Теорема

Для отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств следующие свойства равносильны:

1. *f непрерывно, т.е. прообраз при f любого открытого множества открыт;*
2. *прообраз при f любого замкнутого множества замкнут;*
3. *отображение f непрерывно в каждой точке пространства X;*
4. *образ при f замыкания любого множества $A \subset X$ в X содержится в замыкании образа $f(A)$ этого множества в Y;*
5. *замыкание в X прообраза $f^{-1}(B)$ любого множества $B \subset Y$ содержится в прообразе замыкания множества B в Y.*

Доказательство. 1 $\Leftrightarrow$ 2 очевидно, 1 $\Leftrightarrow$ 3 доказывается как предложение выше.
2$\Rightarrow$4: Пусть $A \subset X$. В силу 2 множество $f^{-1}\left(\overline{f(A)}^{Y}\right)$ замкнуто, и оно содержит A; значит, $\overline{A} \subset f^{-1}\left(\overline{f(A)}^{Y}\right)$.
4$\Rightarrow$5 следует из того, что $B = f(f^{-1}(B))$, так что $\overline{B} \supset f(\overline{f^{-1}(B)})$.
5$\Rightarrow$2: если $F \subset Y$ замкнуто в Y, то в силу 5 имеем $\overline{f^{-1}(F)}^{X} \subset f^{-1}(F)$, а значит, $\overline{f^{-1}(F)}^{X} = f^{-1}(F)$, т.е. множество $f^{-1}(F)$ замкнуто. $\square$

Теорема

1. *Отображение* $f : X \to Y$ *метрических пространств непрерывно в точке* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда образ при* f *любой последовательности, сходящейся к* x, *сходится к* $f(x)$.
2. *Отображение* $f : X \to Y$ *топологических пространств непрерывно в точке* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда образ при* f *любой направленности, сходящейся к* x, *сходится к* $f(x)$.
3. *Отображение* $f : X \to Y$ *топологических пространств непрерывно в точке* $x \in X$ *тогда и только тогда, когда образ при* f *любого ультрафильтра, сходящегося к* x, *сходится к* $f(x)$.

Доказательство. ③ Предположим, что образ при f любого сходящегося к точке $x \in X$ ультрафильтра сходится к $f(x)$. Пусть V — любая окрестность точки $f(x)$. Если её прообраз $f^{-1}(V)$ не является окрестностью (= не содержит ни одной окрестности) точки x в X, то семейство

$$\mathscr{F} = \{X \setminus f^{-1}(V)\} \cup \{U : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

центрировано, а значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Этот ультрафильтр сходится к точке x, значит, его образ $\beta f(\mathscr{U})$ должен сходиться к $f(x)$. Однако $X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U} \implies f(X \setminus f^{-1}(V)) = f(X) \setminus V \in \beta f(\mathscr{U}) \implies V \notin \beta f(\mathscr{U})$. Это противоречие показывает, что $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x в X, т.е. f непрерывно в x.

Обратно, пусть f непрерывно в $x \in X$. Рассмотрим любой ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, сходящийся к x. Если $\beta f(\mathscr{U})$ на Y не сходится к $f(x)$, то у этой точки есть окрестность $V \notin \beta f(\mathscr{U})$. По основному свойству ультрафильтров имеем $Y \setminus V \in \beta f(\mathscr{U})$, а по определению отображения ультрафильтров βf

$$f^{-1}(X \setminus V) = X \setminus f^{-1}(V) \in \mathscr{U}$$

в противоречие с тем, что $\mathscr{U} \to x$ и $f^{-1}(V)$ — окрестность точки x. $\square$

Следствие

1. *Отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда образ при этом отображении любой сходящейся последовательности сходится к образу её предела.*
2. *Отображение топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда образ при этом отображении любой сходящейся направленности сходится к образу её предела.*
3. *Отображение топологических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда образ при этом отображении любого сходящегося ультрафильтра сходится к образу его предела.*

Предложение

Для любых отображений $f\colon X \to Y$ *и* $g\colon Y \to Z$ *топологических пространств верны следующие утверждения:*

