_i$ для некоторого $i \leqslant n$ и

$$O \cdot g \subset O \cdot O_{g_i} \cdot g_i \subset W_{g_i} \cdot g_i \subset W.$$

Значит, $O \cdot W \subset W$. Отсюда $O \cdot O \subset W$, $O \cdot O \cdot O \subset W$, ... Пусть $H = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} O^n$. Тогда H — открытая подгруппа G, и $H \subset U$. □

Теорема

Если G — компактная топологическая группа, то $\forall U \in \tau_1$ $\exists V \in \tau_1$ такое, что $g^{-1} \cdot V \cdot g \subset U$ для всех $g \in G$.

Доказательство. Возьмём $W \in \tau_1$ со свойствами $W \cdot W \cdot W \subset U$ и $W^{-1} = W$. Семейство $\{g \cdot W : g \in G\}$ — открытое покрытие G. Пусть $\{g_1 \cdot W, \ldots, g_n \cdot W\}$ — его конечное подпокрытие. Положим $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} g_i \cdot W \cdot g_i^{-1}$. Имеем $g_i^{-1} \cdot V \cdot g_i \subset W$ для $i \leqslant n$.

Каждый элемент $g \in G$ содержится в некотором $g_i \cdot W$. Имеем
$$g^{-1} \cdot V \cdot g \subset W^{-1} \cdot g_i^{-1} \cdot V \cdot g_i \cdot W \subset W^{-1} \cdot W \cdot W \subset U.$$
□

Следствие

Если топологическая группа G компактна и вполне несвязна, то её топология порождается открытыми нормальными подгруппами (как базой окрестностей 1).

Отображения топологических групп и операции над ними

Теория топологических групп во многом параллельна теории общих топологических пространств:

$$\begin{aligned} \text{непрерывные отображения} &\longleftrightarrow \text{непрерывные гомомоморфизмы} \\ \text{гомеоморфизмы} &\longleftrightarrow \text{топологические изоморфизмы} \\ \text{подпространства} &\longleftrightarrow \text{топологические подгруппы} \end{aligned}$$

Операции

1. Топологические группы, как и общие пространства, можно *перемножать*; на декартовом произведении произвольного семейства групп определены покоординатные операции умножения и взятия обратного, относительно которых произведение является группой, а тихоновская (и ящичная) топология произведения является групповой.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x} = (x_\alpha), \boldsymbol{y} = (y_\alpha) \in \prod\limits_{\alpha \in A} G_\alpha = \boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{O}$ — любая окрестность элемента $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^{-1} = (x_\alpha \cdot y_\alpha^{-1})$ в $\boldsymbol{G}$ с топологией тихоновского произведения. По определению этой топологии найдутся $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ и открытые окрестности U_{α_i} точек $x_{\alpha_i} \cdot y_{\alpha_i}^{-1}$ в группах G_{α_i} такие, что произведение $\boldsymbol{U} = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, где $X_\alpha = U_\alpha$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $X_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, содержится в $\boldsymbol{O}$. Все G_α — топологические группы, поэтому для каждого $i \leqslant n$ существуют окрестности V_{α_i} и W_{α_i} элементов x_{α_i} и y_{α_i} такие, что $V_{\alpha_i} \cdot W_{\alpha_i}^{-1} \subset U_{\alpha_i}$. По определению тихоновской топологии произведения множества

$$\boldsymbol{V} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \quad \text{где } X_\alpha = V_\alpha \text{ для } \alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ и } X_\alpha = G_\alpha \text{ для } \alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

и

$$\boldsymbol{W} = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \quad \text{где } X_\alpha = W_\alpha \text{ для } \alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \text{ и } X_\alpha = G_\alpha \text{ для } \alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\},$$

являются окрестностями точек $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ в $\boldsymbol{G}$. Ясно, что произведение $\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{W}^{-1} = \prod\limits_{\alpha \in A} Z_\alpha$, где $Z_\alpha = V_\alpha \cdot W_\alpha^{-1}$ для $\alpha \in \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ и $Z_\alpha = G_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, содержится в $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{O}$. □

2. Аналога суммы топологических пространств для топологических групп нет, зато определена прямая сумма $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ семейства топологических групп G_α, $\alpha \in A$, — это подгруппа декартова произведения, состоящая из точек, лишь конечное число координат которых отличается от единиц соответствующих сомножителей:

$$\bigoplus_{\alpha\in A} G_\alpha = \{(x_\alpha) \in \prod_{\alpha\in A} G_\alpha : |\{a \in A : x_\alpha \neq 1\}| < \aleph_0\}.$$

Как правило, она снабжается топологией, индуцированной тихоновской топологией декартова произведения.

3. В теории топологических групп существуют и операции, не имеющие даже отдалённых аналогов в теории общих топологических пространств. К ним относится, например, операция перехода от топологической группы G к группе $\widehat{G}$, двойственной ей в смысле Понтрягина. Элементами $\widehat{G}$ являются непрерывные характеры группы G, т.е. непрерывные гомоморфизмы из G в окружность, и $\widehat{G}$ снабжается топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах G; группа $\widehat{G}$ всегда абелева. Операцию перехода к двойственной группе обычно рассматривают только для локально компактных абелевых групп; для таких групп двойственные группы тоже являются локально компактными, и всякая локально компактная абелева группа G топологически изоморфна группе $\widehat{\widehat{G}}$ — в этом состоит теорема Понтрягина о двойственности.

Отображения

Поскольку всякая топологическая группа является топологическим пространством, можно говорить об открытости, замкнутости и факторности гомоморфизмов топологических групп как отображений топологических пространств. Однако и здесь наличие групповой структуры оказывает заметный эффект.

Теорема

Всякий гомоморфизм топологических групп, являющийся факторным отображением, является и открытым отображением.

Доказательство. Пусть G и H — топологические группы и $h\colon G \to H$ — гомоморфизм, являющийся факторным отображением. Для любого открытого в G множества U имеем $h^{-1}(h(U)) = \ker h \cdot U$ (здесь $\ker h$ — ядро гомоморфизма h). Это множество открыто в G, поскольку оно является объединением открытых множеств $g \cdot U$ по всем $g \in \ker h$. В силу факторности h множество $h(U)$ открыто в H. $\square$

Топологическая группа H, являющаяся образом топологической группы G при факторном (= непрерывном и открытом) гомоморфизме, называется топологической факторгруппой группы G.

Теорема

Факторгруппа H отделима тогда и только тогда, когда ядро гомоморфизма $h\colon G \to H$ замкнуто в G.

Доказательство. Топологическая группа H отделима $\iff$ множество $\{1\}$ в ней замкнуто (1 — единица группы H). По определению факторного отображения множество $X \subset H$ замкнуто в H $\iff$ $h^{-1}(X)$ замкнуто в G.

Осталось заметить, что $h^{-1}(\{1\}) = \operatorname{Ker} h$. $\square$

Для любой топологической группы G пересечение $H = \bigcap \tau_1$ является связной замкнутой нормальной подгруппой, и факторгруппа G/H является отделимой топологической группой.

Теорема

Факторгруппа G/C_1 любой топологической группы G по компоненте связности единицы является вполне несвязной отделимой топологической группой.

Доказательство. Поскольку C_1 — замкнутая нормальная подгруппа, факторгруппа G/C_1 определена и отделима.

Пусть $h\colon G \to G/C_1$ — естественный гомоморфизм, и пусть C_1' — компонента связности единицы в G/C_1. Положим $H = h^{-1}(C_1')$. Тогда H — замкнутая нормальная подгруппа группы G, и $H \supset C_1$.

Пусть V — любая открыто-замкнутая окрестность 1 в группе H. Тогда $v \cdot C_1 \subset V$ для всех $v \in V$, поскольку любое множество вида $g \cdot C_1$ связно. Значит, $V = V \cdot C_1 = h|_H^{-1}(h|_H(V))$. Гомоморфизм $h|_H$ является факторным отображением. Следовательно, множество $h|_H(V)$ открыто и замкнуто в C_1', а значит, совпадает с C_1', откуда $V = H$. Таким образом, подгруппа H связна и совпадает с C_1, так что $C_1' = \{1\}$ в группе G/C_1. □

Компактные вполне несвязные топологические группы называются проконечными.

Проконечная топология на любой группе порождена всеми (нормальными) подгруппами конечного индекса (как окрестностями 1).

Группа G финитно аппроксимируема, если для любого $g \in G \setminus \{1\}$ найдётся гомоморфизм $h\colon G \to F$ в конечную группу F, удовлетворяющий условию $h(g) \neq 1$. Иными словами, G финитно аппроксимируема, если g является подгруппой произведения конечных групп.

Теорема

Группа финитно аппроксимируема тогда и только тогда, когда её проконечная топология отделима.

Свободные группы — это группы, элементы которых не связаны никакими соотношениями, кроме тех, которые вытекают из определения группы. Всякая свободная группа G свободно порождена некоторым своим подмножеством X; это означает, что любой элемент $g \in G$ можно записать в виде произведения элементов $x \in X$ и их обратных, причём такая запись единственна с точностью до вставки и вычёркивания комбинаций вида $x \cdot x^{-1}$ и $x^{-1} \cdot x$. Для свободной группы, порождённой множеством X, используют обозначение $F(X)$.

Свободные группы обладают так называемым универсальным свойством: любое отображение $f\colon X \to G$ любого множества X в любую группу G продолжается, и притом единственным образом, до гомоморфизма $\hat{f}\colon F(X) \to G$.

Для каждого тихоновского пространства X определена его свободная топологическая группа $F(X)$. Как группа это свободная группа, порождённая множеством X, и она снабжена групповой топологией, относительно которой X является подпространством топологической группы $F(X)$ и для которой выполнено аналогичное универсальное свойство:

любое непрерывное отображение $f : X \to G$ пространства X в любую топологическую группу G единственным образом продолжается до непрерывного гомоморфизма $\hat{f} : F(X) \to G$.

Таким образом, топология свободной топологической группы $F(X)$ — сильнейшая из всех групповых топологий на $F(X)$, индуцирующих на множестве X топологию пространства X. Можно показать также, что это слабейшая из всех топологий с универсальным свойством.

Существование свободной топологической группы

Рассмотрим семейство $\mathscr{F}$ всех непрерывных отображений $f\colon X \to G_f$, где G_f — топологические группы, являющиеся (как пространства) подпространствами тихоновской степени $\mathbb{R}^{|X|}$ (это ограничение нужно для того, чтобы рассматриваемые группы и отображения образовывали множества).

С точностью до гомеоморфизма и взятия надотображений отображения $f \in \mathscr{F}$ реализуют все непрерывные отображения из X в любые топологические группы.

Групповая оболочка $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X) \rangle$ в группе $\prod\limits_{f \in \mathscr{F}} G_f$ образа пространства X при диагональном произведении $\triangle\, \mathscr{F} : X \to \prod\limits_{f \in \mathscr{F}} G_f$ является свободной топологической группой пространства X.

То, что $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X) \rangle$ обладает универсальным свойством, вытекает из того, что все непрерывные отображения $X \to G$ реализуются как проектирования на сомножители.

То, что X гомеоморфно вкладывается в $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X) \rangle$, следует из того, что даже уже непрерывные отображения $X \to \mathbb{R}$ разделяют точки и замкнутые множества (поскольку X вполне регулярно).

То, что группа $\langle \triangle\, \mathscr{F}(X) \rangle$ свободна, можно показать, явно предъявив некоторую групповую топологию на $F(X)$ и построив непрерывное отображение из X в $F(X)$ с этой топологией.

Граевское продолжение псевдометрик на свободную группу

Пусть $d \leqslant 1$ — псевдометрика на множестве X. Положим $\widetilde{X} = X \sqcup \{e\} \sqcup X^{-1}$ и

$$\widetilde{d}(x,y) = \begin{cases} d(x,y), & \text{если } x \in X^{\varepsilon},\ y \in X^{-\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon = \pm 1, \\ 1, & \text{если } x = e \text{ и } y \neq e \text{ или } x \neq e \text{ и } y = e, \\ 0, & \text{если } x = y = e. \end{cases}$$

Для $g \in F(X)$ положим

$$\|g\|_d = \min\Big\{\inf\Big\{\sum_{i=1}^{n} \widetilde{d}(x_i, y_i) :\ n \in \mathbb{N},\ x_i \in \widetilde{X},\ x_1 \dots x_n = g,\ y_1 \dots y_n = e\Big\}, 1\Big\}.$$

Это инвариантная полунорма:

- $\|g\|_d \geqslant 0 \quad \forall g \in F(X)$;
- $\|g^{-1}\|_d = \|g\|_d \quad \forall g \in F(X)$;
- $\|g + h\|_d \leqslant \|g\|_d + \|h\|_d \quad \forall g, h \in F(X)$;
- $\|h^{-1} g h\|_d = \|g\|_d \quad \forall g, h \in F(X)$.

