

Аксиомы отделимости

T_0 : Каковы бы ни были две различные точки, хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Аксиома T_0 равносильна такому условию:

- если $x \neq y$, то либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$.

T_1 : Каковы бы ни были две различные точки, каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Равносильные условия таковы:

- Все одноточечные (значит, и конечные) множества замкнуты.

Действительно, $T_1 \iff x \notin \overline{\{y\}}$ и $y \notin \overline{\{x\}}$ для любых $x \neq y \iff \overline{\{x\}} \cap \{y : y \neq x\} = \emptyset$ для любой точки x , т.е. $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

- Все предельные точки любого множества являются точками накопления.

Действительно, если $x \neq y$ и $x \in \overline{\{y\}}$, то x — предельная точка множества $\{y\}$, но не точка его накопления. Обратно, если в T_1 -пространстве точка x — не точка накопления множества A , то у x есть окрестность U , для которой $F = U \cap A$ конечно и потому замкнуто. Значит, $U \setminus F$ — не пересекающаяся с $A \setminus \{x\}$ окрестность точки x .

- Пересечение всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Это условие нарушается тогда и только тогда, когда существуют разные точки x и y такие, что y принадлежит любой окрестности точки x , т.е. тогда и только тогда, когда нарушается аксиома T_1 .

T_2 : Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.

Равносильное условие:

- пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Действительно, точка y принадлежит замыканию некоторого множества U , если любая окрестность y пересекается с U , поэтому то, что $y \in \bigcap \{\bar{U} : U \text{ — окрестность точки } x\}$, означает, что любая окрестность точки y пересекается с любой окрестностью точки x .

Поскольку каждая окрестность всякой точки содержит окрестность из любой локальной базы топологии в этой точке, аксиома T_2 равносильна и такому условию:

- для любой точки x и любой локальной базы $\mathcal{B}(x)$ в этой точке $\bigcap \{\bar{U} : U \in \mathcal{B}(x)\} = \{x\}$.

T_3 : У любой точки и любого не содержащего её замкнутого множества есть непересекающиеся окрестности.

Эта аксиома равносильна такому условию (очень часто за аксиому T_3 принимают именно это условие):

- для любой точки x и любой её окрестности U найдётся такая окрестность V точки x , что $\bar{V} \subset U$.

Действительно, рассмотрим открытую окрестность U точки x в топологическом пространстве X , удовлетворяющем аксиоме T_3 , и её дополнение $F = X \setminus U$ (которое является замкнутым множеством). Пусть V_x и V_F — непересекающиеся окрестности точки x и множества F соответственно; поскольку любая окрестность содержит открытую, можно считать, что V_x и V_F открыты. Тогда $X \setminus V_F$ замкнуто, и $V_x \subset X \setminus V_F$. Значит, $\overline{V_x} \subset X \setminus V_F \subset X \setminus F = U$. Обратно, пусть F — замкнутое множество в топологическом пространстве X , удовлетворяющем сформулированному выше условию, и пусть $x \notin F$. Тогда $U = X \setminus F$ — открытая окрестность точки x , и по предположению существует окрестность V той же точки со свойством $\overline{V} \subset U$. Ясно, что $W = X \setminus \overline{V}$ — открытая окрестность множества F и $V \cap W = \emptyset$.

T_4 : У любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся (открытые) окрестности.

Равносильные условия:

- Для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся такая окрестность V множества F , что $\bar{V} \subset U$.

Доказательство равносильности этого условия аксиоме T_4 дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для аксиомы T_3 .

- Если F и G — любые непересекающиеся замкнутые множества, то у F найдётся окрестность V такая, что G содержится в дополнении её замыкания.

Чтобы увидеть, что это условие равносильно первому, достаточно положить U равным дополнению G .

В этот список не включена ещё одна важная аксиома отделимости, $T_{3\frac{1}{2}}$; её мы обсудим позже.

Определение

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2 , называются **хаусдорфовыми**.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3 , называются **регулярными**.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4 , называются **нормальными**.

В тех случаях, когда два множества (или точки) имеют непересекающиеся окрестности, говорят, что эти множества **отделены окрестностями**. Например, аксиома T_4 утверждает, что любые непересекающиеся замкнутые множества отделены окрестностями.

Класс всех топологических пространств, удовлетворяющих данной аксиоме отделимости, обозначается тем же символом, что и сама аксиома, так что запись $X \in T_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$, означает, что пространство X удовлетворяет аксиоме T_i . Вместо «топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_i », часто пишут « **T_i -пространство**».

Теорема

Для топологического пространства X следующие условия равносильны:

- 1 X хаусдорфово;
- 2 если фильтр на X сходится, то он сходится к ровно одной точке;
- 3 если ультрафильтр на X сходится, то он сходится к ровно одной точке.

