Теорема Титце–Урысона о продолжении

Пусть X — T_4-пространство и F — его замкнутое подмножество. Тогда

а) у любой непрерывной функции $f\colon F \to [-1,1]$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}\colon X \to [-1,1]$;

б) у любой непрерывной функции $f\colon F \to \mathbb{R}$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$.

Доказательство. а) Для любой непрерывной функции $f_0\colon F \to \mathbb{R}$ со свойством $|f_0(x)| \leqslant a$ для $x \in F$ (где $a > 0$) существует непрерывная функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $|g(x)| \leqslant \frac{a}{3}$ для всех $x \in X$;
2. $|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}a$ для $x \in F$.

В самом деле, множества $A = f_0^{-1}([-a, -\frac{a}{3}])$ и $B = f_0^{-1}([\frac{a}{3}, a])$ замкнуты в F, и они не пересекаются; поскольку F замкнуто в X, множества A и B замкнуты и в X, и по лемме Урысона существует непрерывная функция $\varphi\colon X \to [0,1]$ такая, что $\varphi|_A \equiv 0$ и $\varphi|_B \equiv 1$. Функция $g\colon X \to \mathbb{R}$, определённая правилом $g(x) = \frac{2}{3}a \cdot (\varphi(x) - \frac{1}{2})$ для $x \in X$, непрерывна и удовлетворяет условиям 1 и 2.

Теперь определим по индукции последовательность непрерывных функций $g_n \colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих таким условиям для всех $n \in \mathbb{N}$:

3. $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ для всех $x \in X$;
4. $\left|f(x) - \sum_{i \leqslant n} g_i(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ для $x \in F$.

Функцию g_1 мы определим, применив сделанное выше замечание к $a = 1$ и функции f_0, равной надотображению $\tilde{f} \colon F \to \mathbb{R}$ отображения $f \colon F \to [-1, 1]$. Допустим, что функции $g_1, g_2, \ldots, g_k$ уже построены так, что выполнены условия 3 и 4 с $n \leqslant k$. Применяя то же самое замечание к $a = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ и $f_0 = \tilde{f} - \sum_{i \leqslant k} g_i\big|_F$, мы получим функцию g_{k+1}, удовлетворяющую условиям 3 и 4 с $n = k + 1$. Индуктивное построение завершено.

Согласно известному из анализа признаку Вейерштрасса в силу условия 3 ряд функций $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к некоторой функции $\hat{f} \colon X \to [-1, 1]$, причём по теореме Коши $\hat{f}$ непрерывна. Из условия 4 следует, что $\hat{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in F$. Значит, $\hat{f}$ — искомое непрерывное продолжение функции f на X.

б) Рассмотрим теперь функцию $f\colon F \to \mathbb{R}$. Пусть $\psi\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ — функция, определённая правилом $\psi(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Тогда $\psi \circ f$ — непрерывная функция $F \to [-1,1]$, причём $\psi \circ f(F) \subset (-1,1)$, и к ней применимо уже доказанное утверждение а). Пусть $\hat{f}_1\colon X \to [-1,1]$ — непрерывное продолжение функции $\psi \circ f$. В силу его непрерывности множество $G = f_1^{-1}(\{-1,1\})$ замкнуто в X, и оно не пересекает F. Значит, по лемме Урысона существует непрерывное отображение $\varphi\colon X \to [0,1]$ такое, что $\varphi|_G \equiv 0$ и $\varphi|_F \equiv 1$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_2\colon X \to [-1,1]$, определённое формулой $\hat{f}_2(x) = \hat{f}_1(x) \cdot \varphi(x)$, тоже является непрерывным продолжением отображения $\psi \circ f$ на X, причём $\hat{f}_2(X) \subset \psi(\mathbb{R}) = (-1,1)$. Функция $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \hat{f}_2$ — искомое непрерывное продолжение f на X. $\square$

Утверждение а) теоремы Титце–Урысона остаётся верным при замене отрезка $[-1,1]$ на любой другой отрезок $[a,b]$, где $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Действительно, для $f\colon F \to [a,b]$ достаточно рассмотреть любой гомеоморфизм $\psi\colon [a,b] \to [-1,1]$ (например, $\psi(x) = \frac{a+b-2x}{a-b}$), построить непрерывное продолжение $\widehat{\psi \circ f}\colon X \to [-1,1]$ функции $\psi \circ f\colon F \to [-1,1]$ и положить $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \widehat{\psi \circ f}$.