Граев: inf достигается, причём для записи слова g, отличающейся от несократимой возможным присутствием «буквы» e, и записи e, состоящей из букв несократимых записей g и g^{-1}.

Псевдометрика d порождает на X топологию $\mathscr{T}_d^X$. Полунорма $\|\cdot\|_d$ порождает на $F(X)$ групповую топологию $\mathscr{T}_d$.

Замечание

$\mathscr{T}_d|_X = \mathscr{T}_d^X$.

Замечание

Если $g = x_1^{\varepsilon_1} \dots x_n^{\varepsilon_n} \neq e$ и $\min\{d(x_i, x_j) : i, j \leqslant n, i \neq j\} > 0$, то $\|g\|_d > 0$.

Значит, если X — вполне регулярное пространство с топологией $\mathscr{T}_X$, то

$$\mathscr{T} = \sup\{\mathscr{T}_d : d \text{ — непрерывная псевдометрика на } X\}$$

— отделимая групповая топология на $F(X)$, и $\mathscr{T}|_X \subset \mathscr{T}_X$, т.е. тождественное вложение $\mathrm{id}\colon (X, \mathscr{T}_X) \to (F(X), \mathscr{T})$ непрерывно (на самом деле $\mathscr{T}|_X = \mathscr{T}_X$.)

Топология индуктивного предела на $F(X)$

Для $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ положим
$$F_n(X) = \{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_k^{\varepsilon_k} : k \leqslant n, x_i \in X, \varepsilon_i \in -1, 1\}.$$
Имеем $F(X) = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$.

Естественные отображения умножения $j_n \colon (X \cup \{e\} \cup X^{-1})^n \to F_n(X)$ непрерывны.

Пусть $X = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Пространство X является индуктивным (или прямым) пределом подпространств X_n, если $U \subset X$ открыто в $X \iff U \cap X_n$ открыто в X_n для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Теорема (М.И. Граев)

Для любого компакта X свободная топологическая группа $F(X)$ является индуктивным пределом ее подпространств $F_n(X)$.

Доказательство. X компактно $\implies$ топология на каждом $F_n(X)$ однозначно определяется отображениями $j_n\colon (X \cup \{e\} \cup X^{-1})^n \to F_n(X)$.

Рассмотрим семейство $\mathscr{U}$ всех множеств $U \subset F(X)$, для которых все пересечения $U \cap F_n(X)$ открыты. Покажем, что $\mathscr{U}$ — групповая топология.

Пусть $U \in \mathscr{U}$, и пусть $a, b \in F(X)$ таковы, что $a \cdot b^{-1} \in U$. Нужно найти $U(a), U(b) \in \mathscr{U}$, для которых $a \in U(a)$, $b \in U(b)$ и $U(a) \cdot U(b)^{-1} \subset U$.

Для достаточно большого k имеем $a, b \in F_k(X)$. Построим по индукции последовательности множеств $U_i(a)$ и $U_i(b)$, $i = k, k+1, \dots$ такие, что

1. $a \in U_i(A)$, $b \in U_i(b)$;
2. $U_i(a)$ и $U_i(b)$ открыты в $F_i(X)$;
3. $U_j(a) \subset U_i(a)$, $U_j(b) \subset U_i(b)$ для $j \leqslant i$;
4. $\overline{U_i(a)} \cdot \overline{U_i(b)}^{-1} \subset U \cap F_{2i}(X)$.

Множество $U \cap F_{2k}(X)$ открыто в $F_{2k}(X) \implies \exists V \subset F(X)$: V открыто и $V \cap F_{2k}(X) = U \cap F_{2k}(X)$. Поскольку $a \cdot b^{-1} \in V \cap F_{2k}(X)$, существуют окрестности V_a и V_b точек a и b в $F(X)$, для которых $\overline{V}_a \cdot \overline{V}_b^{-1} \subset V$.

Положим

$$U_k(a) = V_a \cap F_k(X), \qquad U_k(b) = V_b \cap F_k(X).$$

Множества $U_k(a)$ и $U_k(b)$ удовлетворяют нужным условиям.

Пусть определены $U_i(a)$ и $U_i(b)$ для $i = k, k+1, \dots, n$. Рассмотрим компакт

$$\Phi = \overline{U_n(a)}^{-1} \cdot (F_{2n+2}(X) \setminus U) \cdot \overline{U_n(b)} \not\ni e.$$

Существует $U_e \in \tau_e$, для которого $\overline{U}_e \cdot \overline{U}_e^{-1} \subset F(X) \setminus \Phi$. Положим

$$U_{n+1}(a) = (U_n(a) \cdot U_e) \cap F_{n+1}(X), \qquad U_{n+1}(b) = (U_n(b) \cdot U_e) \cap F_{n+1}(X).$$

Проверим 4.

$U_n(a) \subset F_n(X)$, $F_n(X)$ — компакт $\implies$ $\overline{U_n(a)}$ — компакт $\implies$ $\overline{U_n(a)} \cdot \overline{U}_e$ замкнуто $\implies$ $\overline{U_{n+1}(a)} \subset \overline{U_n(a)} \cdot \overline{U}_e$. Аналогично $\overline{U_{n+1}(b)} \subset \overline{U_n(b)} \cdot \overline{U}_e$.

Имеем

$\overline{U_{n+1}(a)} \cdot \overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset \overline{U_n(a)} \cdot \overline{U}_e \cdot \overline{U}_e^{-1} \cdot \overline{U_n(b)}^{-1} \subset \overline{U_n(a)} \cdot (F(X) \setminus \Phi) \cdot \overline{U_n(b)}^{-1}$ и $\overline{U_{n+1}(a)} \cdot \overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset F_{2n+2}(X)$.

$$(F(X)\setminus\Phi)\cap\overline{U_n(a)}^{-1}\cdot(F_{2n+2}(X)\setminus U)\cdot\overline{U_n(b)}=\varnothing$$
$$\Longrightarrow\ \overline{U_n(a)}\cdot(F(X)\setminus\Phi)\cdot\overline{U_n(b)}^{-1}\cap(F_{2n+2}(X)\setminus U)=\varnothing$$
$$\Longrightarrow\ \overline{U_n(a)}\cdot(F(X)\setminus\Phi)\cdot\overline{U_n(b)}^{-1}\cap F_{2n+2}(X)\subset U.$$ Следовательно,
$$\overline{U_{n+1}(a)}\cdot\overline{U_{n+1}(b)}^{-1}\subset U\cap F_{2n+2}(X).$$
Положим
$$U(a)=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i(a),\qquad U(b)=\bigcup_{i=1}^{\infty}U_i(b).$$
Имеем $U(a)\in\mathscr{U}$, $U(b)\in\mathscr{U}$ и $U(a)\cdot U(b)^{-1}\subset U$. □

Теорема

Для всякого вполне регулярного X и любого $n\in\mathbb{N}$ X^n замкнуто вложено в $F(X)$.

Доказательство. Для компактного X $j_n\colon X^n\to F_n(X)$ — гомеоморфное вложение. Для некомпактного X рассмотрим $F(X)$ с топологией, индуцированной из $F(\beta X)\supset F(X)$, и заметим, что $j_n((\beta X)^n)\cap F(X)=j_n(X^n)$. □

Свободные топологические группы находят множество применений. Например, с их помощью можно доказать, что всякая σ-компактная группа обладает свойством Суслина, т.е. любое семейство попарно непересекающихся непустых открытых множеств в такой группе не более чем счётно.

Сначала доказательство сводится к случаю компактно порождённой группы, т.е. группы, порождённой (алгебраически) некоторым своим компактным подпространством: если $G = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n$, где K_n — компакты, и $\mathscr{U}$ — несчётное семейство непустых открытых множеств в G, то существует такой номер n, что компакт K_n (а значит, и его групповая оболочка в G, которая является компактно порождённой группой) пересекает несчётное число элементов $\mathscr{U}$. Следовательно, если существует σ-компактная группа без свойства Суслина, то существует и компактно порождённая группа без этого свойства.

Топологическая группа G, порождённая своим компактным подпространством K, является непрерывным (и даже непрерывным гомоморфным) образом свободной топологической группы $F(K)$ — надо рассмотреть тождественное вложение $K \to G$ и его продолжение до непрерывного гомоморфизма $F(K) \to G$.

Значит, достаточно доказать теорему для свободных топологических групп компактов.

Наконец, всякий компакт K является непрерывным образом стоун-чеховской компактификации βD дискретного пространства D мощности $|K|$ (биекция $D \to K$ имеет непрерывное продолжение на βD), поэтому достаточно доказать, что плотная подгруппа $\langle D\rangle$ группы $F(\beta D)$ обладает свойством Суслина, а топология этой группы устроена понятным образом — её нетрудно описать в терминах конечных разбиений множества D, так что по сути доказательство сводится к рамсеевской комбинаторике.

Универсальное свойство свободной топологической группы $F(X)$ можно сформулировать немного иначе: для любого непрерывного отображения $f\colon X \to G$ в любую топологическую группу G существует единственный непрерывный гомоморфизм $\hat{f}\colon F(X) \to G$, для которого диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, hook, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ F(X) \arrow[r, "\hat{f}"'] & G \end{tikzcd}$$

коммутативна (здесь через $\mathrm{id} = j_1$ обозначено тождественное вложение X в $F(X)$). Ограничиваясь группами из определённых классов (многообразий топологических групп), можно определять свободные топологические группы в этих классах (свободные абелевы топологические группы, свободные предкомпактные группы и пр.), а заменяя тождественное вложение id на фиксированное непрерывное отображение, можно определить свободную топологическую группу и для класса, скажем, хаусдорфовых пространств. Кроме того, не обязательно сосредотачиваться именно на группах, можно рассматривать и другие тополого-алгебраические системы.

Конструкция свободной топологической группы даёт отображение $X \mapsto F(X)$ класса тихоновских пространств в класс топологических групп. На самом деле F является даже функтором (т.е. отображением категорий, которое переводит объекты в объекты, а морфизмы в морфизмы согласованным образом) из категории тихоновских пространств и непрерывных отображений в категорию топологических групп и непрерывных гомоморфизмов. Каждому тихоновскому пространству X функтор F ставит в соответствие его свободную топологическую группу, а каждому непрерывному отображению $f\colon X \to Y$ тихоновских пространств — непрерывный гомоморфизм $\hat{f}\colon F(X) \to F(Y)$ (который возникает при интерпретации f как отображения $X \to F(Y) \supset Y$).

Обобщения топологических групп

Определение

Полугруппа S с топологией, относительно которой полугрупповая операция $S \times S \to S$ непрерывна по первому (второму) аргументу, называется право(лево)топологической полугруппой.

Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция раздельно непрерывна, называется полутопологической полугруппой.

Полугруппа с топологией, относительно которой полугрупповая операция непрерывна, называется топологической полугруппой.

Группа с топологией, относительно которой умножение непрерывно по первому (второму) аргументу, называется право(лево)топологической группой.

Группа с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно, называется полутопологической группой.

Группа с топологией, относительно которой умножение непрерывно, называется паратопологической группой.

Группа с топологией, относительно которой умножение раздельно непрерывно и операция взятия обратного непрерывна, называется квазитопологической группой.

Все перечисленные понятия, вообще говоря, отличаются.

Теорема (Эллис)

Всякая локально компактная хаусдорфова полутопологическая группа является топологической группой.

Определение

Отображение $f\colon X \times Y \to Z$ **сильно квазинепрерывно** в точке (x, y), если для любой окрестности W точки $f(x, y)$ в Z и любой окрестности U точки x в X существуют непустое открытое $U_1 \subset X$ и открытое $V \subset Y$ такие, что $U_1 \subset U$, $y \in V$ и $f(U_1 \times V) \subset W$.

