Сумма

Определение

Пусть задано семейство $\{(X_\alpha, \mathscr{T}_\alpha) : \alpha \in A\}$ попарно непересекающихся топологических пространств. Положим $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Обозначим через $\mathscr{T}$ семейство всех множеств $U \subset X$ таких, что $U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in A$. Легко видеть, что $\mathscr{T}$ — топология на X (порождённая базой $\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathscr{T}_\alpha$).

Множество X с этой топологией называется суммой пространств X_α, $\alpha \in A$, и обозначается $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. В случае, когда множество A конечно (т.е. $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$), используется также обозначение $X_{\alpha_1} \oplus \dots \oplus X_{\alpha_n}$.

1. Множество $F \subset X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ замкнуто в X тогда и только тогда, когда $F \cap X_\alpha$ замкнуто в X_α для всякого $\alpha \in A$.
2. Каждое слагаемое X_α открыто-замкнуто в $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.
3. если пространства X_α, $\alpha \in A$ попарно не пересекаются и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для всех $\alpha \in A$, то топология суммы $Y = \bigoplus_{\alpha \in A} Y_\alpha$ совпадает с топологией, индуцированной из суммы $X = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Предложение

Отображение $f : \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha \to Y$ суммы топологических пространств X_α в произвольное топологическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда сужения $f\big|_{X_\alpha} : X_\alpha \to Y$ непрерывны для всех $\alpha \in A$.

Предложение

Если топологическое пространство X является объединением своих попарно непересекающихся открытых подмножеств X_α, $\alpha \in A$, то $X = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Предложение

1. *Сумма $\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ удовлетворяет аксиоме отделимости T_i, $i \leqslant 4$, тогда и только тогда, когда $X_\alpha \in T_i$ для всех $\alpha \in A$.*

2. *Вес, характер, плотность и число Суслина суммы связаны с соответствующими характеристиками слагаемых равенствами*

$$w\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) = \max\{\sup_{\alpha\in A} w(X_\alpha), |A|\}, \qquad \chi\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) = \sup_{\alpha\in A} \chi(X_\alpha),$$

$$d\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) = \max\{\sup_{\alpha\in A} d(X_\alpha), |A|\}, \qquad c\Big(\bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha\Big) = \max\{\sup_{\alpha\in A} c(X_\alpha), |A|\}.$$

Примеры

1. Дискретное пространство.
2. Стрелка Зоргенфрея.
3. Прямая $\mathbb{R}$.

Факторпространства

Определение

Фактортопология на фактормножестве $X/\sim$ топологического пространства X по отношению эквивалентности состоит из всех множеств $U \subset X/\sim$, для которых множество $\{x \in X : [x] \in U\}$ (т.е. объединение всех тех подмножеств X, которые являются принадлежащими U классами эквивалентности) открыто в X. Множество $X/\sim$ с этой топологией называется факторпространством пространства X по отношению эквивалентности $\sim$. Естественное отображение $q\colon X \to X/\sim$ непрерывно относительно так определённой топологии, и оно называется (естественным) факторным отображением.

Всякая сюръекция $f\colon X \to Y$ является естественным отображением множества X на отождествляемое с Y фактормножество множества X по отношению эквивалентности $\sim_f$, определённому правилом $x \sim_f y \iff f(x) = f(y)$, однако вовсе не всякая непрерывная сюръекция $f\colon X \to Y$ является факторным отображением: топология пространства Y может не совпадать с топологией факторпространства $X/\sim_f$, хотя как множества Y и $X/\sim_f$ совпадают.

Теорема

Для сюръективного отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств следующие условия равносильны:

1. *f факторно (и $Y = X/{\sim_f}$ — факторпространство);*
2. *множество $U \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто в X;*
3. *множество $F \subset Y$ замкнуто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(F)$ замкнуто в X;*
4. *f непрерывно и топология пространства Y не слабее топологии факторпространства пространства X по отношению эквивалентности $\sim_f$.*

Доказательство. Для любых $U, F \subset X/{\sim_f}$ имеем

$$f^{-1}(U) = \bigcup\{[x] \subset X : [x] \in U\} = \{x \in X : [x] \in U\}$$

и

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(X/{\sim_f} \setminus F).$$

□

Определение′

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется факторным, если оно сюръективно и множество $U \subset Y$ открыто в Y тогда и только тогда, когда $f^{-1}(U)$ открыто в X.