- *если* f *и* g *непрерывны, то композиция* $g \circ f$ *тоже непрерывна;*
- *если отображение* f *непрерывно в точке* $x \in X$, *а* g *непрерывно в точке* $f(x)$, *то композиция* $g \circ f$ *непрерывна в точке* x;
- *если отображение* f *непрерывно,* $x \in A \subset X$ *и* $f(A) \subset B \subset Y$, *то подотображение* $f \cap (A \times B)\colon A \to B$ *непрерывно. В частности, сужение* $f|_A\colon A \to Y$ *непрерывно;*
- *если отображение* f *непрерывно в точке* $x \in X$, $x \in A \subset X$ *и* $f(A) \subset B \subset Y$, *то подотображение* $f \cap (A \times B)\colon A \to B$ *непрерывно в точке* x;
- *если* f *непрерывно, то для любого пространства* Z, *содержащего* Y *в качестве подпространства, надотображение* $X \to Z$ *отображения* f *непрерывно;*
- *если* f *непрерывно в точке* $x \in X$, *то для любого пространства* Z, *содержащего* Y *в качестве подпространства, надотображение* $X \to Z$ *отображения* f *непрерывно в точке* x.

Очень полезное утверждение

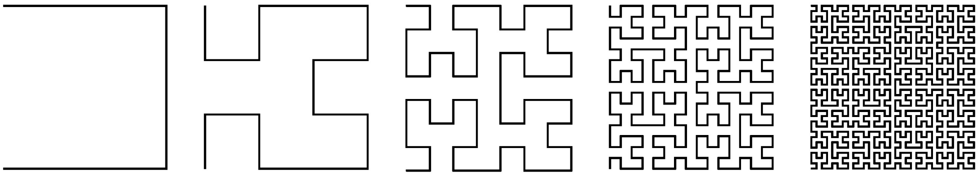
а) Если $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств и существует предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты в X, то f непрерывно.

б) Если $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств, $x \in X$ и существует локальная база топологии Y в точке $f(x)$, прообразы всех элементов которой являются окрестностями точки x в X (не обязательно открытыми), то f непрерывно в точке x.

Доказательство. а) Пусть $\mathscr{B}$ — предбаза топологии Y, прообразы всех элементов которой открыты, и пусть $\mathscr{U} = \{U_1 \cap \cdots \cap U_n : n \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_n \in \mathscr{B}\}$ — порождённая ею база. Поскольку $f^{-1}(U_1 \cap \cdots \cap U_n) = f^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap f^{-1}(U_n)$ и конечные пересечения открытых множеств открыты, заключаем, что прообразы всех элементов $\mathscr{U}$ открыты, а из того, что любое открытое множество в Y есть объединение элементов базы и прообраз объединения любого семейства множеств всегда равен объединению прообразов элементов этого семейства, следует, что прообраз любого открытого подмножества Y открыт, т.е. f непрерывно. $\square$

Примеры непрерывных отображений

- Любое отображение дискретного пространства куда угодно непрерывно.
- Отображение $f\colon X \to Y$ антидискретного пространства X в пространство Y непрерывно $\iff$ $f(X)$ с топологией, индуцированной из Y, антидискретно.
- Пусть $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ — две разные топологии на одном и том же множестве X. Тождественное отображение $\mathrm{id}_X\colon (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_2)$ непрерывно тогда и только тогда, когда $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ (т.е. топологии $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ сравнимы и $\mathscr{T}_1$ сильнее).
- Существует непрерывное сюръективное отображение обычного отрезка $[0, 1]$ на квадрат. Такие отображения называются кривыми, заполняющими квадрат, или кривыми Пеано. Гильберт предложил такой вариант построения этого отображения:



- Простая проверка доказывает непрерывность следующих отображений (относительно обычной топологии на $\mathbb{R}$ и евклидовой топологии на $\mathbb{R}^2$):

$$
\begin{aligned}
+\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x + y;\\
-\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x - y;\\
\times\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x \cdot y;\\
/ \colon \widetilde{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x/y\\
&\qquad (\text{здесь } \widetilde{\mathbb{R}^2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\});\\
\max\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto \max\{x, y\};\\
\min\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto \min\{x, y\};\\
\pi_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto x;\\
\pi_2\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, &\quad (x, y) \mapsto y;\\
|\cdot|\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, &\quad x \mapsto |x|.
\end{aligned}
$$