Лемма

Пусть X и Y — компакты, Z регулярно и $f\colon X \times Y \to Z$ раздельно непрерывно. Тогда f сильно квазинепрерывно в каждой точке.

Доказательство. Пусть $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $z_0 = f(x_0, y_0)$ и W — окрестность z_0. Z регулярно $\implies$ существуют окрестности W_0 и W_1 точки z_0 такие, что $\overline{W}_0 \subset W_1 \subset \overline{W}_1 \subset W$.

Попытаемся построить по индукции последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек X и Y и убывающие последовательности $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открытых подмножеств X и $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ открытых подмножеств Y со свойствами $x_n \in U_n$, $y_0, y_n \in V_n$ и $f(x_n, y_n) \in Z \setminus \overline{W}_1$.

Положим $U_1 = \{x \in X : f(x, y_0) \in W_0\}$. f раздельно непрерывно $\implies$ U_1 открыто, и $x_0 \in U_1$. Положим $V_1 = Y$. Если $f(U_1 \times V_1) \not\subset W$, то выберем $x_1 \in U_1$ и $y_1 \in V_1$ так, что $f(x_1, y_1) \in Z \setminus \overline{W}_1$.

Шаг $n+1$: Положим $U'_{n+1} = \{x \in U_n : f(x, y_n) \in Z \setminus \overline{W}_1\}$. Множество U'_{n+1} открыто, и $x_n \in U'_{n+1}$. Пусть U_{n+1} — окрестность x_n, $\overline{U}_{n+1} \subset U'_{n+1}$. Положим $V'_{n+1} = \{y \in V_n : f(x_n, y) \in W_0\}$. Это множество открыто и содержит y_0. Пусть V_{n+1} — окрестность y_0 такая, что $\overline{V}_{n+1} \subset V'_{n+1}$. Если $f(U_{n+1} \times V_{n+1}) \not\subset W$, то выберем $x_{n+1} \in U_{n+1}$ и $y_{n+1} \in V_{n+1}$ так, что $f(x_{n+1}, y_{n+1}) \in Z \setminus \overline{W}$.

Предположим, что удалось построить бесконечные последовательности. Пусть x^* и y^* — предельные точки последовательностей (x_n) и (y_n). Имеем $x^* \in \bigcap U_n$ $\implies$ $f(x^*, y_n) \in Z \setminus \overline{W}\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\implies$ $f(x^*, y^*) \in Z \setminus W$ (потому что f раздельно непрерывна).

С другой стороны, для $n > k$ по построению $f(x_k, y_n) \in W_0$ $\implies$ $f(x_k, y^*) \in \overline{W}_0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. $\implies$ $f(x^*, y^*) \in \overline{W}_0 \subset W$. $\square$

Лемма

Любая локально компактная хаусдорфова полутопологическая группа G является паратопологической группой.

Доказательство. Пусть $x_0, y_0 \in G$, $z_0 = x_0 \cdot y_0$, W — окрестность z_0, W_1 — окрестность z_0 такая, что $\overline{W_1} \subset W$. Для $U, V \subset G$ положим $F_{U,V} = (G \setminus W) \cap (\overline{U \cdot V})$. Пусть $\mathscr{F} = \{F_{U,V} : U, V$ — окрестности x_0 и $y_0\}$.

Достаточно показать: $\exists$ открытые $U \ni x_0$ и $V \ni y_0$, для которых $F_{U,V} = \varnothing$.

Предположим, что все элементы $\mathscr{F}$ непусты. Тогда $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$ (в силу локальной компактности). Возьмём $z \in \bigcap \mathscr{F} \subset G \setminus \overline{W}_1$.

Возьмем $U \in \tau_1$, для которого $U \cdot z \cap \overline{W}_1 = \varnothing$. Множество $U \cdot x_0$ открыто, $x_0 \in U \cdot x_0$.

Лемма $\implies$ $\exists$ открытые U_1 и V такие, что $\varnothing \neq U_1 \subset U \cdot x_0$, $y_0 \in V$ и $U_1 \cdot V \subset W_1$. $\exists u \in U$, для которого $u \cdot x_0 \in U_1$, и $\exists$ открытое $U_2 \subset X$, для которого $x_0 \in U_2$ и $u \cdot U_2 \subset U_1$. Имеем $u \cdot U_2 \cdot V \subset U_1 \cdot V \subset W_1$, $\implies$ $u \cdot \overline{U_2 \cdot V} \subset \overline{W}_1$.

Поскольку $z \in \overline{U_2 \cdot V}$, имеем $u \cdot z \in u \cdot \overline{U_2 \cdot V} \subset \overline{W}_1$ и $u \cdot z \in U \cdot z$. Значит, $\overline{W}_1 \cap U \cdot z \neq \varnothing$. Противоречие. □

Лемма

Любая компактная хаусдорфова паратопологическая группа G является топологической группой.

Доказательство. G хаусдорфова $\implies$ $X = \{(x, y) \in G \times G : x \cdot y = 1\}$ замкнуто в $G \times G$.

Пусть $F \subset G$ замкнуто. Положим $P = (G \times F) \cap X$. Это компакт. Имеем $(x, y) \in P \iff y \in F$ и $x = y^{-1}$. $\implies$ образ P при проекции $G \times G$ на первый сомножитель — это F^{-1}. Поскольку F компактно и проектирование непрерывно, F^{-1} — компакт $\implies$ замкнут в G. □

Следствие

Любая компактная хаусдорфова полутопологическая группа является топологической группой.

Лемма

Пусть G — полутопологическая группа, $U_0, U_1, \ldots$ — последовательность открытых окрестностей 1 и $(x_n)_{n \geqslant 0}$ — последовательность точек G, причем $x_n \in U_n$ для $n \geqslant 0$ и

1. *$\overline{U}^2_{n+1} \subset U_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$;*
2. *последовательность $\{g_k : k \in \mathbb{N}\}$, где $g_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k$, имеет точку накопления g в G.*

Тогда существует $k \in \mathbb{N}$, для которого $x_{k+1}^{-1} \in U_0$.

Доказательство. $g \cdot U_1$ — окрестность $g \implies \exists k \in \mathbb{N}$: $g_k \in g \cdot U_1$. Имеем

$$x_{k+1}^{-1} = g_{k+1}^{-1} \cdot g_k \in g_{k+1}^{-1} \cdot g \cdot U_1,$$

и $g_{k+1}^{-1} \cdot g$ — точка накопления последовательности $(g_{k+1}^{-1} \cdot g_m)_{m \in \mathbb{N}}$.
Из 1 следует, что для всех $\forall m > k+2$ имеем

$$g_{k+1}^{-1} \cdot g_m = x_{k+2} \cdot \ldots \cdot x_m \in U_{k+2} \cdot \ldots \cdot U_m \subset U_{k+1}.$$

Значит, $g_{k+1}^{-1} \cdot g \in \overline{U}_{k+1} \subset U_k$, откуда $x_{k+1}^{-1} \in g_{k+1}^{-1} \cdot g \cdot U_1 \subset U_k \cdot U_1 \subset U_0$. □

Доказательство теоремы Эллиса. Достаточно проверить непрерывность операции взятия обратного в точке 1. Если она не непрерывна в 1, то $\exists U \in \tau_1$ такая, что $\forall V \in \tau_1$ имеем $V^{-1} \not\subset U$. G регулярна, умножение непрерывно $\implies$ $\exists$ открытые $U_0, U_1, \ldots,$ удовлетворяющие условию 1 леммы. G локально компактна $\implies$ можно считать, что $\overline{U_0}$ компактно и $\overline{U_0} \subset U$.

Для каждого $n \geqslant 0$ $\exists x_n \in U_n$, $x_n^{-1} \notin U^{-1}$. 1 $\implies$ $g_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_k \in U_0$. $\overline{U_0}$ компактно $\implies$ $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ имеет предельную точку g.

Лемма $\implies$ $\exists k \geqslant 0$: $x_{k+1}^{-1} \in U_0 \subset U$. Противоречие. $\square$

Теорема

Регулярная полутопологическая группа G со счётной базой $\mathscr{B}$, которая является пространством второй категории Бэра, является паратопологической группой.

Доказательство. Сначала покажем, что $\exists x \in G$: умножение совместно непрерывно в (g, x) $\forall g \in G$.

Для $A, B \subset G$ положим $\langle A, B\rangle = \{x \in X : A \cdot x \subset B\}$.

Положим $\mathscr{F} = \{\overline{V} : V \in \mathscr{B}\}$, $\Gamma = \{\text{Гр}\langle V, F\rangle : V \in \mathscr{B}, F \in \mathscr{F}\}$, $X = G \setminus \bigcup \Gamma$.
Покажем: $\forall x \in X, g \in G$ умножение совместно непрерывно в (g, x).

Семейство Γ счётно и состоит из замкнутых нигде не плотных множеств $\implies$ $X \neq \varnothing$.

Пусть $g \in G$, $x \in X$, $y = g \cdot x$ и U — любая окрестность y. G регулярна $\implies$ $\exists W \in \mathscr{B}$: $y \in W \subset \overline{W} \subset U$. Умножение раздельно непрерывно $\implies$ $\exists V \in \mathscr{B}$: $g \in V$ и $V \cdot x \subset W$. Имеем $x \in \langle V, \overline{W}\rangle$. Поскольку $x \notin \bigcup \Gamma$, имеем $x \notin \text{Гр}\langle V, \overline{W}\rangle$. $\implies$ $x \in \text{Int}\langle V, \overline{W}\rangle = W'$. По построению $\forall w \in W'$ имеем $V \cdot w \subset \overline{W} \subset U$. $\implies$ $V \cdot W' \subset U$ (и $g \in V$, $x \in W'$).

Пусть $a, b \in G$, $c = a \cdot b$, $g = x \cdot b^{-1}$, W — любая окрестность c. Имеем $b = g^{-1} \cdot x$. Положим $y = a \cdot g^{-1}$. Тогда $y \cdot x = a \cdot g^{-1} \cdot g \cdot b = a \cdot b = c$. Умножение совместно непрерывно в $(y, x) \implies \exists$ открытые U и V такие, что $y \in U$, $x \in V$, $U \cdot V \subset W$. Положим $U_1 = U \cdot g$ и $V_1 = g^{-1} \cdot V$. Множества U_1 и V_1 открыты в силу раздельной непрерывности умножения, $a = y \cdot g \in U \cdot g$, $b = g^{-1} \cdot x \in g^{-1} \cdot V = V_1$ и $U_1 \cdot V_1 = U \cdot g \cdot g^{-1} \cdot V = U \cdot V \subset W$. $\square$

Теорема (Эллиса–Нумакуры)

Во всякой (непустой) хаусдорфовой компактной правотопологической (или левотопологической) полугруппе S существует идемпотент, т.е. элемент $e \in S$ со свойством $e \cdot e = e$.

Доказательство. Рассмотрим множество всех непустых замкнутых подполугрупп полугруппы S, упорядоченное обратно включению. В силу компактности это множество удовлетворяет условиям леммы Цорна. Значит, S содержит максимальную относительно порядка $\supset$, т.е. минимальную по включению, непустую замкнутую подполугруппу H. Возьмём любой элемент $e \in H$. Множество $H \cdot e = \{h \cdot e : h \in H\}$ тоже является подполугруппой, причём эта подполугруппа замкнута (из непрерывности умножения по первому аргументу вытекает компактность полугруппы $H \cdot e$, а из хаусдорфовости S — её замкнутость) и $H \cdot e \subset H$, так что из минимальности H следует, что $H \cdot e = H$, а значит, $e \in H \cdot e$. $\implies$ $X = \{h \in H : h \cdot e = e\} \neq \varnothing$. X — подполугруппа, и притом замкнутая: X — пересечение H с прообразом замкнутого множества $\{e\}$ при непрерывном отображении $s \mapsto s \cdot e$, $s \in S$). Следовательно, $X = H$, так что $e \in X$. □

Равномерные пространства

Пусть X — множество и $A, B \subset X \times X$. Обратное к A отношение обозначается через $-A$, а композиция отношений A и B — через $A+B$:
$-A = \{(x,y) : (y,x) \in A\}$, $\quad A+B = \{(x,z) : \exists y \in X$ такой, что $(x,y) \in A,\ (y,z) \in B\}$.
Композиция ассоциативна, но не коммутативна. Для $n \in \mathbb{N}$ nA определяется по индукции.