Тихоновские пространства

Определение

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точке x и тождественно равная 1 на множестве F.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называются вполне регулярными, или тихоновскими.

Иногда за определение принимают равносильное условие: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, если для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f|_{X\setminus U} \equiv 1$.

$T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$: если $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, F замкнуто в X и $x \in X \setminus F$, то множества $U = f^{-1}\big([0,\frac{1}{2})\big)$ и $V = f^{-1}\big((\frac{1}{2},1]\big)$, где $f\colon X \to [0,1]$ — непрерывная функция, равная 0 в точке x и 1 на множестве F, — непересекающиеся окрестности x и F.

$$\text{нормальность} \implies \text{тихоновость} \implies \text{регулярность} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Ни одну из этих стрелок нельзя обратить.

Примеры

- $T_0 \not\Longrightarrow T_1$

  Связное двоеточие — множество $\{a, b\}$, состоящее из двух точек a и b, с топологией $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

- $T_1 \not\Longrightarrow T_2$

  Множество $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского, в которой открыты все дополнения до конечных множеств и только они.

- $T_2 \not\Longrightarrow T_3$

  Прямая $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой составляют все открытые интервалы и множества вида $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus S$, где $\varepsilon > 0$ и $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

  Множество S замкнуто в новой топологии и $0 \notin S$, однако S и 0 не отделены окрестностями.

- $T_1 + T_3 \not\Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

  Сложный пример.

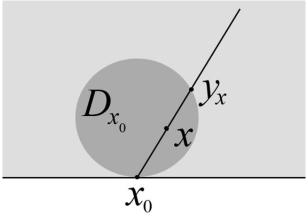
- $T_1 + T_{3\frac{1}{2}} \not\Longrightarrow T_4$

  Плоскость Немыцкого L

  $L \in T_1$: топология L сильнее топологии, порождённой метрикой.

  $L \in T_{3\frac{1}{2}}$: достаточно проверить для точек граничной прямой l плоскости Немыцкого — всякая окрестность любой точки $x_0 \in L \setminus l$ содержит некоторую ε-окрестность относительно евклидовой метрики d на плоскости, а для ε-окрестности нужная функция из определения $T_{3\frac{1}{2}}$ существует (притом непрерывная не только относительно топологии L, но и относительно более слабой метрической топологии замкнутой верхней полуплоскости) — можно положить $f(x) = \min\left\{\frac{d(x_0,x)}{\varepsilon}, 1\right\}$.

  Пусть $x_0 \in l$, U — любая окрестность точки x_0 и $D_{x_0} \cup \{x_0\}$ — базисная окрестность x_0, содержащаяся в U. Для $x \in D_{x_0}$ обозначим через y_x точку, в которой луч, выходящий из точки x_0 и проходящий через x, пересекает границу круга D_{x_0}:



Функция $f\colon L \to [0,1]$, определённая правилом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = x_0, \\ 1, & \text{если } x \in L \setminus \big(D_{x_0} \cup \{x_0\}\big), \\ \frac{d(x_0,x)}{d(x_0,y_x)}, & \text{если } x \in D_{x_0}, \end{cases}$$

непрерывна на L, $f(x_0) = 0$ и $f|_L \setminus U \equiv 1$ (так как $U \supset D_{x_0}$).

Мы показали, что плоскость Немыцкого L вполне регулярна. Вместо того чтобы доказывать, что L не нормальна, мы докажем несколько более общий факт.

Предложение

Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подпространство мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$, *то оно не удовлетворяет аксиоме* T_4.

Доказательство. Пусть X — сепарабельное пространство, $Y \subset X$ — счётное всюду плотное множество в X и D — замкнутое дискретное подпространство X мощности $2^{\aleph_0}$. Знаем: если непрерывные функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ принимают одинаковые значения в точках Y, то они совпадают. Значит, на X существует не более чем $|\mathbb{R}|^{|Y|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ разных непрерывных функций.