- Для всякого топологического пространства X и любых непрерывных отображений $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ диагональ $f \Delta g\colon X \to \mathbb{R}^2$ (напомним, что это отображение, определенное правилом $x \mapsto (f(x), g(x))$) непрерывна. Чтобы убедиться в этом, в силу полезного утверждения достаточно заметить, что множества вида $\{(x, y) : a < x < b,\ c < y < d\}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, образуют базу топологии $\mathbb{R}^2$ и их прообразы $f^{-1}(a, b) \cap g^{-1}(c, d)$ открыты ввиду непрерывности отображений f и g.

С помощью конструкций из двух последних примеров легко доказывается такое утверждение:

Предложение

Если X — любое топологическое пространство и $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, то следующие функции $X \to \mathbb{R}$ тоже непрерывны:

- $x \mapsto f(x) + g(x)$;
- $x \mapsto f(x) - g(x)$;
- $x \mapsto f(x) \cdot f(y)$;
- $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$;
- $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$;
- $x \mapsto |f(x)|$.

Если при этом $0 \notin g(X)$, то непрерывна ещё и функция $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$.

Гомеоморфизмы

Определение

Гомеоморфизмом, или топологическим отображением, между топологическими пространствами X и Y называется непрерывное взаимно однозначное отображение $f\colon X \to Y$ с тем свойством, что обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$ тоже непрерывно. Говорят, что пространства X и Y гомеоморфны, и пишут $X \cong Y$, если существует гомеоморфизм $f\colon X \to Y$. Топологические свойства, или топологические инварианты, — это те свойства топологических пространств, которые сохраняются гомеоморфизмами. Другими словами, $\mathscr{P}$ — топологическое свойство, если каковы бы ни были гомеоморфные топологические пространства X и Y, X обладает свойством $\mathscr{P} \iff Y$ обладает свойством $\mathscr{P}$.

Когда пространство X гомеоморфно некоторому подпространству Z пространства Y, говорят, что X гомеоморфно вложено, или просто вложено, или вкладывается, в пространство Y, а гомеоморфизм между X и Z называется топологическим вложением, или просто вложением.

Отношение $\cong$ («быть гомеоморфными») является отношением эквивалентности на классе топологических пространств.

Графики отображений

Определение

Графиком отображения $f\colon X \to Y$ называется множество
$$\operatorname{Gr} f = \{(x,y) : x \in X,\ y = f(x)\} \subset X \times Y.$$

Определение

На декартовом произведении $X \times Y$ двух топологических пространств имеется естественная **топология произведения** — она порождена базой
$$\mathscr{B} = \{U \times V :\ U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y\}.$$
Топологическим произведением, или просто **произведением**, двух топологических пространств называется их декартово произведение с этой топологией.

Когда график отображения топологических пространств сам рассматривается как топологическое пространство, всегда имеется в виду, что его топология индуцирована топологией произведения.

Теорема

График $\operatorname{Gr} f$ *любого непрерывного отображения* $f\colon X \to Y$ *топологических пространств гомеоморфен пространству* X.

Доказательство. Отображение $\varphi\colon X \to \operatorname{Gr} f$, определенное правилом $\varphi(x) = (x, f(x))$ для любого $x \in X$, — гомеоморфизм. Действительно, оно, очевидно, является биекцией; непрерывность φ следует из того, что семейство

$$\widehat{\mathscr{B}} = \{W \cap \operatorname{Gr} f : W \in \mathscr{B}\} = \\ = \{(U \times V) \cap \operatorname{Gr} f : U \text{ открыто в } X,\ V \text{ открыто в } Y\}$$

является базой индуцированной топологии на графике, и прообраз

$$\varphi^{-1}\big((U \times V) \cap \operatorname{Gr} f\big) = U \cap f^{-1}(V)$$