Доказательство. 1 \implies 2: Пусть \mathcal{F} — фильтр на X и $\mathcal{F} \rightarrow x$. Возьмём точку $y \in X$, $y \neq x$. $X \in T_2 \implies$ существуют непересекающиеся окрестности U и V точек x и y . $\mathcal{F} \rightarrow x \implies U \in \mathcal{F}$. Значит, $V \notin \mathcal{F}$ и \mathcal{F} не сходится к y .

Импликация 2 \implies 3 тривиальна.

3 \implies 1: Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Предположим, что любая окрестность x пересекается с любой окрестностью y . Рассмотрим семейство

$$\mathcal{F} = \{U \cap V : U \text{ — окрестность } x, V \text{ — окрестность } y\}.$$

Оно центрировано и содержит все окрестности x и все окрестности точки y (в качестве U или V можно брать X). \mathcal{F} содержится в некотором ультрафильтре \mathcal{U} . Имеем $\mathcal{U} \rightarrow x$ и $\mathcal{U} \rightarrow y$. Противоречие. □

Теорема

График любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ произвольного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y замкнут в $X \times Y$.

Доказательство. Надо показать, что множество $(X \times Y) \setminus \text{Gr } f$ открыто, т.е. что если $x \in X$, $y \in Y$ и $y \neq f(x)$, то найдутся открытые множества $U \subset X$ в X и $V \subset Y$ в Y такие, что $(x, y) \in U \times V$ и $z \neq f(t)$ для любых $t \in U$ и $z \in V$. Это действительно так: поскольку пространство Y хаусдорфово, у точек y и $f(x)$ найдутся непересекающиеся открытые окрестности V и W в Y , а поскольку отображение f непрерывно, множество $U = f^{-1}(W)$ открыто в X . Ясно, что множества U и V обладают нужными свойствами. □

Теорема

Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ замкнута в пространстве $X \times X$.

Доказательство. Замкнутость диагонали в предположении хаусдорфовости X вытекает из предыдущей теоремы, поскольку $\Delta = \text{Gr id}_X$, а тождественное отображение id_X всегда непрерывно.

Обратно, предположим, что диагональ Δ замкнута и рассмотрим две любые разные точки $x, y \in X$. Поскольку $(x, y) \notin \Delta$, у точки (x, y) найдётся не пересекающая Δ окрестность в $X \times X$. Поскольку топология произведения $X \times X$ порождена базой $\{U \times V : U \text{ и } V \text{ открыты в } X\}$, найдутся открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $(x, y) \in U \times V$ (а значит, $x \in U$ и $y \in V$) и $U \times V \cap \Delta = \emptyset$, т.е. $U \cap V = \emptyset$, что и доказывает хаусдорфовость X . □

Теорема

Пусть $f, g: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y . Тогда множество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ точек их совпадения замкнуто в X .

Доказательство. Мы покажем, что множество $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ открыто в X .

Для каждого $x \in A$ имеем $f(x) \neq g(x)$; поскольку Y хаусдорфово, существуют открытые в Y множества U и V такие, что $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ и $U \cap V = \emptyset$.

Множество $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ открыто в X (так как f и g непрерывны), содержит точку x и содержится в A .

Мы показали, что каждая точка $x \in A$ содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью W ; значит, A открыто. □

Следствие

Множество $\text{Fix } f = \{x \in X : f(x) = x\}$ неподвижных точек любого отображения $f: X \rightarrow X$ хаусдорфова пространства X в себя замкнуто в X .

Доказательство. Достаточно применить теорему к отображениям f и $g = \text{id}_X$.



Следствие

Если $f, g: X \rightarrow Y$ — непрерывные отображения произвольного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y , $A \subset X$, $\bar{A} = X$ и $f(a) = g(a)$ для всех $a \in A$, то $f = g$, т.е. $f(x) = g(x)$ для всех $x \in X$.

В частности, любые непрерывные функции на топологическом пространстве, совпадающие на плотном подмножестве этого пространства, совпадают и на всём пространстве.

Теорема

Всякое метризуемое пространство нормально.

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство, и пусть d — любая метрика на пространстве X , порождающая его топологию.

Заметим, что X — T_1 - и даже T_2 -пространство, поскольку если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $d(x, y) > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и $B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B_d(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \emptyset$.

Покажем, что $X \in T_4$. Пусть A и B замкнуты, $A \cap B = \emptyset$. Рассмотрим

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}. \quad (1)$$

Вспомним: $x \in \bar{Y} \iff d(x, Y) = 0$. Значит, $\forall x \in A$ имеем $d(x, B) > 0$, и $\forall y \notin A$ имеем $d(y, A) > 0$, так что функция f определена корректно. Она непрерывна, так как функции $X \rightarrow \mathbb{R}$, определённые правилами $x \mapsto d(x, A)$ и $x \mapsto d(x, B)$, непрерывны. Наконец, ясно, что $f|_A \equiv 0$ и $f|_B \equiv 1$, так что $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ и $V = f^{-1}([\frac{1}{2}, 1])$ — непересекающиеся открытые (в силу непрерывности f) окрестности множеств A и B соответственно. □

Лемма Урысона

Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B в T_4 -пространстве X существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$.

