Типы точек по отношению к множеству

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $A \subset X$. Точка x называется точкой прикосновения множества A, если всякая её окрестность пересекает A. Точка x называется предельной точкой множества A, если всякая её окрестность пересекает $A \setminus \{x\}$. Точка $x \in A$ изолирована в A, если у неё есть окрестность, пересечение которой с A есть $\{x\}$. Если некоторая окрестность точки x целиком содержится в A, то x называется внутренней точкой множества A. Предельные точки множества A, не являющиеся внутренними, называются граничными точками A. Точка $x \in X$ называется точкой накопления множества A, если пересечение всякой её окрестности с A бесконечно.

Для топологических пространств, в которых все одноточечные множества замкнуты, понятия точки накопления и предельной точки совпадают, поэтому в теории метрических пространств термин «точка накопления» не используется.

Определение

Множество всех точек прикосновения множества A в топологическом пространстве X называется замыканием множества A и обозначается через $\overline{A}$ (встречаются также обозначения $\mathrm{cl}(A)$, $[A]$ и др.). Если нужно указать, в каком пространстве берётся замыкание, используется обозначение $\overline{A}^X$ ($\mathrm{cl}_X(A)$, $[A]_X$ и др.).

Множество всех предельных точек множества A в пространстве X называется производным множеством множества A и обозначается A' или A^{d}.

Множество всех внутренних точек множества A в пространстве X называется внутренностью множества A и обозначается $\operatorname{Int} A$. Если нужно указать, в каком пространстве берётся внутренность, используется обозначение $\operatorname{Int}_X A$.

Множество всех граничных точек множества A в пространстве X называется границей множества A и обозначается $\operatorname{Fr} A$ или $\operatorname{Bd} A$. Если нужно указать, в каком пространстве берётся граница, используется обозначение $\operatorname{Fr}_X A$ или $\operatorname{Bd}_X A$.

Все точки любого множества $A \subset X$ являются точками прикосновения этого множества, и любая точка прикосновения является либо предельной, либо изолированной, причём все изолированные точки принадлежат A. Следовательно, $\overline{A} = A \cup A'$. Кроме того, по определению $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

Положив $A = X$, мы получим определение перечисленных выше типов точек в само́м топологическом пространстве X, а не по отношению к некоторому его подмножеству. Однако при этом некоторые типы становятся тривиальными. Так, все точки любого пространства X являются точками прикосновения X, и все они внутренние, так что $\overline{X}^X = \operatorname{Int}_X X = X$, а множество граничных точек всегда пусто. Однако понятия изолированных и предельных точек (а также точек накопления) топологического пространства вполне осмыслены и полезны.

Оператор замыкания

Операция замыкания в топологическом пространстве X сопоставляет каждому множеству $A \in \mathscr{P}(X)$ множество $\overline{A} \in \mathscr{P}(X)$, причём это соответствие удовлетворяет таким условиям:

1. $A \subset \overline{A}$ (экстенсивность);
2. $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$ (монотонность);
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ (идемпотентность).

Любое отображение $\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(X)$ с этими свойствами называется оператором замыкания на X. Примеры: операции взятия линейной или выпуклой оболочки множества в векторном пространстве, операция порождения подгруппы множеством в произвольной группе. Оператор замыкания в топологическом пространстве обладает ещё и свойством

4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

(из которого вытекает монотонность). Такие операторы замыкания называются операторами топологического замыкания.

Теорема

Множество A в топологическом пространстве замкнуто тогда и только тогда, когда $A = \overline{A}$, другими словами, тогда и только тогда, когда A содержит все свои предельные точки.

Доказательство. Если A замкнуто, то $X \setminus A$ открыто, так что у любой точки $x \notin A$ есть окрестность $X \setminus A$, не пересекающая A.
Обратно, если A не замкнуто, то $X \setminus A$ не открыто; значит, у некоторой точки $x \notin A$ нет окрестности, целиком лежащей в $X \setminus A$, а это означает, что любая окрестность x пересекает A, т.е. x — предельная точка множества A. $\square$

Следствие

Замыкание $\overline{A}$ множества A — это наименьшее замкнутое множество, содержащее A, т.е. пересечение всех содержащих A замкнутых множеств.

Оператор внутренности

На всяком топологическом пространстве определён оператор, двойственный оператору замыкания — это оператор внутренности Int, который каждому множеству ставит в соответствие его внутренность; как и оператор замыкания, он идемпотентен и монотонен, однако экстенсивность заменяется двойственным свойством:

1. $\operatorname{Int} A \subset A$;
2. $A \subset B \implies \operatorname{Int} A \subset \operatorname{Int} B$;
3. $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A$.

Дополнительное свойство оператора топологического замыкания тоже заменяется двойственным свойством:

4. $\operatorname{Int} A \cap B = \operatorname{Int} A \cap \operatorname{Int} B$.

Теорема

Множество A в топологическом пространстве открыто тогда и только тогда, когда $A = \operatorname{Int} A$, другими словами, тогда и только тогда, когда все точки A внутренние.

Следствие

Внутренность $\operatorname{Int} A$ множества A — это наибольшее открытое множество, содержащееся в A, т.е. объединение всех содержащихся в A открытых множеств.