Замечание

Отображение $f\colon X \to Y$ факторно тогда и только тогда, когда f сюръективно и топология пространства Y самая сильная из всех топологий, относительно которых f непрерывно.

Следствие

Композиция факторных отображений является факторным отображением.

Следствие

Если композиция $g \circ f$ непрерывных отображений $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ факторна, то отображение g факторно.

Доказательство. Очевидно, g сюръективно. Если $U \subset Z$ открыто, то $g^{-1}(U)$ открыто в Y в силу непрерывности g. Если $U \subset Z$ таково, что $g^{-1}(U)$ открыто в Y, то $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ открыто в X (так как f непрерывно), и по доказанной теореме U открыто в Z (так как $g \circ f$ факторно). $\square$

Следствие

Пусть $f: X \to Y$ — непрерывное отображение. Если существует $A \subset X$, для которого $f(A) = Y$ и сужение $f|_A$ факторно, то f тоже факторно.

Доказательство. Пусть $i_A: A \to Y$ — тождественное вложение. Имеем $f|_A = f \circ i_A$. Осталось применить предыдущее следствие. □

Следствие

Всякое открытое или замкнутое непрерывное сюръективное отображение $f: X \to Y$ факторно.

Следствие

Любое взамнооднозначное факторное отображение является гомеоморфизмом.

Следствие

Факторпространство пространства X по некоторому отношению эквивалентности (т.е. образ X при факторном отображении) удовлетворяет аксиоме отделимости $T_1 \iff$ все классы эквивалентности (прообразы точек) замкнуты в X.

Примеры

1. *Стягивание множества в точку.* Для $F \subset X$ рассмотрим $\sim$, классы которого — F и $\{x\}$ для $x \notin F$. Факторпространство $Y = X/\sim$ обозначается X/F; говорят, что Y получается из X стягиванием в точку множества F.

$X/F \in T_1 \iff F$ и все $\{x\}$ для $x \notin F$ замкнуты.

$X/F \in T_2 \iff F$ замкнуто, любые различные точки $x, y \in X \setminus F$ отделены окрестностями и любая точка $x \in X \setminus F$ и множество F отделены окрестностями.

X/F регулярно $\iff F$ замкнуто, любая точка $x \notin F$ и любое замкнутое $G \not\ni x$ отделены окрестностями, F и любое замкнутое множество, не пересекающее F, отделены окрестностями.

X/F вполне регулярно $\iff F$ замкнуто, любая точка $x \notin F$ функционально отделима от любого не содержащего её замкнутого множества, и любое замкнутое множество, не пересекающее F, функционально отделимо от F.

X/F нормально $\iff F$ замкнуто и X нормально.

Пример — веер Фреше–Урысона.

2. *Присоединение пространства по отображению.* Пусть X и Y — непересекающиеся топологические пространства, $F \subset X$ — замкнутое в X множество и $f : F \to Y$ — непрерывное отображение. Обозначим через $\sim$ отношение эквивалентности на сумме $X \oplus Y$, соответствующее разбиению на одноточечные множества $\{z\}$, где $z \in (X \oplus Y) \setminus (F \cup f(F))$, и множества $\{y\} \cup f^{-1}(y)$, где $y \in f(F)$. Факторпространство $X \oplus Y/\sim$ обозначается $X \cup_f Y$; при этом говорят, что $X \cup_f Y$ получается присоединением пространства Y к пространству X по отображению f.

Если Y одноточечно, то $X \cup_f Y$ гомеоморфно факторпространству X/F. $X \setminus F$ вкладывается в $X \cup_f Y$ как открытое подпространство, а Y — как замкнутое.

3. *Приклеивание и склеивание.* Операцию присоединения пространства по гомеоморфизму часто называют приклеиванием. В случае, когда в одном и том же топологическом пространстве X имеются два непересекающихся подпространства F и G, связанных гомеоморфизмом $f : F \to G$, определена также операция склеивания подпространств F и G — факторизация по отношению эквивалентности, порождённому разбиением на одноточечные множества $\{x\}$, $x \in X \setminus (F \cup G)$, и двухточечные множества $\{x, f(x)\}$, $x \in F$. При применении этой операции обычно требуют замкнутости подмножеств F и G — тогда факторпространство удовлетворяет тем же аксиомам отделимости, что и пространство X.

