Фильтры и ультрафильтры

Определение

Центрированное семейство множеств — это любое семейство $\mathscr{C}$ с тем свойством, что пересечение любого конечного множества его элементов непусто: если $n \in \mathbb{N}$ и $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$, то $C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \varnothing$.

Определение

Фильтром на множестве X называется непустое семейство $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(X)$, удовлетворяющее трём условиям:

1. $\varnothing \notin \mathscr{F}$;
2. если $A, B \in \mathscr{F}$, то $A \cap B \in \mathscr{F}$ (а значит, и любое конечное пересечение элементов $\mathscr{F}$ принадлежит $\mathscr{F}$);
3. если $A \in \mathscr{F}$ и $A \subset B \subset X$, то $B \in \mathscr{F}$. В частности, $X \in \mathscr{F}$.

Фильтр $\mathscr{F}$ называется свободным, если $\bigcap \mathscr{F} = \varnothing$. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ является базой фильтра $\mathscr{F}$, если любое множество $F \in \mathscr{F}$ содержит множество $B \in \mathscr{B}$.

Определение

Максимальный (по включению) фильтр называется ультрафильтром.
Ультрафильтр $\mathscr{U}$ называется главным, если $\bigcap \mathscr{U} \neq \varnothing$.

Теорема

Любое центрированное семейство $\mathscr{C}$ на произвольном множестве X содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X.

Доказательство. Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ всех центрированных семейств на X, содержащих $\mathscr{C}$, отношением включения $\subset$. Если $\mathfrak{L}$ — линейно упорядоченное подмножество $\mathfrak{C}$, то $\bigcup \mathfrak{L}$ — центрированное семейство: для любых $n \in \mathbb{N}$ и $F_1, \dots, F_n \in \bigcup \mathfrak{L}$ найдутся $\mathscr{F}_1, \dots, \mathscr{F}_n \in \mathfrak{L}$ такие, что $F_i \in \mathscr{F}_i$ для $i \leqslant n$. $\mathfrak{L}$ линейно упорядочено $\Rightarrow$ можно считать, что $\mathscr{F}_1 \subset \dots \subset \mathscr{F}_n$ (иначе перенумеруем $F_1, \dots, F_n$). Значит, $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}_n$, так что $\bigcap F_i \neq \varnothing$.

По лемме Цорна существует максимальное центрированное семейство $\mathscr{U} \supset \mathscr{C}$. $\mathscr{U}$ центрировано $\Rightarrow$ оно обладает свойством 1 из определения фильтра. Из максимальности $\mathscr{U}$ следуют свойства 2 и 3 (иначе можно добавить отсутствующее пересечение или надмножество без нарушения центрированности). Значит, $\mathscr{U}$ — фильтр. Максимальность $\Rightarrow$ $\mathscr{U}$ — ультрафильтр. $\square$

Теорема (основное свойство ультрафильтров)

Фильтр $\mathscr{F}$ на множестве X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для любого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathscr{F}$ — ультрафильтр на X, и пусть $A \subset X$. Если $F \setminus A = \varnothing$ для некоторого $F \in \mathscr{F}$, то $F \subset A$, так что $A \in \mathscr{F}$. Предположим, что для любого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \neq \varnothing$. Если $F_1, \dots, F_n \in \mathscr{F}$, то

$$(F_1 \setminus A) \cap \dots \cap (F_n \setminus A) = (F_1 \cap \dots \cap F_n) \setminus A \neq \varnothing,$$

т.е. семейство $\{F \setminus A : F \in \mathscr{F}\}$ центрировано. Оно содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на X. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ имеем $F \setminus A \in \mathscr{U}$ и, значит, $F \in \mathscr{U}$. Следовательно, $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, и из максимальности $\mathscr{F}$ вытекает, что $\mathscr{F} = \mathscr{U}$. Осталось заметить, что $X \setminus A \in \mathscr{U}$.

Достаточность. Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр с тем свойством, что для каждого $A \subset X$ либо $A \in \mathscr{F}$, либо $X \setminus A \in \mathscr{F}$, и пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр, содержащий $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F} \neq \mathscr{U}$, то найдется $A \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{F}$. По предположению $X \setminus A \in \mathscr{F}$, а поскольку $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$, имеем $X \setminus A \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$. Значит, $\mathscr{F} = \mathscr{U}$, так что $\mathscr{F}$ — ультрафильтр. □

Следствие (основное свойство ультрафильтров)

Если $\mathscr{U}$ *— ультрафильтр на множестве* X, $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m \subset X$ *и существует* $A \in \mathscr{U}$ *такой, что* $A \subset A_1 \cup \cdots \cup A_m$, *то* $A_i \in \mathscr{U}$ *для некоторого* $i \leqslant m$. *В частности, если* $A_1, \ldots, A_m$ *— любые подмножества* X *со свойством* $A_1 \cup \cdots \cup A_m = X$, *то* $A_i \in \mathscr{U}$ *для некоторого* $i \leqslant m$.

Доказательство. Предположим, что $A_i \notin \mathscr{U}$ для всех $i \leqslant m$. Тогда по доказанной теореме $X \setminus A_i \in \mathscr{U}$ для $i \leqslant m$. Значит, $(X \setminus A_1) \cap \cdots \cap (X \setminus A_m) = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m) \in \mathscr{U}$ в противоречие с тем, что $A \in \mathscr{U}$ и $A \cap (X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_m)) = \varnothing$. $\square$

Определение

Фильтр $\mathscr{F}$ на топологическом пространстве X сходится к некоторой точке $x \in X$, если любая окрестность этой точки принадлежит $\mathscr{F}$. Для сходимости $\mathscr{F}$ к x используется обозначение $\mathscr{F} \to x$. Фильтр сходится, или является сходящимся, если он сходится к некоторой точке.