любого элемента этого семейства открыт в силу непрерывности f; наконец, открытость отображения φ очевидна — образ $\varphi(U)$ любого открытого множества $U \subset X$ есть множество $(U \times Y) \cap \operatorname{Gr} f$, которое открыто в индуцированной топологии графика, поскольку $U \times Y$ открыто в топологии произведения. $\square$

Сохранение топологических свойств непрерывными отображениями

Мы будем говорить, что топологическое свойство $\mathscr{P}$ сохраняется отображениями из класса $\mathscr{C}$, если, каково бы ни было пространство X со свойством $\mathscr{P}$ и отображение $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$ из класса $\mathscr{C}$, образ $Y = f(X)$ обладает свойством $\mathscr{P}$. Среди тех свойств, что нам уже известны, только три сохраняются произвольными непрерывными отображениями — свойство иметь мощность $\leqslant \kappa$, свойство иметь плотность $\leqslant \kappa$ и свойство иметь число Суслина $\leqslant \kappa$. Сто́ит отметить, что многими «хорошими» свойствами обладают дискретные пространства, а любое отображение дискретного пространства непрерывно.

Определение

Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется открытым, если образ каждого множества, открытого в X, открыт в Y, и замкнутым, если образ каждого множества, замкнутого в X, замкнут в Y.

Определение

Подпространство Y топологического пространства X называется ретрактом этого пространства, если существует непрерывное отображение $r\colon X \to Y$, тождественное на Y (т.е. такое, что $f(y) = y$ для всякого $y \in Y$). Такое отображение r называется ретракцией.

Теорема

Топологическое пространство Y является ретрактом пространства $X \supset Y$ тогда и только тогда, когда любое непрерывное отображение $Y \to Z$ в любое пространство Z продолжается до непрерывного отображения $X \to Z$.

Доказательство. Если $r\colon X \to Y$ — ретракция, то для любого непрерывного $f\colon Y \to Z$ композиция $f \circ r\colon X \to Z$ непрерывна и продолжает f.

Обратно, если любое непрерывное отображение $Y \to Z$ можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Z$, то и тождественное отображение $\mathrm{id}_Y\colon Y \to Y$ можно продолжить до непрерывного отображения $X \to Y$; любое такое продолжение, очевидно, является ретракцией. $\square$

Теорема о неретрагируемости

Ни для какого натурального n не существует ретракции $r\colon \overline{D}^n \to S^{n-1}$.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Для любого натурального n всякое непрерывное отображение $\overline{D}^n \to \overline{D}^n$ имеет неподвижную точку.

Теорема Брауэра легко выводится из теоремы о неретрагируемости, и наоборот:

предположим, что $f\colon \overline{D}^n \to \overline{D}^n$ — непрерывное отображение без неподвижной точки, и для каждой точки $x \in \overline{D}^n$ рассмотрим луч с началом $f(x)$, проходящий через точку x. Обозначим через $r(x)$ точку, в которой этот луч пересекает сферу S^{n-1}. Легко проверить, что отображение $r\colon x \mapsto r(x)$ — ретракция $\overline{D}^n$ на S^{n-1}.

Предположим теперь, что $r\colon \overline{D}^n \to S^{n-1}$ — ретракция. Пусть $i\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ — отображение $x \mapsto -x$. Тогда отображение $i \circ r\colon \overline{D}^n \to S^{n-1} \subset \overline{D}^n$ непрерывно и не имеет неподвижных точек.

Теорема Брауэра о неподвижной точке

Обозначения

$\overline{D}^n$ и S^{n-1} — замкнутый единичный диск (шар) и сфера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\overline{D}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leqslant 1\},$$
$$S^{n-1} = \{\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

Диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен n-мерному ***симплексу*** Δ^n — выпуклой оболочке $n+1$ аффинно независимых (т.е. не лежащих в одной $(n-1)$-мерной плоскости) точек $\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_n$ аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant n$. Другими словами,

$$\overline{D}^n \cong \Delta^n = \{\mathrm{x} = \lambda_0 \cdot \mathrm{a}_0 + \lambda_1 \cdot \mathrm{a}_1 + \dots + \lambda_n \cdot \mathrm{a}_n : \lambda_0, \dots, \lambda_n \geqslant 0,\ \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1\}$$

(мы имеем дело с точками пространства $\mathbb{R}^m$, т.е. m-ками вещественных чисел; операции сложения m-ок и умножения их на число определяются покоординатно). Числа $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ называются ***барицентрическими координатами*** точки $\mathrm{x} \in \Delta^n$.