Поскольку D дискретно, любая функция $D \to \mathbb{R}$ непрерывна, а число разных таких функций равно $|D|^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Если бы пространство X удовлетворяло аксиоме T_4, то каждая из этих функций допускала бы непрерывное продолжение на X, и все продолжения были бы разными (так как уже сами функции разные), а это невозможно, поскольку по теореме Кантора $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$. □

Аксиомы отделимости в подпространствах

Легко видеть, что свойство удовлетворять каждой аксиоме отделимости, кроме T_4, наследственно. Покажем, например, что если $X \in T_3$ и $Y \subset X$, то $Y \in T_3$. Пусть F — замкнутое подмножество Y и $x \in Y \setminus F$. Положим $G = \overline{F}^X$. Поскольку $F = G \cap Y$, имеем $x \notin G$; значит, в пространстве X существуют непересекающиеся окрестности U и V точки x и множества G соответственно. По определению индуцированной топологии $U \cap Y$ и $V \cap Y$ — окрестности точки x и множества F в пространстве Y, и они не пересекаются.

С аксиомой T_4 дело обстоит иначе, поскольку из того, что замкнутые множества F и G в подпространстве Y пространства X не пересекаются, вообще говоря, не следует, что их замыкания в X не пересекаются. Простой пример — пространство $X = \{a, b, c, d\}$ с топологией $\big\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}\big\}$ и его подпространство $Y = \{a, b, c\}$: помимо $\varnothing$ и X, в X замкнуты только множества $\{b, c, d\}$, $\{b, d\}$, $\{c, d\}$ и $\{d\}$, и все они попарно пересекаются, так что аксиома T_4 выполняется в X тривиальным образом. Однако в Y есть непересекающиеся замкнутые множества $\{b\}$ и $\{c\}$, и они не отделены окрестностями.

Предложение

Если $X \in T_4$ и Y — замкнутое подпространство X, то $Y \in T_4$.

Доказательство. Если F и G — непересекающиеся замкнутые множества в Y, то они являются таковыми и в X, поскольку Y замкнуто в X. Значит, они имеют непересекающиеся окрестности U и V. Ясно, что $U \cap Y$ и $V \cap Y$ — непересекающиеся окрестности F и G в Y. □

Однако открытыми подпространствами нормальность уже не наследуется. Более того, если в некотором пространстве все открытые подпространства нормальны, то в нём нормальны и вообще все подпространства.

Аксиомы отделимости и непрерывные отображения

Ясно, что всеми непрерывными отображениями не сохраняется ни одна аксиома: дискретные пространства удовлетворяют всем аксиомам отделимости, и любое топологическое пространство $(X, \mathscr{T})$ является образом пространства $(X, \mathscr{T}_d)$, где $\mathscr{T}_d$ — дискретная топология.

Однако непрерывными отображениями специальных типов некоторые аксиомы отделимости сохраняются (пока мы знаем три таких типа — открытые отображения, замкнутые отображения и гомеоморфизмы). Например, очевидно, что образ $f(X)$ T_1-пространства X при замкнутом отображении $f\colon X \to Y$ тоже является T_1-пространством ($\forall x \in X$ множество $\{x\}$ замкнуто в $X \implies \forall y \in f(X)$ множество $\{y\}$ замкнуто в $f(X)$).

Теорема

Если $f: X \to Y$ — замкнутое сюръективное непрерывное отображение нормального пространства X на некоторое пространство Y, то Y нормально.

Доказательство. Мы уже показали, что $Y \in T_1$. Пусть F и G — непересекающиеся замкнутые множества в Y. Тогда $f^{-1}(F)$ и $f^{-1}(G)$ — непересекающиеся замкнутые множества в X. В силу нормальности X существуют непересекающиеся открытые в X множества $U, V \subset X$ такие, что $f^{-1}(F) \subset U$, $f^{-1}(G) \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Множества $X \setminus U$ и $X \setminus V$ замкнуты в X, и $X \setminus U \cup X \setminus V = X$. Значит, множества $f(X \setminus U)$ и $f(X \setminus V)$ замкнуты в Y, и $f(X \setminus U) \cup f(X \setminus V) = Y$. Следовательно, множества $W = Y \setminus f(X \setminus U)$ и $O = Y \setminus f(X \setminus V)$ открыты в Y и не пересекаются. Поскольку $f^{-1}(F) \subset U$ и $f^{-1}(G) \subset V$, имеем $F \subset W$ и $G \subset O$. $\square$