Определение

Каждое множество $V \subset X \times X$ такое, что $\Delta \subset V$ и $V = -V$, называется окружением диагонали. Множество окружений диагонали обозначается $\mathscr{D}_X$. Если $(x,y) \in V$, то говорят, что расстояние между x и y меньше V и пишут $|x-y| < V$; в противном случае пишут $|x-y| \geqslant V$. Если $A \subset X$ и $|x-y| < V$ $\forall x, y \in A$, то говорят, что диаметр A меньше V и пишут $\delta(A) < V$. Шаром радиуса V с центром x_0 называется множество

$$B(x_0, V) = \{x \in X : |x_0 - x| < V\}.$$

Свойства так определённого расстояния:

- $|x - x| < V$;
- $|x - y| < V \iff |y - x| < V$;
- если $|x - y| < V_1$ и $|y - z| < V_2$, то $|x - z| < V_1 + V_2$.

Определение

Равномерность на множестве X — семейство $\mathscr{U} \subset \mathscr{D}_X$, удовлетворяющее условиям:

1. если $V \in \mathscr{U}$ и $V \subset W \in \mathscr{D}_X$, то $W \in \mathscr{U}$;
2. если $U, V \in \mathscr{U}$, то $U \cap V \in \mathscr{U}$;
3. $\forall U \in \mathscr{U}\ \exists V \in \mathscr{U}$ такое, что $2V \subset U$;
4. $\bigcap \mathscr{U} = \Delta$.

Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{U}$ называется **базой равномерности** $\mathscr{U}$, если $\forall U \in \mathscr{U}\ \exists V \in \mathscr{B}$ такое, что $V \subset U$.

Каждое окружение диагонали U порождает покрытие $(U) = \{B(x, U)\}_{x \in X}$ множества X. Для равномерности $\mathscr{U}$ всякое покрытие вида (U) для $U \in \mathscr{U}$ называется равномерным относительно $\mathscr{U}$. Совокупность $\mathfrak{C}$ всех покрытий X, равномерных относительно $\mathscr{U}$, обладает следующими свойствами:

1. если $\mathscr{A} \in \mathfrak{C}$ и $\mathscr{A}$ вписано в некоторое покрытие $\mathscr{B}$ множества X, то $\mathscr{B} \in \mathfrak{C}$;
2. $\forall \mathscr{A}, \mathscr{B} \in \mathfrak{C}\ \exists \in \mathfrak{C}$, которое вписано и в $\mathscr{A}$, и в $\mathscr{B}$;
3. $\forall \mathscr{A} \in \mathfrak{C}\ \exists \mathscr{B} \in \mathfrak{C}$, сильно звёздно вписанное в $\mathscr{A}$ (т.е. $\forall B \in \mathscr{B}$ $\bigcup\{B' \in \mathscr{B} : B' \cap B \neq \varnothing\}$ содержится в некотором элементе покрытия $\mathscr{A}$);
4. $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists \mathscr{A} \in \mathfrak{C}$ такое, что ни один элемент $\mathscr{A}$ не содержит одновременно x и y.

Определение

Равномерное пространство — это пара $(X, \mathscr{U})$, состоящая из множества X и равномерности на нём.

Для любой равномерности $\mathscr{U}$ на множестве X семейство

$$\mathscr{T} = \{U \subset X : \forall x \in U\ \exists V \in \mathscr{U} \text{ такое, что } B(x, V) \subset U\}$$

есть T_1-топология на X.

Топология $\mathscr{T}$ называется топологией, порождённой равномерностью $\mathscr{U}$.

Теорема

Для каждой последовательности $U_0, U_1, \dots$ элементов равномерности $\mathscr{U}$ на множестве X, где

$$U_0 = X \times X \quad \text{и} \quad 3U_{i+1} \subset U_i \qquad \text{для } i = 1, 2, \dots,$$

существует такая псевдометрика ρ на X, что $\forall i \geqslant 1$

$$U_i \subset \{(x, y) : \rho(x, y) \leqslant 1/2^i\} \subset U_{i-1}.$$

Доказательство. Определим отображение $f : X \times X \to \mathbb{R}$ правилом

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{если } (x, y) \in \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} U_i, \\ 1/2^i, & \text{если } (x, y) \in U_i \setminus U_{i+1}, \end{cases}$$

и положим

$$\rho(x, y) = \inf\Big\{\sum_{i=1}^{k} f(x_{k-1}, x_i) : k \in \mathbb{N}, x_0 = x, x_k = y\Big\}.$$

Это псевдометрика.

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что
$$\tfrac{1}{2}f(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant f(x,y),$$
а для этого достаточно показать, что
$$\tfrac{1}{2}f(x,y) \leqslant \sum_{i=1}^{k} f(x_{i-1},x_i). \qquad (\star)$$
Индукция по k. Для $k=1$ $(\star)$ очевидно. Пусть $m>1$ и для $k<m$ $(\star)$ верно. Возьмём $x=x_0,\ldots,x_m=y$ и положим $a=\sum\limits_{i=1}^{m} f(x_{i-1},x_i)$. Если $a \geqslant 1/2$, то $(\star)$ выполнено. Будем считать, что $a<1/2$.

Предположим, что $a>0$. Имеем $f(x_0,x_1) \leqslant a/2$ или $f(x_{m-1},x_m) \leqslant a/2$. Будем считать, что $f(x_0,x_1) \leqslant a/2$. Пусть j — наибольший индекс такой, что
$$\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1},x_i) \leqslant a/2.$$
Тогда $\sum\limits_{i=1}^{j+1} f(x_{i-1},x_i) > a/2$, откуда $\sum\limits_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1},x_i) \leqslant a/2$.

По индуктивному предположению $f(x_0, x_j) \leqslant a$ и $f(x_{j+1}, x_m) \leqslant a$. По определению a имеем $f(x_j, x_{j+1}) \leqslant a$. Пусть l — наименьшее целое, для которого $1/2^l \leqslant a$; из $a < 1/2$ следует, что $l \geqslant 2$. Имеем $(x_0, x_j) \in U_l$, $(x_j, x_{j+1}) \in U_l$ и $(x_{j+1}, x_m) \in U_l$. По условию $(x_0, x_m) \in U_{l-1}$. Значит, $f(x, y) \leqslant 1/2^{l-1} \leqslant 2a$, а это и надо.

Пусть $a = 0$. Тогда $f(x_{i-1}, x_i) = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, так что $(x_i, x_{i-1}) \in U_j$ для $j = 0, 1, \ldots$. $\implies$ $(x, y) \in mU_j$ для $j = 0, 1, \ldots$, и $f(x, y) = 0$. □

Следствие

Для каждой равномерности $\mathscr{U}$ на множестве X и любого $U \in \mathscr{U}$ существует псевдометрика ρ на X, которая равномерна относительно $\mathscr{U}$ (т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists U \in \mathscr{U}$ такое, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, если $|x - y| < U$) и удовлетворяет условию

$$\{(x, y) : \rho(x, y) < 1\} \subset U.$$

Определение

Пусть $(X, \mathscr{U})$ — равномерное пространство. Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств X **содержит произвольно малые множества**, если $\forall U \in \mathscr{U}\ \exists F \in \mathscr{F}$ такое, что $\delta(F) < U$.

Пространство $(X, \mathscr{U})$ **полно**, если каждое центрированное семейство $\mathscr{F}$, состоящее из замкнутых подмножеств X и содержащее произвольно малые множества, имеет непустое пересечение.

Теорема

Пусть $(X, \mathscr{U})$ — полное равномерное пространство; тогда для $M \subset X$ равномерное пространство $(M, \mathscr{U} \cap (M \times M))$ полно $\iff$ M замкнуто в X относительно топологии $\mathscr{T}_{\mathscr{U}}$, порождённой равномерностью $\mathscr{U}$.

Пусть $(M, \mathscr{U} \cap (M \times M))$ полно и $x \in \overline{M}$, и пусть $\mathscr{F}$ — семейство всех множеств вида $B(x, U) \cap M$, где $U \in \mathscr{U}$ замкнуто в $\mathscr{T}_{\mathscr{U}}$. Тогда $\mathscr{F}$ центрировано, состоит из замкнутых в M множеств и содержит произвольно малые множества. $\bigcap \mathscr{F} \subset \{x\}$ $\implies$ $x \in M$.

Обратное утверждение очевидно. $\square$

Определение

Отображение $f\colon (X,\mathscr{U}) \to (Y,\mathscr{V})$ равномерно непрерывно, если $\forall V \in \mathscr{V}\ \exists U \in \mathscr{U}$ такое, что $(f(x), f(y)) \in V\ \forall (x,y) \in U$.

Теорема

Если $(X,\mathscr{U})$ — равномерное пространство, $(Y,\mathscr{V})$ — полное равномерное пространство и A — плотное подмножество X в топологии $\mathscr{T}_{\mathscr{U}}$, то каждое равномерно непрерывное отображение $f\colon (A, \mathscr{U} \cap A \times A) \to (Y,\mathscr{V})$ продолжается до равномерно непрерывного отображения $F\colon (X,\mathscr{U}) \to (Y,\mathscr{V})$.

Доказательство. Для $x \in X$ семейство $\overline{\{f(B(x,U) \cap A)\}}$, $U \in \mathscr{U}$, центрировано и содержит произвольно малые множества. Положим $F(x) = \bigcap\limits_{U \in \mathscr{U}} \overline{\{f(B(x,U) \cap A)\}}$.
$\forall W \in \mathscr{V}$ выберем $V \in \mathscr{V}$ такое, что $6V \subset W$ и открытое $U \in \mathscr{U}$ такое, что $|a-b| < 2U \implies |f(a) - f(b)| < V$. Если $M \subset X$, $\delta(M) < 2U$, то $\delta(\overline{f(M \cap A)}) < 3V$. Пусть $x, y \in X$, $|x-y| < U$, и пусть $a \in A \cap B(x,U) \cap B(y,U)$. Тогда $f(a) \in \overline{f(B(x,U) \cap A)} \cap \overline{f(B(y,U) \cap A)} \implies$
$\delta\left(\overline{f(B(x,U) \cap A)} \cap \overline{f(B(y,U) \cap A)}\right) < 6V$. $\square$

Равномерности на топологических группах

Пусть G — топологическая группа. Каждая симметричная открытая окрестность единицы U ($U \in \tau_1^{\mathrm{s}}$) естественно определяет три окружения диагонали:

$$O_U^{\mathrm{l}} = \{(g,h) \in G \times G : g^{-1} \cdot h \in U\},$$

$$O_U^{\mathrm{r}} = \{(g,h) \in G \times G : g \cdot h^{-1} \in U\},$$

$$O_U = O_U^{\mathrm{l}} \cap O_U^{\mathrm{r}}.$$

Эти окружения составляют базы трёх равномерностей на G, левой, правой и двусторонней:

$$\mathscr{B}_U^{\mathrm{l}} = \{O_U^{\mathrm{l}} : U \in \tau_1^{\mathrm{s}}\}, \quad \mathscr{B}_U^{\mathrm{r}} = \{O_U^{\mathrm{r}} : U \in \tau_1^{\mathrm{s}}\}, \quad \mathscr{B}_U = \{O_U^{:} U \in \tau_1^{\mathrm{s}}\}.$$

Сами эти равномерности:

$$\mathscr{V}_G^{\mathrm{l}} = \{D \in \mathscr{D}_G : O_U^{\mathrm{l}} \subset D \text{ для некоторого } U \in \tau_1^{\mathrm{s}}\},$$

$$\mathscr{V}_G^{\mathrm{r}} = \{D \in \mathscr{D}_G : O_U^{\mathrm{r}} \subset D \text{ для некоторого } U \in \tau_1^{\mathrm{s}}\},$$

$$\mathscr{V}_G = \{D \in \mathscr{D}_G : O_U \subset D \text{ для некоторого } U \in \tau_1^{\mathrm{s}}\}.$$

Если H — подгруппа G, то $\mathscr{V}_H^{\mathrm{l}} = \mathscr{V}_G^{\mathrm{l}} \cap (H \times H)$, $\mathscr{V}_H^{\mathrm{r}} = \mathscr{V}_G^{\mathrm{r}} \cap (H \times H)$ и $\mathscr{V}_H = \mathscr{V}_G \cap (H \times H)$.