Точки $a_0, \dots, a_n$ называются ***вершинами*** симплекса Δ^n, а симплексы с вершинами $a_{n_0}, \dots, a_{n_k}$, где $k \leqslant n$ и $n_0, \dots, n_k$ — различные числа из множества $\{0, \dots, n\}$, называются k-мерными ***гранями*** симплекса Δ^n. *Барицентр* грани с вершинами $a_{n_0}, \dots, a_{n_k}$ — это точка $\frac{a_{n_0} + \dots + a_{n_k}}{k+1}$.

Триангуляция n-мерного симплекса Δ^n с вершинами $a_0, \dots, a_n$ — это представление симплекса Δ^n в виде конечного объединения n-мерных симплексов $\Delta^n_0, \dots, \Delta^n_k$, в котором пересечение любых двух симплексов Δ^n_i и Δ^n_j, $i \neq j$, либо пусто, либо является гранью каждого из симплексов Δ^n_i и Δ^n_j. Вершины симплексов $\Delta^n_0, \dots, \Delta^n_k$ называются ***вершинами триангуляции***. Триангуляция, вершинами которой являются барицентры *всех* граней симплекса Δ^n, называется *барицентрическим подразделением* симплекса Δ^n.

Предположим, что вершины k-мерного симплекса раскрашены в цвета из набора $\{0, \dots, m\}$, $m \geqslant k$. Мы будем говорить, что раскраска *полна*, если среди цветов вершин симплекса встречаются все цвета $0, \dots, k$ (тогда каждый из этих цветов встречается ровно по одному разу и ни один из цветов с номером $> k$ не встречается).

Лемма 1

Пусть все вершины триангуляции симплекса Δ^n, $n \geqslant 0$, раскрашены в цвета из набора $\{0, \dots, n\}$. Тогда число симплексов триангуляции, раскраска вершин которых полна, имеет ту же чётность, что и число тех $(n-1)$-мерных граней симплексов триангуляции, которые содержатся в границе симплекса Δ^n и раскраска вершин которых полна.

Доказательство. Пусть раскраска $(n-1)$-мерной грани некоторого n-мерного симплекса полна. Если противоположная ей вершина раскрашена в цвет n, то у симплекса ровно одна $(n-1)$-мерная грань с полной раскраской, иначе ровно две. Значит, число n-мерных симплексов триангуляции с полной раскраской имеет ту же чётность, что и число N пар «n-мерный симплекс — его $(n-1)$-мерная грань с полной раскраской». Всякий $(n-1)$-мерный симплекс, являющийся гранью одного из симплексов триангуляции, содержится в ровно одном n-мерном симплексе триангуляции, если он лежит на границе Δ^n, и ровно в двух таких симплексах иначе. Поэтому N имеет ту же чётность, что и количество $(n-1)$-граней с полной раскраской, содержащихся в симплексах триангуляции и составляющих границу Δ^n. $\square$

Лемма Шпернера

Предположим, что вершины триангуляции n-мерного симплекса Δ^n, где $n \geqslant 0$, раскрашены так, что раскраска самóго симплекса Δ^n полна и цвет каждой вершины триангуляции, принадлежащей какой-нибудь грани симплекса Δ^n, совпадает с цветом одной из вершин этой грани. Тогда среди симплексов триангуляции есть симплекс с полной раскраской (и число таких симплексов нечётно).

Доказательство. Для $n = 0$ лемма, очевидно, верна. Предположим, что $k > 0$ и лемма верна для $n < k$. Докажем её для $n = k$.