Доказательство. Сперва мы построим семейство открытых множеств V_r , $r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, удовлетворяющее условиям

- 1 $\bar{V}_r \subset V_s$ для $r < s$, $r, s \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, и
- 2 $A \subset V_0$, $B \subset X \setminus V_1$.

Положим $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$ и как-нибудь заиндексируем все рациональные числа в интервале $(0, 1)$ натуральными числами, большими 2: r_3, r_4, r_5, \dots . Введём вспомогательное условие

- 1_n $\bar{V}_{r_i} \subset V_{r_j}$, если $r_i < r_j$ и $i, j \leq n$

и будем строить множества V_r индукцией по номеру (индексу) рационального числа r .

Пользуясь тем, что $X \in T_4$, найдём открытые множества U и V со свойствами $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \emptyset$. Положим $V_0 = U$ и $V_1 = X \setminus B$. Очевидно, $A \subset V_0 \subset X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subset V_1$; следовательно, $\overline{V_0} \subset V_1$, т.е. условие ①_n выполнено для $n = 2$ (условие ② тоже выполнено).

Допустим, что $n \geq 2$ и множества V_{r_j} уже определены для $j \leq n$ так, что выполнено условие ①_n. Найдём среди чисел r_1, r_2, \dots, r_n числа r_l и r_m , ближайšie к r_{n+1} слева и справа соответственно. Поскольку $r_l < r_m$ и $l, m \leq n$, из ①_n следует, что $\overline{V_{r_l}} \subset V_{r_m}$. Из того, что $X \in T_4$, вытекает существование открытого множества W такого, что $\overline{V_{r_l}} \subset W \subset \overline{W} \subset V_{r_m}$. Положим $V_{r_{n+1}} = W$. Поскольку любое число $r_i \neq r_l$ с индексом $i \leq n$, удовлетворяющее условию $r_i < r_{n+1}$, меньше r_l , по индуктивному предположению имеем $\overline{V_{r_i}} \subset V_{r_l}$ для любого такого r_i , и поскольку любое число $r_j \neq r_m$ с индексом $j \leq n$, удовлетворяющее условию $r_j > r_{n+1}$, больше r_m , по индуктивному предположению имеем $\overline{V_{r_m}} \subset V_{r_j}$ для любого такого r_j . Значит, множества $V_{r_1}, V_{r_2}, \dots, V_{r_n}, V_{r_{n+1}} = W$ удовлетворяют условию ①_{n+1}.

В результате получим последовательность открытых множеств V_{r_1}, V_{r_2}, \dots , удовлетворяющую условиям ① и ②.

Определим функцию $f: X \rightarrow [0, 1]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & \text{если } x \in V_1, \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

В силу ② имеем $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$. Покажем, что f непрерывна. Достаточно проверить, что все множества вида $f^{-1}([0, a))$ и $f^{-1}((b, 1])$ открыты в X .

Для $a \in (0, 1]$ и $x \in X$ $f(x) < a \iff \exists r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ т., что $r < a$ и $x \in V_r$; значит, $f^{-1}([0, a)) = \bigcup\{V_r : r \in [0, a) \cap \mathbb{Q}\}$, а это множество открыто.

Для $b \in [0, 1)$ и $x \in X$ $f(x) > b \iff \exists r \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ т., что $r > b$ и $x \notin V_r$. Пусть $s \in \mathbb{Q}$, $b < s < r$. В силу ① имеем $\bar{V}_s \subset V_r$; значит, если $f(x) > b$, то найдётся $s \in (b, 1] \cap \mathbb{Q}$, для которого $x \notin \bar{V}_s$. Очевидно, верно и обратное: если $x \notin \bar{V}_s$ для некоторого $s \in (b, 1] \cap \mathbb{Q}$, то $x \notin V_s$ и $f(x) \geq s > b$. Значит, $f^{-1}((b, 1]) = \bigcup\{X \setminus \bar{V}_s : s \in (b, 1] \cap \mathbb{Q}\}$, а это множество открыто.

Мы доказали непрерывность функции f , а вместе с ней и лемму Урысона. □

На самом деле лемма Урысона (как и теорема Титце–Урысона) представляет собой характеристику T_4 -пространств.

Говорят, что непересекающиеся множества A и B в топологическом пространстве X **функционально отделимы**, если существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$. Ясно, что это условие равносильно существованию непрерывной функции $g: X \rightarrow \mathbb{R}$, принимающей разные постоянные значения на множествах A и B : если $g(A) \equiv a$ и $g(B) \equiv b$, то функцию f можно определить правилом $f(x) = \frac{|f(x)-a|}{|f(x)-a|+|f(x)-b|}$.

Таким образом, лемму Урысона можно сформулировать так: *топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_4 тогда и только тогда, когда в нём любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы.*