Теорема

Для топологического пространства X, множества $A \subset X$ и точки $x \in X$ следующие условия равносильны:

а) *x является точкой прикосновения множества A;*

б) *существует фильтр $\mathscr{F}$ на X, который содержит A и сходится к x;*

в) *существует ультрафильтр $\mathscr{U}$ на X, который содержит A и сходится к x.*

Доказательство. а)$\Rightarrow$в): Семейство $\mathscr{B}(x)$ всех окрестностей точки x в X центрировано. Поскольку x — точка прикосновения множества A, семейство $\{A \cap U : U \in \mathscr{B}(x)\}$ тоже центрировано и, значит, содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$. Из свойства 3 вытекает, что $\mathscr{U}$ содержит как все окрестности x (а значит, $\mathscr{U} \to x$), так и множество A.

в)$\Rightarrow$б): тривиально.

б)$\Rightarrow$а): Поскольку фильтр $\mathscr{F}$ сходится к точке x, он содержит все окрестности x. То, что он содержит также и множество A, означает, что пересечение A с любой окрестностью x непусто (в силу свойства 1), т.е. x является точкой прикосновения множества A. $\square$

Отображения направленностей и фильтров

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, A — любое направленное вверх множество и $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ — любая направленность в множестве X, т.е. любое отображение $\varphi\colon A \to X$, где $\varphi(\alpha) = x_\alpha$ для $\alpha \in A$. Направленность $f \circ \varphi\colon A \to Y$, т.е. $(f(x_\alpha))_{\alpha\in A}$, называется образом направленности φ при отображении f.

Определение

Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение и $\mathscr{F}$ — любой фильтр на X. Семейство множеств

$$\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathscr{F}\} = \{A \subset Y : \exists F \in \mathscr{F}(f(F) \subset A)\}$$

называется образом фильтра $\mathscr{F}$ при отображении f.

Предложение

Образ любого фильтра при любом отображении является фильтром. Образ любого ультрафильтра при любом отображении является ультрафильтром.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — любое отображение, и пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на X. То, что образ $\mathscr{F}$ при отображении f является фильтром, ясно: выполнение условий 1 и 3 из определения фильтра очевидно, а выполнение условия 2 вытекает из того, что $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ для любых множеств $A, B \subset Y$. Если при этом $\mathscr{F}$ является ультрафильтром, то из основного свойства ультрафильтров и очевидного равенства $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus (f^{-1}(A))$ следует, что образ $\mathscr{F}$ тоже является ультрафильтром. □

Непрерывные отображения и гомеоморфизмы

Сначала рассмотрим непрерывность отображений метрических пространств.

Определение

Отображение f метрического пространства (X, d) в метрическое пространство (Y, ρ) называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $x \in B_d(x_0, \delta)$ имеем $f(x) \in B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$.
Отображение $f: X \to Y$ метрических пространств непрерывно, если оно непрерывно во всех точках пространства X.

Теорема

Для любого метрического пространства (X, d) и любого непустого множества $A \subset X$ функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая правилом $f(x) = d(x, A)$, $x \in X$, непрерывна.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y) \qquad \text{для всех } x, y \in X; \tag{$\star$}$$

тогда в качестве δ из определения непрерывности можно будет взять ε.

Напомним, что $d(x, A) = \inf\{d(x, z) : z \in A\}$. Для любой точки $z \in A$ имеем $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$. Переходя к инфимуму по $z \in A$, получаем $d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A)$. Меняя местами x и y, видим, что $d(y, A) \leqslant d(x, y) + d(x, A)$. Таким образом,

$$d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y) \qquad \text{и} \qquad d(y, A) - d(x, A) \leqslant d(x, y),$$

откуда вытекает неравенство $(\star)$, а с ним и теорема. $\square$

Предложение

Отображение $f : X \to Y$ метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(U)$ всякого множества $U \subset Y$, открытого в Y, открыт в X.

Доказательство

Необходимость. Надо показать, что множество $f^{-1}(U)$ открыто, т.е. что каждая точка $x_0 \in f^{-1}(U)$ содержится в $f^{-1}(U)$ вместе со своей окрестностью. Пусть $x_0 \in f^{-1}(U)$. Множество U открыто в Y и $f(x_0) \in U \implies \exists \varepsilon > 0$, для которого $B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subset U$. Отображение f непрерывно в точке $x_0 \implies \exists \delta > 0$, для которого $f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_\rho(f(x_0), \varepsilon) \subset U$, т.е. $B_d(x_0, \delta) \subset f^{-1}(U)$, что и требовалось.

Достаточность. Для любой точки $x_0 \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ множество $B_\rho(f(x_0), \varepsilon)$ открыто в Y. Значит, $f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon))$ открыто в X. Поскольку точка x_0 принадлежит множеству $f^{-1}(B_\rho(f(x_0), \varepsilon))$, некоторая её окрестность $B_d(x_0, \delta)$ содержится в этом множестве $\implies f$ непрерывно в x_0. Из произвольности выбора x_0 следует непрерывность f. $\square$

Определение

Отображение $f : X \to Y$ топологических пространств называется непрерывным, если прообраз при этом отображении любого множества, открытого в Y, открыт в X.

Отображение f непрерывно в точке $x_0 \in X$, если прообраз любой окрестности точки $f(x_0)$ в пространстве Y является окрестностью точки x_0 в пространстве X, т.е. содержит открытую окрестность точки x_0.

Если для топологических пространств X и Y существует непрерывная сюръекция $f : X \to Y$, то говорят, что Y является непрерывным образом пространства X.

Из доказанного выше предложения видно, что отображение метрических пространств непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно как отображение топологических пространств относительно порождённых метриками топологий.