Определение

Топологическая группа G **уравновешена**, если существует база окрестностей 1, состоящая из инвариантных (относительно сопряжений) множеств.

Лемма

Топологическая группа G уравновешена $\iff \forall U \in \tau_1\ \exists V \in \tau_1$ *такая, что* $x^{-1} \cdot V \cdot x \subset U$ *для всех* $x \in G$.

Доказательство. Пусть V как выше. Тогда $W = \bigcup_{x \in G} x^{-1} \cdot V \cdot x \in \tau_1$. Ясно, что $W \subset U$. Проверим инвариантность: для $g \in G$

$$g^{-1} \cdot W \cdot g = \bigcup_{x \in G} g^{-1} \cdot x^{-1} \cdot V \cdot x \cdot g = \bigcup_{y \in G} y^{-1} \cdot V \cdot y = W.$$

□

Следствие

Любая компактная топологическая группа уравновешена.

Теорема

Равномерности $\mathscr{V}^{\mathrm{l}}_G$, $\mathscr{V}^{\mathrm{r}}_G$ и $\mathscr{V}_G$ на топологической группе G совпадают $\iff$ G уравновешена.

Доказательство. Пусть G уравновешена, и пусть $\tau_1^{\mathrm{s,i}}$ — семейство всех открытых симметричных инвариантных окрестностей 1. Это база окрестностей 1. $\implies$

$$\mathscr{B}^{\mathrm{l}} = \{O^{\mathrm{l}}_U : U \in \tau_1^{\mathrm{s,i}}\} \quad \text{и} \quad \mathscr{B}^{\mathrm{r}} = \{O^{\mathrm{r}}_U : U \in \tau_1^{\mathrm{s,i}}\}$$

— базы равномерностей $\mathscr{V}^{\mathrm{r}}_G$ и $\mathscr{V}^{\mathrm{r}}_G$ соответственно. Имеем

$(x, y) \in O^{\mathrm{l}}_U \iff x^{-1} \cdot y \in U \iff y \cdot x^{-1} \in x^{-1} \cdot U \cdot x = U \iff$

$\iff x \cdot y^{-1} \in U^{-1} = U \iff (x, y) \in O^{\mathrm{r}}_U \implies \mathscr{V}^{\mathrm{l}}_G = \mathscr{V}^{\mathrm{r}}_G = \mathscr{V}_G$.

Обратная импликация следует из того, что $\forall U, V \in \tau_1^{\mathrm{s}}$ $O^{\mathrm{l}}_V \subset O^{\mathrm{r}}_U \iff x \cdot V \subset U \cdot x$ $\forall x \in G$. □

Теорема

Любой непрерывный гомоморфизм $G \to H$ равномерно непрерывен относительно всех трёх равномерностей на G и H.

Определение

Фильтром на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$);
3. если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. В частности, $X \in \mathscr{F}$.

Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является **базой** фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

Определение

Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X **сходится** к некоторой точке $x \in X$, если любая окрестность этой точки принадлежит $\mathscr{F}$. Для сходимости $\mathscr{F}$ к x используется обозначение $\mathscr{F} \to x$. Фильтр **сходится**, или является **сходящимся**, если он сходится к некоторой точке.

Фильтр, который содержит центрированное семейство, содержащее произвольно малые множества, называется фильтром Коши. Равномерное пространство полно $\iff$ любой фильтр Коши на нём сходится.

Пусть G — топологическая группа с единицей 1. Для $x \in G$ пусть τ_x — семейство всех открытых окрестностей x.

Фильтр $\mathscr{F}$ является фильтром Коши относительно левой равномерности $\mathscr{V}^{\mathrm{l}}$, если $\forall U \in \tau_1$ существуют $g \in G$ и $F \in \mathscr{F}$ такие, что $F \subset g \cdot U \iff \forall U \in \tau_1$ существует $F \in \mathscr{F}$ такой, что $F^{-1} \cdot F \subset U$.

Фильтр $\mathscr{F}$ является фильтром Коши относительно правой равномерности $\mathscr{V}^{\mathrm{r}}$, если $\forall U \in \tau_1$ существуют $g \in G$ и $F \in \mathscr{F}$ такие, что $F \subset U \cdot g \iff \forall U \in \tau_1$ существует $F \in \mathscr{F}$ такой, что $F \cdot F^{-1} \subset U$.

Фильтр $\mathscr{F}$ является фильтром Коши относительно двусторонней равномерности $\mathscr{V}$, если $\forall U \in \tau_1$ существуют $g, h \in G$ и $F \in \mathscr{F}$ такие, что $F \subset g \cdot U \cap U \cdot h \iff \forall U \in \tau_1$ существует $F \in \mathscr{F}$ такой, что $F \cdot F^{-1} \cup F^{-1} \cdot F \subset U$.

В дальнейшем будем рассматривать двустороннюю равномерность $\mathscr{V}$.

Фильтр $\mathscr{O}$ на топологической группе $(G, \mathscr{T})$ называется открытым фильтром на G, если $\exists$ фильтр $\mathscr{F}$ на G такой, что $\mathscr{O} = \mathscr{F} \cap \mathscr{T}$. Если $\mathscr{F}$ — фильтр Коши, то $\mathscr{O}$ — открытый фильтр Коши.

Фильтр $\mathscr{O}$ является открытым фильтром Коши $\iff$ $\forall U \in \tau_1$ существует $O \in \mathscr{O}$ такой, что $O \cdot O^{-1} \cup O^{-1} \cdot O \subset U$.

Семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(G)$ называется сжимающимся, если для каждого $F \in \mathscr{F}$ существуют $F' \in \mathscr{F}$ и $U, V \in \tau_1$ такие, что $U \cdot F' \cdot V \subset F$. Канонический фильтр на G — это открытый фильтр, который одновременно является открытым фильтром Коши и сжимающимся семейством.

Для фильтра $\mathscr{F}$ на $(G, \mathscr{T})$ пересечение $\mathscr{F} \cap \mathscr{T}$ обозначается $o(\mathscr{F})$.

Для семейств $\mathscr{F}, \mathscr{G} \subset \mathscr{P}(G)$ $[\mathscr{F} \cdot \mathscr{G}] = \{F \cdot G : F \in \mathscr{F}, G \in \mathscr{G}\}$.

1. Фильтр $\mathscr{F}$ сжимающийся $\implies$ открытый фильтр $o(\mathscr{F})$ тоже.
2. $\mathscr{F}$ — сжимающийся фильтр Коши $\implies$ $o(\mathscr{F})$ — канонический открытый фильтр.
3. Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — открытые фильтры, то $[\mathscr{F} \cdot \mathscr{G}]$ — открытая база фильтра $\implies$ $o(\mathscr{F} \cdot \mathscr{G})$ — открытый фильтр.

4. Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — фильтры Коши, то $[\mathscr{F} \cdot \mathscr{G}]$ — база фильтра Коши.

Доказательство. Пусть $U \in \tau_1$. Возьмём $V \in \tau_1$, $V^2 \subset U$. Найдём $g \in G$ и $F \in \mathscr{F}$, для которых $F \subset g \cdot V$. $g \cdot V \cdot g^{-1} \in \tau_1 \implies$ существуют $g' \in G$ и $F' \in \mathscr{G}$, для которых $F' \subset g' \cdot g \cdot V \cdot g^{-1}$, так что

$$F \cdot F' \subset g' \cdot g \cdot V \cdot g^{-1} \cdot g \cdot V \subset g' \cdot g \cdot V \cdot V \subset g' \cdot g \cdot U.$$

□

5. Если $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ — канонические открытые фильтры, то $[\mathscr{F} \cdot \mathscr{G}]$ — база канонического открытого фильтра.
6. Если $\mathscr{B}$ и $\mathscr{B}'$ — открытые базы фильтров, то $o(o(\mathscr{B}) \cdot o(\mathscr{B}')) = o(\mathscr{B} \cdot \mathscr{B}')$.

Обозначим через G^* семейство всех канонических фильтров на G. Отображение $i\colon G \to G^*$, определённое правилом $x \mapsto \tau_x$, взаимно однозначно.

Умножение в G^* определяется правилом $\mathscr{O} \cdot \mathscr{U} = o([\mathscr{O} \cdot \mathscr{U}])$.
Для $\mathscr{O} \in G^*$ полагаем $\mathscr{O}^{-1} = \{O^{-1} : O \in \mathscr{O}\}$.

- $(\tau_x)^{-1} = \tau_{x^{-1}}$;
- $\tau_x \cdot \tau_y = \tau_{x \cdot y}$.

Из этих замечаний, характеризации фильтра Коши и определения канонического фильтра следует

Факт

Для любого $\mathscr{O} \in G^*$ $\mathscr{O} \cdot \mathscr{O}^{-1} = \mathscr{O}^{-1} \cdot \mathscr{O} = \tau_1$.

Скажем, что фильтры $\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}'$ синхронны, если для любых $F \in \mathscr{F}$ и $F' \in \mathscr{F}'$ имеем $F \cap F' \neq \varnothing$.

Предложение

Если $\mathscr{O}$ *— канонический фильтр и* $\mathscr{U}$ *— открытый фильтр Коши, синхронный с* $\mathscr{O}$*, то* $\mathscr{O} \subset \mathscr{U}$*.*

Доказательство. Возьмём $U \in \mathscr{O}$. Поскольку $\mathscr{O}$ сжимающийся, существуют $O \in \mathscr{O}$ и $V \in \tau_1$ такие, что $O \cdot V \subset U$. Пусть $W \in \tau_1$, $W^{-1} \cdot W \subset V$.

$\mathscr{U}$ — открытый фильтр Коши $\implies$ $\exists\, g \in G$ такой, что $g \cdot W \in \mathscr{U}$. Фильтры синхронны $\implies$ $O \cap g \cdot W \neq \varnothing$ $\implies$ $g \in O \cdot W^{-1}$ $\implies$ $g \cdot W \subset O \cdot W^{-1} \cdot W \subset O \cdot V \subset U$. Итак, $g \cdot W \subset U$ $\implies$ $U \in \mathscr{U}$. □

Следствие

Любые два синхронных канонических фильтра совпадают.

Следствие

Если $\mathscr{U}$ *и* $\mathscr{V}$ *— разные канонические фильтры, то существуют* $U \in \mathscr{U}$ *и* $V \in \mathscr{V}$ *такие, что* $U \cap V = \varnothing$*.*

Факт

Для каждого $\mathscr{O} \in G^*$ имеем $\mathscr{O} \cdot \tau_1 = \mathscr{O}$.

Доказательство. Для $V \in \tau_1$ имеем $1 \in V \implies \mathscr{O} \subset \mathscr{O} \cdot \tau_1 \implies \mathscr{O}$ и $\mathscr{O} \cdot \tau_1$ синхронны $\implies \mathscr{O} = \mathscr{O} \cdot \tau_1$. □

Мы определили операции на G^* (нейтральный элемент — τ_1) и вложение $i\colon G \to G^*$. Определим топологию.

Пусть $\mathscr{T}$ — топология на G. Для $U \in \mathscr{T}$ положим $U^* = \{\mathscr{O} \in G^* : U \in \mathscr{O}\}$.

Факт

Для любых $U, V \in \mathscr{T}$ имеем $U^* \cap i(G) = i(U)$ и $U^* \cap V^* = (U \cap V)^*$.

$\mathscr{B} = \{U^* : U \in \mathscr{T}\}$ — база топологии на G^*, $i(G)$ — плотное подпространство G^*. Это групповая топология. Непрерывность обратного очевидна. Непрерывность умножения: пусть $\mathscr{U}, \mathscr{V} \in G^*$ и W^* — окрестность $\mathscr{U} \cdot \mathscr{V}$ в G^*, где $W \in \mathscr{T}$. Тогда $W \in \mathscr{U} \cdot \mathscr{U}$. Имеем $\mathscr{U} \cdot \mathscr{V} = o([\mathscr{U} \cdot \mathscr{V}])$. $\implies$ существуют $U \in \mathscr{U}$ и $V \in \mathscr{V}$ такие, что $U \cdot V \subset W$. Имеем $\mathscr{U} \in U^*$ и $\mathscr{V} \in V^*$. Если $\mathscr{U}' \in U^*$ и $\mathscr{V}' \in V^*$, то $U \cdot V \in [\mathscr{U}' \cdot \mathscr{V}'] \implies W \in o([\mathscr{U}' \cdot \mathscr{V}']) = \mathscr{U}' \cdot \mathscr{V}' \iff \mathscr{U}' \cdot \mathscr{V}' \in W^*$.