Достаточно доказать, что число симплексов триангуляции с полной раскраской нечётно. По лемме 1 это равносильно тому, что число $(k-1)$-мерных симплексов с полной раскраской, являющихся гранями симплексов триангуляции и содержащихся в границе симплекса Δ^k, нечётно. Из условия на цвета вершин триангуляции следует, что на границе Δ^k любой $(k-1)$-мерный симплекс с полной раскраской содержится в $(k-1)$-мерной грани симплекса Δ^k с полной раскраской, поэтому справедливость леммы Шпернера для k-мерного симплекса следует из её справедливости для $(k-1)$-мерного симплекса. $\square$

Лемма 2

Для любых точек x *и* y *симплекса* $\Delta^n \subset \mathbb{R}^m$ *($n \leqslant m$) с вершинами* $\mathrm{a}_0, \dots, \mathrm{a}_n$
$$d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant \max\{d_m(\mathrm{a}_i, \mathrm{a}_j) : i, j \leqslant n\}.$$

Доказательство. Сначала покажем, что $d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \leqslant \max\limits_{i \leqslant n} d_m(\mathrm{a}_i, \mathrm{y})$. Пусть точка x имеет барицентрические координаты $\lambda_0, \dots, \lambda_n$, т.е. $\mathrm{x} = \sum\limits_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{a}_i \in \Delta^n$; напомним, что $\sum\limits_{i \leqslant n} \lambda_i = 1$ и $\lambda_i \geqslant 0$ для $i \leqslant n$. Имеем

$$d_m(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = d_m\left(\sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{a}_i, \sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{y}\right) = \left|\sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{a}_i - \sum_{i \leqslant n} \lambda_i \mathrm{y}\right|_m = \left|\sum_{i \leqslant n} \lambda_i (\mathrm{a}_i - \mathrm{y})\right|_m \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i \leqslant n} \lambda_i |\mathrm{a}_i - \mathrm{y}|_m \leqslant \max_{i \leqslant n} |\mathrm{a}_i - \mathrm{y}|_m = \max_{i \leqslant n} d_m(\mathrm{a}_i, \mathrm{y}).$$

Повторив то же рассуждение для y и a_j (где j — любое фиксированное число $\leqslant n$) вместо x и y, мы приходим к нужному заключению. □

Лемма 3

Если $n \in \mathbb{N}$ и d — максимальная длина ребра симплекса Δ^n с вершинами $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n$, то максимальная длина ребра барицентрического подразделения симплекса Δ^n не превосходит $\frac{n}{n+1} \cdot d$.

Доказательство. Вершины симплекса барицентрического подразделения имеют вид $\mathrm{a}_{\pi(0)}$, $\frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\mathrm{a}_{\pi(1)}}{2}$, $\ldots$, $\frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(n)}}{n+1}$, где π — перестановка (индукция по n). Надо показать, что расстояние между любыми точками вида

$$\frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(p+q-1)}}{p+q} \quad \text{и} \quad \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(p-1)}}{p}$$

для любых натуральных p и q таких, что $p+q \leqslant n+1$, не превосходит $\frac{n}{n+1} \cdot d$. Имеем

$$\frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(p+q-1)}}{p+q} - \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(p-1)}}{p} =$$
$$= \frac{q}{p+q}\left(\frac{\mathrm{a}_{\pi(p)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(p+q-1)}}{q} - \frac{\mathrm{a}_{\pi(0)}+\cdots+\mathrm{a}_{\pi(p-1)}}{p}\right) = \frac{q}{p+q}(\mathrm{a}-\mathrm{b}),$$

где a и b — некоторые точки Δ^n. Осталось заметить, что $d_m(\mathrm{a},\mathrm{b}) \leqslant d$ (по лемме 2) и $\frac{q}{p+q} \leqslant \frac{p+q-1}{p+q} = 1 - \frac{1}{p+q} \leqslant \frac{n}{n+1}$. $\square$

Доказательство теоремы Брауэра. Пусть $n \in \mathbb{N}$, Δ^n — любой n-мерный симплекс и $f \colon \Delta^n \to \Delta^n$ — непрерывное отображение. Мы докажем, что f имеет неподвижную точку; этого достаточно, поскольку диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен любому n-мерному симплексу.