Примеры: тор, лист Мёбиуса, бутылка Клейна, проективная плоскость, сфера с ручками или плёнками Мёбиуса.

Обратные операции — вырезание и разрезание.

Прямые спектры и индуктивные пределы

Сумма $X = \bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$:

- содержит все X_α, $\alpha \in A$, в качестве подпространств;
- $X = \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$;
- множество $U \subset X$ открыто в $X \iff U \cap X_\alpha$ открыто в X_α для каждого $\alpha \in A$ (а значит, отображение $f : X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда все сужения $f|_{X_\alpha}$ непрерывны).

Определение

Пусть $\mathscr{F}$ — семейство топологических пространств, направленное вверх отношением включения (т.е. для любых $X, Y \in \mathscr{F}$ существует $Z \in \mathscr{F}$, для которого $X \subset Z$ и $Y \subset Z$). Тогда топологическое пространство $F = \bigcup \mathscr{F}$, топологию которого образуют все множества U с тем свойством, что $U \cap X$ открыто в X для каждого $X \in \mathscr{F}$, называется индуктивным, или прямым, пределом семейства $\mathscr{F}$.

Примеры — сумма, прямая $\mathbb{R}$.

Определение

Пусть $(A, \leqslant)$ — направленное множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство топологических пространств. Предположим, что для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leqslant \beta$, определены непрерывные отображения $f_{\alpha\beta} \colon X_\alpha \to X_\beta$ с такими свойствами:

- $f_{\alpha\alpha} = \mathrm{id}_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$ — тождественное отображение для любого α;
- $f_{\alpha\gamma} = f_{\beta\gamma} \circ f_{\alpha\beta}$ для любых $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Тогда семейство пространств и отображений $\{X_\alpha, f_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A, \alpha \leqslant \beta\}$ называется прямым спектром над A.

Индуктивным, или прямым, пределом этого семейства, или пределом прямого спектра, называется факторпространство $\varinjlim X_\alpha = \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha/{\sim}$, где $\sim$ — отношение эквивалентности, определённое правилом: $x_\alpha \sim x_\beta$, если $f_{\alpha\gamma}(x_\alpha) = f_{\beta\gamma}(x_\beta)$ для некоторого $\gamma \geqslant \alpha, \beta$.

Иными словами, $\varinjlim X_\alpha$ — это факторможество $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha/{\sim}$, снабжённое сильнейшей из всех топологий, относительно которых все отображения $f_{\alpha\beta}$ непрерывны.

Топологические произведения

Напомним, что декартово произведение произвольного семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — это множество

$$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall\alpha \in A(f(\alpha) \in X_\alpha)\},$$

и что элементы $f : A \to \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ принято записывать в виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$, где для каждого $\alpha \in A$ $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ — α-я координата элемента $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Напомним также, что каноническая проекция произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, — это отображение $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha\in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Ящичная топология на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ — первое, что приходит в голову: её база — всевозможные произведения вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α открыто в X_α. Произведение с этой топологией обозначается $\mathop{\square}\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Бесконечное произведение недискретных пространств с ящичной топологией обладает плохими свойствами: никогда не бывает метризуемым (и даже никогда не удовлетворяет первой аксиоме счётности), редко бывает связным, никогда не сепарабельно и т.п.

Главный недостаток: диагональное произведение непрерывных отображений не всегда непрерывно относительно ящичной топологии ($\Longrightarrow$ произведение топологических пространств с ящичной топологией не является произведением в смысле теории категорий)

В теории категорий произведение объектов X_α, $\alpha \in A$, определяется как объект X вместе с семейством морфизмов $\pi_\alpha \colon X \to X_\alpha$ (называемых канонических проекциями) с тем свойством, что для любого объекта Y этой категории и любого семейства морфизмов $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ существует единственный морфизм $f \colon Y \to X$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f_\alpha"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

коммутативна (т.е. $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$) для каждого $\alpha \in A$. В применении к категории топологических пространств (где объекты — пространства, а морфизмы — непрерывные отображения) это определение означает, что для любого семейства непрерывных отображений $f_\alpha \colon Y \to X_\alpha$ диагональное произведение $\underset{\alpha\in A}{\Delta} f_\alpha \colon Y \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ должно быть непрерывным.