Предложение

Для любого открытого множества $U \subset G$ U^* — максимальное множество в G^* среди всех открытых множеств $O \subset G$ со свойством $O \cap G = U$.

Доказательство. Пусть O открыто в G^* и $\mathscr{V} \in O \setminus U^*$. Тогда $U \notin \mathscr{V}$. Значит, для всех $V \in \mathscr{V}$ имеем $V \setminus U \neq \varnothing$. Множество O открыто $\implies$ $\mathscr{V}$ содержится в O вместе с некоторой своей окрестностью V^*, где $V \in \mathscr{V}$. Поскольку $V^* \cap G = V \not\subset U$, имеем $O \cap G \neq U$. $\square$

Для $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(G)$ положим $s(\mathscr{F}) = \{U \cdot F \cdot V : U, V \in \tau_1, F \in \mathscr{F}\}$ и $c(\mathscr{F}) = o(s(\mathscr{F}))$.

Предложение

Если $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(G)$ — фильтр Коши на G, то $c(\mathscr{U})$ — канонический фильтр на G.

Доказательство. Ясно: $s(\mathscr{U})$ — открытая база фильтра.
Ясно: $s(\mathscr{U})$ — сжимающееся семейство.
$s(\mathscr{U})$ — база фильтра Коши: пусть $U \in \tau_1$. Возьмём $V \in \tau_1$: $V^3 \subset U$. $\mathscr{U}$ — фильтр Коши $\implies \exists g, h \in G$: $V \cdot g \in \mathscr{U}$ и $h \cdot V \in \mathscr{U}$. Имеем $V \cdot (V \cdot g) \cdot g^{-1} \cdot V \cdot g = V^3 \cdot g \subset U \cdot g \in s(\mathscr{U})$. Аналогично $h \cdot U \in s(\mathscr{U})$. $\square$

Замечание

Если $\mathscr{U}$ — (открытый) фильтр, то $s(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}$, потому что по определению (открытого) фильтра вместе с каждым элементом U фильтр $\mathscr{U}$ содержит все (открытые) множества $V \supset U$. Тем более, $c(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}$.

Предложение

Пусть H — плотная подгруппа топологической группы G, и пусть $\mathscr{U}$ — открытый фильтр на G. Положим $\mathscr{U}_H = \{U \cap H : U \in \mathscr{U}\}$. Тогда

1. *$\mathscr{U}_H$ — открытый фильтр на H, синхронный с $\mathscr{U}$;*
2. *если $\mathscr{U}$ — фильтр Коши на G, то $\mathscr{U}_H$ — фильтр Коши на H;*
3. *если $\mathscr{U}_H$ сходится в H, то $\mathscr{U}$ сходится в G к той же точке;*
4. *если $\mathscr{U}$ канонический в G, то $\mathscr{U}_H$ канонический в H.*

Доказательство. 2: Пусть $U \in \tau_1$ в H. $\exists$ $V \in \tau_1$ в G такая, что $V \cap H = U$. $\exists$ $F \in \mathscr{U}$ такой, что $F^{-1} \cdot F \subset V$ и $F \cdot F^{-1} \subset V$. Положим $P = F \cap H$. Имеем $P \in \mathscr{U}_H$, $P^{-1} \cdot P \subset H \cap V = U$ и $P \cdot P^{-1} \subset H \cap V = U$. □

Лемма

Если $\mathscr{U}$ — фильтр Коши и $o(\mathscr{U})$ сходится, то $\mathscr{U}$ тоже сходится.

Теорема

Любой фильтр Коши в группе G^* сходится. Таким образом, топологическая группа G^* полна по Райкову, и она является пополнением группы G. Следовательно, для любой топологической группы G существует её пополнение по Райкову.

Пусть $\mathscr{U}$ — открытый фильтр Коши на G^* (в силу леммы достаточно рассмотреть только такие). Отождествим каждый элемент $x \in G$ с $i(x)$. При таком отождествлении G становится плотной подгруппой группы G^*. По предложению $\mathscr{U}_G$ является фильтром Коши в G. Положим $\mathscr{V} = c(\mathscr{U}_G)$. Тогда $\mathscr{V} \in G^*$. Любая окрестность точки $\mathscr{V}$ в G^* содержит окрестность вида U^* для $U \in \mathscr{V}$. Поскольку $\mathscr{V} \subset \mathscr{U}_G$ (см. замечание), имеем $U \in \mathscr{U}_G$, а поскольку фильтр $\mathscr{U}$ открыт и U^* — максимальное открытое множество со свойством $U^* \cap G = U$, имеем $U^* \in \mathscr{U}$. Значит, $\mathscr{U} \to \mathscr{V}$. $\square$

Функциональные пространства

Определение

Множество всех непрерывных отображений $X \to Y$ обозначается $C(X, Y)$. Для $A \subset X$ и $B \subset Y$ $\langle A, B\rangle = \{f \in C(X, Y) : f(A) \subset B\}$.

Пусть $\mathscr{F} \ni \varnothing$ — некоторое семейство множеств в пространстве X. Тогда семейство $\mathscr{B}$ всех множеств вида $\langle A, U\rangle$, где $A \in \mathscr{F}$ и U — открытое в Y множество, составляет предбазу некоторой топологии на $C(X, Y)$, которая называется топологией равномерной сходимости на элементах семейства $\mathscr{F}$.

Если $\mathscr{F}$ — семейство всех конечных подмножеств пространства X, то эта топология называется топологией поточечной сходимости, и $C(X, Y)$ с этой топологией обозначается $C_p(X, Y)$.

Если $\mathscr{F}$ — семейство всех компактных подмножеств пространства X, то она называется компактно открытой топологией, и $C(X, Y)$, наделённое этой топологией, обозначается $C_c(X, Y)$ или $C_k(X, Y)$.

Если $\mathscr{F}$ — семейство всех ограниченных в X множеств, то $C(X, Y)$ с соответствующей топологией обозначается $C_0(X, Y)$.

Определение

Стандартная база пространства $C_p(X, Y)$ состоит из множеств вида

$$W(x_1, \dots, x_k, U_1, \dots, U_k) = \{f \in C(X, Y) : f(x_i) \in U_i, i \leqslant k\},$$

где $k \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_k \in X$ и $U_1, \dots, U_k$ — открытые множества в Y.

Стандартная окрестность точки $f \in C_p(X) = C_p(X, \mathbb{R})$ — это окрестность вида

$$W(f, x_1, \dots, x_k, \varepsilon) = W\big(x_1, \dots, x_k, (f(x_1) - \varepsilon, f(x_1) + \varepsilon), \dots, (f(x_n) - \varepsilon, f(x_n) + \varepsilon)\big),$$

где $\varepsilon > 0$.

$C_p(X)$ можно рассматривать как топологическое пространство, как топологическое кольцо, как топологическую группу или как линейное топологическое пространство.

Чем слабее топология на пространстве функций, тем шире запас компактов в этом пространстве. Одно из самых важных достоинств топологии поточечной сходимости состоит в том, что она наименьшая среди практически всех естественных топологий, а значит, порождает наибольший запас компактов. Но главное преимущество топологии поточечной сходимости — то, что тихоновские пространства X и Y гомеоморфны в том (и только том) случае, если топологические кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны.

Каноническое отображение вычисления в пространство $C_p(C_p(X))$

Пусть X — пространство. Для каждого $x \in X$ рассмотрим отображение $e_x \colon C(X) \to \mathbb{R}$, определённое правилом $e_x(f) = f(x)$, $f \in C(X)$. Для $x \in X$ положим $E(x) = e_x$. Мы получили отображение из X в $\mathbb{R}^{C(X)}$.
Из определения топологии на $C_p(X)$ вытекает

Предложение

Для любого $x \in X$ отображение $e_x \colon C_p(X) \to \mathbb{R}$ непрерывно.

Следовательно, E отображает X в $C_p(C_p(X)) = C_pC_p(X)$. Отображение E называется канон, **каноническим отображением вычисления**.

Предложение

Отображение $E \colon X \to C_pC_p(X)$ — гомеоморфное вложение.

Доказательство. Имеем $E = \underset{f \in C(X)}{\Delta} f$, причём семейство $C(X)$ разделяет точки и замкнутые множества. По теореме о диагональном отображении E — гомеоморфное вложение. □

Следствие

Всякое пространство X гомеоморфно подпространству $E(X)$ пространства $C_pC_p(X)$.

Рассмотрим подпространство

$$L_p(X) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in C_pC_p(X) : n \in \mathbb{N}, x_i \in X, \lambda_i \in \mathbb{R}\},$$

алгебраически порожденное множеством X в линейном пространстве $C_pC_p(X)$. Пространство $L_p(X)$ — наименьшее линейное подпространство линейного топологического пространства $C_pC_p(X)$, содержащее копию $E(X)$ пространства X.

Предложение

$L_p(X)$ — локально выпуклое линейное топологическое пространство над полем $\mathbb{R}$, причем X гомеоморфно его топологическому подпространству.

Определение

Линейное топологическое пространство, сопряженное к вещественному линейному пространству L, — это линейное пространство L' всех непрерывных функционалов (вещественных линейных функций) на L, наделенное топологией поточечной сходимости.

Предложение

$L_p(X) = (C_p(X))'$.

Доказательство. При каноническом отождествлении X с $E(X) \subset C_p C_p(X)$ произвольная точка $x \in X$ становится линейным функционалом на $C_p(X)$, а именно, $x(f) = f(x)$ для всех $f \in C_p(X)$. Очевидно, функционал x непрерывен на $C_p(X)$. Поэтому и $\lambda_i x_i$ — непрерывный линейный функционал на $C_p(X)$, а отсюда следует, что и все $g \in L_p(X)$ — непрерывные линейные функционалы на $C_p(X)$. Остаётся доказать, что любой линейный функционал $C_p(X) \to \mathbb{R}$ представим в виде $\sum \lambda_i x_i$.

Лемма

Если $\varphi \in C_p C_p(X)$ *— линейная функция, то найдутся* $x_1, \ldots, x_n \in X$ *и* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *такие, что* $\varphi = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

Доказательство. Возьмем $f \equiv 0 \in C_p(X)$. Имеем $\varphi(f) = 0$, и непрерывность φ $\implies$ $\exists x_1, \ldots, x_n \in X$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $\varphi(W(f, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)) \subset (-1, 1)$. Можно считать, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Пусть $g \in C_p(X)$ и $g(x_i) = 0$ для $i \leqslant n$. Тогда $\varphi(g) = 0$. Действительно, $\forall k \in \mathbb{N}$ имеем $k \cdot g \in W(f, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon)$ $\implies$ $|\varphi(k \cdot g)| < 1$. φ линейна $\implies$ $k \cdot |\varphi(g)| < 1$.

Имеем $|\varphi(g)| < 1/k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ $\implies$ $\varphi(g) = 0$. Выберем $g_i \in C_p(X)$ так, что $g_i(x_i) = 1$ и $g_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$. Положим $\lambda_i = \varphi(g_i)$. Проверим, что $\forall g \in C_p(X)$ имеем $\varphi(g) = \lambda_1 \cdot g(x_1) + \cdots + \lambda_n \cdot g(x_n)$.

Положим $g' = g - g(x_1) \cdot g_1 - \cdots - g(x_n) \cdot g_n$. Имеем $g' \in C_p(X)$ и $g'(x_i) = 0$ для $i \leqslant n$. Значит, $\varphi(g') = 0$. Функция φ линейна $\implies$

$0 = \varphi(g') = \varphi(g) - \varphi\left(\sum g(x_i) \cdot g_i\right)$ и

$\varphi(g) = \varphi\left(\sum g(x_i) \cdot g_i\right) = \sum g(x_i) \cdot \varphi(g_i) = \sum \lambda_i \cdot g(x_i)$.

Вывод: $\varphi(g) = \sum \lambda_i \cdot g(x_n) = (\lambda_1 \cdot x_1 + \cdots + \lambda_n \cdot x_n)(g)$. $\square$

Теорема (Нагата)

Если топологические кольца $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ топологически изоморфны, то пространства X и Y гомеоморфны.