Раскрасим точки симплекса. Пусть $\mathrm{x} \in \Delta^n$ и $x_0, \ldots, x_n$ — барицентрические координаты точки x. Точка $f(\mathrm{x})$ также принадлежит симплексу; пусть $y_0, \ldots, y_n$ — её барицентрические координаты. Мы покрасим x в цвет $j = \min\{i : y_i \leqslant x_i \neq 0\}$; существование такого j легко выводится из того, что $\sum\limits_{i \leqslant n} x_i = \sum\limits_{i \leqslant n} y_i = 1$ и $x_i, y_i \geqslant 0$ для $i \leqslant n$. При такой раскраске цвета вершин любой триангуляции симплекса Δ^n удовлетворяют условиям леммы Шпернера, потому что каждая вершина a_i симплекса Δ^n имеет цвет i и если точка принадлежит грани с вершинами $\mathrm{a}_{i_0}, \ldots, \mathrm{a}_{i_k}$, то у неё отличаться от нуля могут лишь барицентрические координаты с номерами $i_0, \ldots, i_k$, а значит, она покрашена в один из цветов $i_0, \ldots, i_k$. По лемме Шпернера в барицентрическом подразделении симплекса Δ^n найдётся симплекс Δ_1^n с полной раскраской. Выберем в нём точку X_1.

Теперь возьмём барицентрическое подразделение каждого симплекса барицентрического подразделения симплекса Δ^n. В результате мы получим набор симплексов, которые в совокупности тоже образуют триангуляцию симплекса Δ^n — так сказать, вторую итерацию барицентрического подразделения. В нём тоже найдётся симплекс с полной раскраской. Обозначим его Δ_2^n и выберем в нём точку X_2.

Продолжая в том же духе, мы получим последовательность симплексов $\Delta_1^n, \Delta_2^n, \ldots$ с полной раскраской, диаметры которых стремятся к нулю по лемме 3, и последовательность точек $X_1, X_2, \ldots$, которая содержит сходящуюся подпоследовательность $(X_{i_n})_{n\in\mathbb{N}}$ по известной из анализа теореме Больцано–Вейерштрасса. Покажем, что $X = \lim_{n\to\infty} X_{i_n}$ — неподвижная точка отображения f.

Пусть $(x_0, \ldots, x_n)$ и $(y_0, \ldots, y_n)$ — барицентрические координаты (относительно точек $\mathrm{a}_0, \ldots, \mathrm{a}_n$ — вершин исходного симплекса Δ^n) точки X и её образа $f(\mathrm{X})$, а $(x_{i_k,0}, \ldots, x_{i_k,n})$ — барицентрические координаты точек X_{i_k}. Кроме того, для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть $(x^l_{i_k,0}, \ldots, x^l_{i_k,n})$ и $(y^l_{i_k,0}, \ldots, y^l_{i_k,n})$, где $l = 0, \ldots, n$, — барицентрические координаты вершин симплекса $\Delta^n_{i_k}$, содержащего точку X_{i_k}, и их образов при отображении f. Раскраски всех симплексов $\Delta^n_{i_k}$ полны, поэтому для всякого цвета $j = 0, \ldots, n$ у каждого симплекса $\Delta^n_{i_k}$ есть вершина цвета j, т.е. найдётся число $l(k) \in \{0, \ldots, n\}$ такое, что $y^{l(k)}_{i_k,j} \leqslant x^{l(k)}_{i_k,j}$. Ясно, что для бесконечного множества индексов k все $l(k)$ принимают одно и то же значение l. Поскольку диаметры симплексов $\Delta^n_{i_k}$ стремятся к нулю, а барицентрические координаты непрерывно зависят от точки, имеем $\lim_{k\to\infty} x^l_{i_k,j} = \lim_{k\to\infty} x_{i_k,j} = x_j$, а в силу непрерывности отображения f и того, что $y^l_{i_k,j} \leqslant x^l_{i_k,j}$ для бесконечно многих k, имеем также $\lim_{k\to\infty} y^l_{i_k,j} = y_j$ и $y_j \leqslant x_j$ для $j = 0, \ldots, n$.

Мы показали, что $y_j \leqslant x_j$ для всех $j = 0, \ldots, n$. Однако $\sum\limits_{j\leqslant n} x_j = \sum\limits_{j\leqslant n} y_j = 1$; значит, $y_j = x_j$ для $j = 0, \ldots, n$. $\square$