Тихоновская топология, или топология произведения — самая слабая топология, относительно которой все канонические проекции непрерывны. Произведения топологических пространств с тихоновской топологией называются топологическими, или тихоновскими, произведениями. В дальнейшем мы будем рассматривать произведения именно с этой топологией.

Предбаза:

$$\pi_\beta^{-1}(U_\beta) = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} : x_\beta \in U_\beta\},$$

где $\beta \in A$ — любой индекс, а U_β — любое открытое множество в X_β.

Иногда, особенно если речь идёт о пространствах функций, т.е. подпространствах произведений вида $\mathbb{R}^X$, топологию произведения называют топологией поточечной сходимости: последовательность функций $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, определённых на X, поточечно сходится к функции f, если для любых $\varepsilon > 0$ и $x \in X$ найдётся $N(x) \in \mathbb{N}$ такое, что $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $n > N(x)$, а это как раз и означает сходимость в тихоновской топологии.

Для конечных произведений тихоновская топология совпадает с ящичной. Евклидова топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с топологией произведения на $\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$.

Предложение

Для любого семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ все множества вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где каждое U_α — открытое подмножество X_α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех, кроме конечного числа, индексов α, образуют базу топологического произведения $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Более того, если для каждого α зафиксирована некоторая база $\mathscr{B}_\alpha$ пространства X_α, то множества вида $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$, где $U_\alpha \in \mathscr{B}_\alpha$ для конечного числа индексов α и $U_\alpha = X_\alpha$ для всех остальных индексов, тоже образуют базу $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Определение

База топологического произведения, описанная в первом утверждении предложения, называется каноническей базой, а элементы этой базы — каноническими открытыми множествами.

Теорема

Все канонические проекции $\pi_\beta \colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$, $\beta \in A$, *любого топологического произведения* $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *являются открытыми отображениями.*

Предложение

Если X_α, $\alpha \in A$, *— топологические пространства и* $Y_\alpha \subset X_\alpha$ *для* $\alpha \subset A$, *то топология произведения на* $\prod Y_\alpha$ *совпадает с топологией, индуцированной из топологического произведения* $\prod X_\alpha \supset \prod Y_\alpha$.

Доказательство. Элементы канонической базы произведения $\prod Y_\alpha$ = пересечения $Y = \prod Y_\alpha$ с элементами канонической базы произведения $\prod X_\alpha$. $\square$

Предложение

Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства и $Y_\alpha \subset X_\alpha$ для $\alpha \in A$. Тогда замыкание произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha \subset \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в топологическом произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ равно произведению замыканий множеств Y_α в X_α:

$$\overline{\prod Y_\alpha} = \prod \overline{Y_\alpha}.$$

Доказательство. По определению замыкания $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \overline{\prod Y_\alpha}$, если и только если для каждого элемента $\prod U_\alpha$ канонической базы $\prod X_\alpha$, содержащего (x_α), имеем $\prod U_\alpha \cap \prod Y_\alpha = \prod (U_\alpha \cap Y_\alpha) \neq \varnothing$, т.е. $U_\alpha \cap Y_\alpha \neq \varnothing$ для всех α. В частности, для каждого $\alpha \in A$ и любой окрестности U точки x_α в X_α имеем $U \cap Y_\alpha \neq \varnothing$, а это и означает, что $x_\alpha \in \overline{Y_\alpha}$. Таким образом, $\overline{\prod Y_\alpha} \subset \prod \overline{Y_\alpha}$.

Обратно, если $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod \overline{Y_\alpha}$, т.е. $x_\alpha \in \overline{Y_\alpha}$ для всех α, то для любого $\beta \in A$ и любой окрестности V_β точки x_β в X_β пересечение $V_\beta \cap Y_\beta$ содержит некоторую точку y_β. Имеем $(y_\alpha) \in \prod V_\alpha \cap \prod Y_\alpha$. Таким образом, точка (x_α) принадлежит замыканию множества $\prod Y_\alpha \subset \prod X_\alpha$ даже в ящичной топологии, тем более, в топологии произведения. $\square$

Следствие

Пусть X_α, $\alpha \in A$, *— непустые топологические пространства и* $Y_\alpha \subset X_\alpha$ *для* $\alpha \in A$. *Множество* $\prod Y_\alpha$ *плотно в топологическом произведении* $\prod X_\alpha$ *тогда и только тогда, когда* Y_α *плотно в* X_α *для каждого* $\alpha \in A$.