Доказательство. Скажем, что функционал $g\colon C_p(X) \to \mathbb{R}$ мультипликативный, если $g(f \cdot h) = g(f) \cdot g(h)$ для всех $f, h \in C_p(X)$.

Обозначим через $\bar{X}$ подпространство пространства $C_p(C_p(X))$, образованное всеми ненулевыми непрерывными линейными мультипликативными функционалами на $C_p(X)$. Ясно, что $X \subset \bar{X} \subset L_p(X)$. Топологический изоморфизм между кольцами $C_p(X)$ и $C_p(Y)$ очевидным образом порождает гомеоморфизм между пространствами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Поэтому теорема Нагаты будет доказана, если мы установим, что $\bar{X} = X$ и $\bar{Y} = Y$ (точнее, $\bar{X} = E(X)$ и $\bar{Y} = E(Y)$). Достаточно установить, что $\bar{X} \subset X$.

Пусть $g \in \bar{X}$. По условию $g \neq 0$. Из $g \in L_p(X) \setminus \{0\}$ следует, что найдутся $x_1, \dots, x_n \in X$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, для которых $g = \lambda_1 \cdot x_1 + \dots + \lambda_n \cdot x_n$ и $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Случай 1: $n > 1$. Возьмём $f_1, f_2 \in C_p(X)$ такие, что $f_1(x_1) = \frac{1}{\lambda_1}$, $f_2(x_2) = \frac{1}{\lambda_2}$ и $f_i(x_j) = 0$ для $i = 1, 2$ и $j \leqslant n$, $j \neq j$. Имеем $g(f_1) = \lambda_1 \cdot f_1(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f_1(x_n) = 1$ и $g(f_2) = \lambda_1 \cdot f_2(x_1) + \dots + \lambda_n \cdot f_2(x_n) = 1$, но $g(f_1 \cdot f_2) = 0$, так как $(f_1 \cdot f_2)(x_i) = 0$ для $i \leqslant n$. Значит, случай 1 невозможен.

Случай 2: $n = 1$, т.е. $g = \lambda_1 \cdot x_1$. Поскольку $g \neq 0$, имеем $\lambda_1 \neq 0$. Для $f_0 \equiv 1$ имеем $f_0 = f_0^2$ и $g(f_0) = g(f_0^2) = g(f_0) \cdot g(f_0)$. С другой стороны, $g(f_0) = \lambda_1 \cdot x_1(f_0) = \lambda_1 \cdot f_0(x_0) = \lambda_1$. Значит, $\lambda_1 = 1$ и $g = x_1 \in X$. □

Отображение сужения и двойственное отображение

Пусть $Y \subset X$. Через $\pi_Y = \pi$ обозначается отображение сужения функций из $C_p(X)$ на Y: $\pi(f) = f|_Y$ для всех $f \in C_p(X)$. Подпространство $\pi(C_p(X)) \subset C_p(Y)$ обозначается $C_p(Y|X)$.

- π непрерывно и $\overline{\pi(C_p(X))} = C_p(Y)$;
- если X нормально и Y замкнуто в X, то $\pi(C_p(X)) = C_p(Y)$;
- если Y компактно, то $\pi(C_p(X)) = C_p(Y)$;
- если Y всюду плотно в X, то $\pi \colon C_p(X) \to C_p(Y|X)$ — уплотнение (взаимно однозначное непрерывное отображение).

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств. Двойственное к f отображение $f^{\#}\colon \mathbb{R}^Y \to \mathbb{R}^X$ определяется правилом $f^{\#}(\varphi)(x) = \varphi(f(x))$ для $\varphi \in \mathbb{R}^Y$, $x \in X$, т.е. $f^{\#} = \varphi \circ f$.

Теорема

1. *Отображение $f^{\#}$ непрерывно.*
2. *Если $f(X) = Y$, то $f^{\#}$ — вложение и $f^{\#}(\mathbb{R}^Y)$ замкнуто в $\mathbb{R}^X$.*

1. Пусть $f^{\#}(\varphi) = \psi$ и $W(\psi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ — стандартная окрестность точки ψ в пространстве $\mathbb{R}^X$. Для $y_i = f(x_i)$, $i \leqslant k$, имеем $f^{\#}(W(\varphi, y_1, \ldots, y_k, \varepsilon)) \subset W(\psi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$. Значит, $f^{\#}$ непрерывно.

2. Пусть $f(X) = Y$ и $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^Y$, $\varphi_1 \neq \varphi_1$. Возьмём $y \in Y$ такое, что $\varphi_1(y) \neq \varphi_1(y)$. При $x \in f^{-1}(y)$ имеем $f^{\#}(\varphi_1)(x) = \varphi_1(y) \neq \varphi_2(y) = f^{\#}(\varphi_2)(x)$. Значит, $f^{\#}(\varphi_1) \neq f^{\#}(\varphi_2)$, т.е. $f^{\#}$ инъективно. Обратное отображение $(f^{\#})^{-1}$ непрерывно: если $\psi = f^{\#}(\varphi)$, то для произвольной стандартной окрестности $U = W(\psi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ точки ψ в $\mathbb{R}^X$ имеем $(f^{\#})^{-1}(U \cap f^{\#}(\mathbb{R}^Y)) \subset W(\varphi, f(x_1), \ldots, f(x_k), \varepsilon)$. Очевидно, $f^{\#}(\mathbb{R}^Y) = \{\varphi \in \mathbb{R}^X : \text{если } f(x_1) = f(x_2), \text{ то } \varphi(x_1) = \varphi(x_2)\}$ замкнуто. $\square$

Теорема

Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение и $f(X) = Y$. Тогда

1. *f непрерывно $\iff$ $f^{\#}(C(Y)) \subset C(X)$;*
2. *если f — факторное отображение, то $f^{\#}(C(Y))$ замкнуто в $C_p(X)$;*
3. *f — уплотнение (непрерывная биекция) $\iff$ $f^{\#}(C(Y))$ всюду плотно в $C_p(X)$;*
4. *f — гомеоморфизм $\iff$ $f^{\#}(C(Y)) = C(X)$.*

Доказательство. 1. f непрерывно $\iff$ если $x \in \overline{A}$, то $f(x) \in \overline{f(A)}$. Если $f(x) \notin \overline{f(A)}$, то $\exists\, g \in C(Y)$ такая, что $g(f(x)) = 0$, $g(f(A)) = \{1\}$. Функция $f^{\#}(g) = g \circ f$ не непрерывна.

2. Пусть f факторно, $\psi \in \overline{f^{\#}(C(Y))}^{C_p(X)}$. $\forall y \in Y$ все $\varphi \in f^{\#}(C(Y))$ постоянны на $f^{-1}(y)$ $\implies$ ψ постоянна на $f^{-1}(y)$ $\implies$ $\exists g\colon Y \to \mathbb{R}$ такая, что $\psi = g \circ f$, т.е. $\psi = f^{\#}(g)$. f факторно, ψ непрерывна $\implies$ g непрерывна.

3. Пусть f — уплотнение, $\varphi \in C(X)$ и $U = W(\varphi, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ — стандартная окрестность φ. Положим $y_i = f(x_i)$, $i \leqslant k$. f — биекция $\implies \exists\, \psi \in C_p(X)$ такая, что $\psi(y_i) = \varphi(x_i)$ для $i \leqslant k$. Ясно, что $f^{\#}(\psi) \in U$.

Обратно, если $x_1 \neq x_2$, но $f(x_1) = f(x_2) = y$, то $\forall \varphi \in f^{\#}(C(Y))$ $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Если $\psi \in C(X)$, $\psi(x_1) = 0$, $\psi(x_2) = 1$, то $W(\psi, x_1, x_2, \frac{1}{2}) \cap f^{\#}(C(Y)) = \varnothing$.

4. Знаем, что если $f^{\#}(C(Y)) = C(X)$, то f — уплотнение. Пусть f не является гомеоморфизмом. Тогда $\exists$ замкнутое $F \subset X$ такое, что $f(F)$ не замкнуто в Y. Возьмём $y \in \overline{f(F)} \setminus f(F)$ и $\varphi \in C(X)$ такую, что $\varphi(F) = \{0\}$ и $\varphi(x) = \{1\}$, где $x = f^{-1}(y)$. Если $\psi \in \mathbb{R}^Y$ и $f^{\#}(\psi) = \varphi$, то $\psi(y) = 1$ и $\psi(f(F)) = \{0\} \implies \psi$ не непрерывна. $\implies \varphi \notin f^{\#}(C(Y))$. Противоречие. $\square$

Кардинальные инварианты пространств $C_p(X)$

$w(X) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B}$ — база топологии $X\}$;
$\chi(x, X) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B}$ — база окрестностей точки x в $X\}$;
$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}$.

Теорема

Для любого пространства X $|X| = \chi(C_p(X)) = w(C_p(X))$.

Доказательство. Имеем $\chi(C_p(X)) \leqslant w(C_p(X)) \leqslant w(\mathbb{R}^X) \leqslant |X|$.

Докажем, что $|X| \leqslant \chi(C_p(X))$. Предположим противное и зафиксируем базу $\mathscr{B}$ пространства $C_p(X)$ в точке $f \equiv 0$ такую, что $|\mathscr{B}| < |X|$. Можно считать, что элементы $\mathscr{B}$ — стандартные открытые в $C_p(X)$ множества. Для каждого $W(f, x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \in \mathscr{B}$ возьмём $K(W) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и положим $Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathscr{B}\}$. Поскольку $|Y| < |X|$, найдётся точка $x^* \in X \setminus Y$. Положим $U = W(f, x^*, 1)$ и рассмотрим любое $V = W(f, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon) in \mathscr{B}$. Имеем $x_1, \ldots, x_k \in Y \implies x^* \neq x_i$ для $i \leqslant k$. Найдётся функция $g \in C_p(X)$, для которой $g(x_i) = 0$, $i \leqslant k$, и $g(x^*) = 1$. Получаем $g \in V \setminus U$, т.е. $V \setminus U \neq \varnothing$ для всех $V \in \mathscr{B}$. Противоречие с тем, что $\mathscr{B}$ — база $C_p(X)$ в точке $f \in U$. $\square$

Определение

Сетью топологического пространства X называется семейство $\mathscr{N} \subset \mathscr{P}(X)$ с тем свойством, что любое открытое множество в X является объединением некоторых элементов семейства $\mathscr{N}$. Иными словами, для любой окрестности U любой точки $x \in X$ существует $N \in \mathscr{N}$ такое, что $x \in N \subset U$.

Минимальная мощности сети пространства X называется сетевым весом X и обозначается $nw(X)$:

$$nw(X) = \min\{|\mathscr{N}| : \mathscr{N} \text{ — сеть пространства } X\}.$$

Ясно, что $nw(X) \leqslant w(X)$ (где $w(X)$ — минимальная мощность базы топологии X) и $nw(X) \leqslant |X|$. Известно, что любое вполне регулярное пространство X можно уплотнить на вполне регулярное пространство Y с $w(Y) \leqslant nw(X)$.

Теорема

$nw(X) = nw(C_p(X))$.

Доказательство. Покажем: $nw(C_p(X)) \leqslant nw(X)$. Пусть $\mathscr{N}$ — сеть в X и $\mathscr{B}$ — счётная база в $\mathbb{R}$. Для каждой пары наборов $N_1, \ldots, N_k \in \mathscr{N}$, $U_1, \ldots, U_k \in \mathscr{B}$ зафиксируем

$$W(N_1, \ldots, N_k, U_1, \ldots, U_k) = \{f \in C(X) : f(N_i) \subset U_i,\ i \leqslant k\}.$$

Семейство $\mathscr{W} = \{W(N_1, \ldots, N_k, U_1, \ldots, U_k) : k \in \mathbb{N}, N_i \in \mathscr{N}, U_i \in \mathscr{B}\}$ — сеть в $C_p(X)$ (причём $|\mathscr{W}| \leqslant |\mathscr{N}|$).

Пусть $f \in C_p(X)$ и $W(f, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$ — стандартная окрестность f, $x_i \neq x_j$ для $i \neq j$. Пусть $U_i \in \mathscr{B}$, $f(x_i) \in U_i \subset (f(x_i) - \varepsilon, f(x_i) + \varepsilon)$. f непрерывна $\implies \exists$ $N_i \in \mathscr{N}$ такие, что $x_i \in N_i$ и $f(N_i) \subset U_i$. Имеем $f \in W(N_1, \ldots, N_k, U_1, \ldots, U_k) \subset W(f, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon)$.

Обратное неравенство: $X \subset C_p C_p(X) \implies$

$$nw(X) \leqslant nw(C_p C_p(X)) \leqslant nw(C_p(X)).$$

$\square$

$iw(X) = \min\{w(Y) : \exists$ непрерывная биекция $f : X \to Y\}$;
$\psi(x, X) = \min\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U}$ — семейство открытых множеств, $\bigcap \mathscr{U} = \{x\}\}$;
$\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}$;
$d(X) = \min\{|Y| : Y$ — всюду плотное подпространство $X\}$.

Теорема

$d(X) = iw(C_p(X)) = \psi(C_p(X))$

Достаточно показать, что $iw(C_p(X)) \leqslant d(X) \leqslant \psi(C_p(X))$. Пусть $d(X) = \kappa$ и $\overline{Y} = X$, $|Y| = \kappa$. Имеем $w(C_p(Y)) \leqslant w(\mathbb{R}^Y) \leqslant \kappa$. Отображение сужения $\pi : C_p(X) \to C_p(Y)$ — уплотнение $C_p(X)$ на $Z = \pi(C_p(X)) \subset C_p(Y)$. Имеем $w(Z) \leqslant w(C_p(Y)) \leqslant \kappa \implies iw(C_p(X)) \leqslant w(Z) \leqslant \kappa = d(X)$.

Покажем, что $d(X) \leqslant \psi(C_p(X))$. Возьмём $f \in C_p(X)$, $f \equiv 0$, и зафиксируем семейство $\mathscr{U}$ стандартных окрестностей f в $C_p(X)$ такое, что $\bigcap \mathscr{B} = \{f\}$. Для каждого $W(f, x_1, \ldots, x_k, \varepsilon) \in \mathscr{U}$ положим $K(W) = \{x_1, \ldots, x_k\}$ и рассмотрим подпространство $Y = \bigcup\{K(W) : W \in \mathscr{U}\}$ пространства X. Ясно, что $|Y| \leqslant |\mathscr{U}|$. Если $x \in X \setminus \overline{Y}$ и $g \in C_p(X)$ такова, что $g(x) = 1$ и $g(Y) = \{0\}$, то $g \in \bigcap \mathscr{U}$ и $g \neq f$ — противоречие. □

Теорема

$iw(X) = d(C_p(X))$.

$X \subset C_pC_p(X) \implies iw(X) \leqslant iw(C_pC_p(X))$. Предыдущая теорема $\implies$ $iw(C_pC_p(X)) = d(C_p(X))$. Покажем, что $d(C_p(X)) \leqslant iw(X)$. Пусть $f : X \to Y$ — уплотнение и $w(Y) \leqslant iw(X)$. Поскольку $nw(C_p(Y)) \leqslant nw(Y)$, имеем $nw(f^{\#}(C_p(Y)) \leqslant w(Y)$, так как $f^{\#}$ — гомеоморфизм. Поскольку $\overline{f^{\#}(C_p(Y))} = c_p(X)$, имеем

$$d(C_p(X)) \leqslant d(f^{\#}(C_p(Y)) \leqslant nw(f^{\#}(C_p(Y)) \leqslant w(Y) \leqslant iw(X).$$

□

Локально выпуклые пространства

Функциональные пространства — частный случай топологических векторных пространств, причём все они являются локально выпуклыми пространствами, т.е. выпуклые окрестности нуля в них образуют локальную базу в нуле (а все выпуклые открытые множества — базу топологии). Локально выпуклых пространств характеризуются тем, что их топологии порождаются «функциями длины», подобно топологиям тихоновских пространств и топологических групп. В тихоновском пространстве X роль «функций длины» играют функции $\|\cdot\|_{f,x_0} = |f(x) - f(x_0)|$, где f — непрерывные функции на X и x_0 — фиксированные точки пространства X; базу окрестностей каждой точки $x_0 \in X$ составляют множества вида $\{x : \|x\|_{f,x_0} < \varepsilon\}$, где $\varepsilon > 0$ и $f \in C(X)$. В топологической группе G эту роль играют непрерывные групповые полунормы. Топология каждого локально выпуклого пространства порождается семейством полунорм в смысле векторного пространства:

Определение

Полунормой, или **преднормой**, на вещественном векторном пространстве X называется функция $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $\|0\| = 0$,
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ и
3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in X$.

Теорема (Дугунджи)

Пусть F — замкнутое подмножество метризуемого пространства X и E — локально выпуклое пространство. Тогда каждое непрерывное отображение $f\colon F \to E$ имеет непрерывное продолжение $\Phi(f)\colon X \to E$, причём образ $\Phi(F)(X)$ содержится в выпуклой оболочке образа $f(F)$.

Более того, такие продолжения $\Phi(f)$ можно выбирать согласованным образом. А именно, существует линейный оператор продолжения $\Phi\colon C(F,E) \to C(X,E)$ такой, что для всякого отображения $f \in C(F,E)$ образ его продолжения $\Phi(f)(X)$ содержится в выпуклой оболочке $f(F)$ самогó отображения f и оператор Φ непрерывен при наделении обоих пространств $C(F,E)$ и $C(X,E)$ топологией поточечной сходимости, компактно-открытой топологией или топологией равномерной сходимости.

Будем говорить, что в банаховом пространстве B верна теорема Пеано, если для любой непрерывной функции $f\colon \mathbb{R} \times B \to B$, определённой на некотором открытом множестве $V \subset \mathbb{R} \times B$, и для любой точки $(t_0, x_0) \in V$ задача Коши

$$x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

имеет решение, определённое в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема (Годунов)

Всякое банахово пространство, в котором верна теорема Пеано, конечномерно.

Теорема (Шкарин)

В классе локально выпуклых пространств, метризуемых полной метрикой, справедливость теоремы Пеано равносильна конечномерности.

Пространства гомеоморфизмов и изометрий

Отображения $X \to X$ нельзя поточечно складывать или перемножать (если только само пространство X не снабжено соответствующими операциями), но зато можно рассматривать их композиции. В частности, множество $\mathrm{Homeo}(X)$ всех гомеоморфизмов $X \to X$ с операцией композиции является группой, и на нём возникают те же естественные топологии, что и в случае функциональных пространств, а именно, топологии, порождённые стандартными базами $\{\langle F, U\rangle : A \in \mathscr{F},\ U \in \mathscr{U}\}$, где $\mathscr{F}$ — некоторое семейство подмножеств пространства X, $\mathscr{U}$ — семейство всех открытых подмножеств X и $\langle F, U\rangle = \{h \in \mathrm{Homeo}(X) : h(F) \subset U\}$.

Топология, которая получается, когда $\mathscr{F}$ — семейство всех замкнутых (компактных) множеств, называется замкнуто-открытой (компактно-открытой), а когда $\mathscr{F}$ состоит из всех конечных множеств, получается топология поточечной сходимости. В случае, когда X — метрическое пространство, группа $\mathrm{Homeo}(X)$ содержит подгруппу $\mathrm{Iso}(X)$ всех изометрических преобразований пространства X.

Теорема

Если X — нормальное пространство, то группа $G = \mathrm{Homeo}(X)$ с замкнуто-открытой топологией является топологической группой.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$ — стандартная база замкнуто-открытой топологии.

Имеем $\langle K, W\rangle^{-1} = \langle X \setminus W, X \setminus K\rangle$ для любых $K, W \subset X$. $\Longrightarrow$ Если $\langle K, W\rangle \in \mathscr{B}$, то $\langle K, W\rangle^{-1} \in \mathscr{B}$. $\Longrightarrow$ Операция перехода к обратному непрерывна.

Непрерывность умножения: возьмём произвольные $f, g \in G$. Пусть $h = f \cdot g \in U$, где $U = \langle K, W\rangle \in \mathscr{B}$. Тогда $f(g(K)) \subset W$, т.е. $g(K) \subset f^{-1}(W)$. Из того, что g и f — гомеоморфизмы $X \to X$, следует, что $g(K)$ замкнуто в X и $f^{-1}(W)$ — открытая окрестность множества $g(K)$. X нормально $\Longrightarrow$ $\exists$ открытое множество V такое, что $g(K) \subset V \subset \overline{V} \subset f^{-1}(W)$. $\Longrightarrow$ $\langle K, V\rangle$ и $\langle \overline{V}, W\rangle$ — открытые окрестности точек g и f, и $\langle \overline{V}, W\rangle \cdot \langle K, V\rangle \subset \langle K, W\rangle$. $\square$

Следствие

Для любого компакта X компактно-открытая топология на группе $\mathrm{Homeo}(X)$ является групповой.

Теорема

Для любого метрического пространства (M, d) группа $\mathrm{Iso}(M)$ с топологией поточечной сходимости является топологической группой.

Пусть $h = g \cdot f$, $\varepsilon > 0$, $x \in M$ и $U = W(x, h, 2\varepsilon)$. Положим $y = f(x)$, $V = W(x, f, \varepsilon)$ и $W = W(y, g, \varepsilon)$. Покажем, что $W \cdot V \subset U$. Возьмём $f_1 \in V$ и $g_1 \in W$ и рассмотрим $h_1 = g_1 \cdot f_1$. Надо показать, что $d(h_1(x), h(x)) < 2\varepsilon$: $d(f_1(x), f(x)) < \varepsilon$, $d(g_1(y), g(y)) < \varepsilon$, $y = f(x)$ и g_1 — изометрия $\implies$ $d(g_1(f_1(x)), g_1(y)) < \varepsilon$. Поскольку $g_1 \cdot f_1(x) = h_1(x)$ и $g(y) = h(x)$, имеем

$$\begin{aligned} d(h_1(x), h(x)) \leqslant d(h_1(x), g_1(y)) + d(g_1(y), h(x)) = \\ = f(g_1 \cdot f_1(x), g_1(y)) + d(g_1(y), g(y)) < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Чтобы доказать непрерывность обратного, достаточно проверить, что $g \in W(x, f, \varepsilon) \iff g^{-1} \in W(y = f(x), f^{-1}, \varepsilon)$. Если $d(g(x), f(x)) < \varepsilon$, то $d(g^{-1}(g(x)), g^{-1}(y)) < \varepsilon$, так как g^{-1} — изометрия. Поскольку $g^{-1}(g(x)) = x = f^{-1}(y)$, имеем $g^{-1} \in W(y, f^{-1}, \varepsilon)$. $\square$

Пусть G — топологическая группа, и пусть M_G — метрическое пространство всех ограниченных равномерно непрерывных (относительно левой равномерности) функций $G \to \mathbb{R}$ с метрикой равномерной сходимости, определённой формулой

$$d(f, g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in G\}.$$

Группа $\mathrm{Iso}(M_G)$ с топологией поточечной сходимости — топологическая группа.

Если $f \in M_G$ и $a \in G$, положим $f_a(x) = f(a \cdot x)$ для $x \in G$ и $h_a(f) = f_a$. Ясно, что $f_a \in M_G$. Отображение $h_a \colon M_G \to M_G$ — изометрия. Для каждого $a \in G$ положим $\psi(a) = h_a$.

- ψ — гомоморфизм;
- ψ — изоморфизм;
- ψ непрерывно;
- ψ — гомеоморфизм группы G на подпространство $\psi(G)$ группы $\mathrm{Iso}(M_G)$.

Теорема (В.В. Успенский)

Всякая топологическая группа G топологически изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Iso}(M)$ с топологией поточечной сходимости для некоторого метрического пространства M.

Теорема

Любая топологическая группа G топологически изоморфна некоторой подгруппе H (не обязательно топологической) группы $\mathrm{Homeo}(G)$ с топологией поточечной сходимости.

Таким образом, сужение топологии поточечной сходимости пространства $\mathrm{Homeo}(G)$ на подпространство-подгруппу H оказывается групповой топологией, хотя на всём пространстве $\mathrm{Homeo}(G)$ эта топология может не быть групповой. Факторпространство G/H левых смежных классов любой отделимой топологической группы G по замкнутой (не обязательно нормальной) подгруппе H однородно, однако не всякое однородное пространство можно представить таким образом.

Теорема

Всякий нульмерный однородный компакт X является факторпространством топологической группы $\mathrm{Homeo}(X)$ с компактно-открытой топологией по замкнутой подгруппе.