Двойственность между операторами внутренности и замыкания: Для $A \subset X$
$$\operatorname{Int} A = X \setminus \overline{X \setminus A}.$$
Действительно, для любого $A \subset X$ множество $X \setminus \operatorname{Int} A$ замкнуто и содержит $X \setminus A$, поэтому $X \setminus \operatorname{Int} A \supset \overline{X \setminus A}$, т.е. $\operatorname{Int} A \subset X \setminus \overline{X \setminus A}$. С другой стороны, множество $X \setminus \overline{X \setminus A}$ открыто и содержится в $A = X \setminus (X \setminus A)$, поэтому $\operatorname{Int} A \supset \overline{X \setminus A}$.

Замыкание и внутренность в подпространствах: Для $A \subset Y \subset X$
$$\overline{A}^{Y} = \overline{A}^{X} \cap Y, \quad \operatorname{Int}_Y A = Y \cap \operatorname{Int}_X (X \setminus Y \cup A).$$

Плотные множества

Определение

Пусть X — топологическое пространство и $Y \subset X$. Множество $A \subset Y$ плотно в Y, если $\overline{A} \supset Y$. Множество, плотное во всём пространстве X, называется просто плотным, или всюду плотным. Множество $Y \subset X$ нигде не плотно, если его замыкание $\overline{Y}$ не содержит никакого непустого открытого множества.

- если Y плотно в X и $Y \subset Z \subset X$, то Z тоже плотно в X;
- если Y нигде не плотно и $Z \subset Y$, то Z тоже нигде не плотно;
- если $Y \subset X$ плотно в X, а Z нигде не плотно, то $Y \backslash Z$ плотно в X;
- если $Z \subset Y \subset X$, Z плотно в Y и Y плотно в X, то Z плотно в X.

Множество $Y \subset X$ нигде не плотно в $X \iff X \setminus Y$ содержит *открытое* плотное множество.

Предложение

Если X — пространство, U — открытое подмножество X и Y — плотное подмножество X, то
$$\overline{U} = \overline{U \cap Y}.$$

Доказательство. Если x — предельная точка множества U, то для любой открытой окрестности V точки x имеем $V \cap U \neq \varnothing$.
Поскольку Y плотно в X, имеем также $V \cap U \cap Y \neq \varnothing$.
Значит, x является предельной точкой множества $U \cap Y$, откуда $\overline{U} \subset \overline{U \cap Y}$.
Обратное включение в доказательстве не нуждается. $\square$

Сепарабельность

Определение

Наименьшая мощность плотного подмножества топологического пространства X называется плотностью этого пространства и обозначается $d(X)$:

$$d(X) = \min\{|A| : A \subset X, \overline{A} = X\}.$$

Если плотность пространства X не более чем счётна, т.е. X содержит какое-нибудь не более чем счётное плотное подмножество, то говорят, что X сепарабельно.

В отличие от метризуемости и свойства удовлетворять первой или второй аксиоме счётности сепарабельность — ненаследственное свойство. Однако открытыми подпространствами она наследуется.

Теорема

Всякое сепарабельное метризуемое пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Доказательство. Пусть X — пространство, топология которого порождается метрикой d, и пусть Y — плотное множество в X. Тогда семейство

$$\mathscr{B} = \left\{B_d\left(y, \frac{1}{n}\right) : y \in Y,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

— база топологии X. Действительно, если U — открытое множество в X и $x \in U$, то $B_d(x, \varepsilon) \subset U$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и для любого натурального $n \geqslant \frac{2}{\varepsilon}$ имеем $B_d(x, \frac{1}{n}) \subset U$. Выберем любую точку $y \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \cap Y$ (она существует, так как Y плотно в X). В силу неравенства треугольника $x \in B_d(x, \frac{1}{2n}) \subset B_d(y, \frac{1}{n}) \subset U$.

Мы показали, что $\mathscr{B}$ — база топологии X. Осталось заметить, что если множество Y счётно, то семейство $\mathscr{B}$ тоже счётно. $\square$

Теорема

Любое пространство со второй аксиомой счётности сепарабельно.

Доказательство. Достаточно взять любую не более чем счётную базу и выбрать по точке в каждом её непустом элементе. Множество всех выбранных точек плотно и не более чем счётно. □

Следствие

Любое сепарабельное метризуемое пространство наследственно сепарабельно.

Доказательство. Свойство удовлетворять второй аксиоме счётности наследственно. □

Свойство Суслина

Определение

Говорят, что семейство множеств **дизъюнктно**, если его элементы попарно не пересекаются.

Супремум мощностей дизъюнктных семейств непустых открытых подмножеств топологического пространства $(X, \mathscr{T})$ называется **числом Суслина**, или **клеточностью**, этого пространства и обозначается $c(X)$:

$$c(X) = \sup\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \subset \mathscr{T} \setminus \{\varnothing\},\ \mathscr{U} \text{ дизъюнктно}\}.$$

Если число Суслина пространства X не более чем счётно, т.е. каждое семейство непустых попарно непересекающихся открытых множеств в X не более чем счётно, то говорят, что X обладает **свойством Суслина**.

Свойство Суслина наследуется открытыми и плотными подпространствами.

Предложение

Всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина.

Доказательство. Действительно, если в пространстве X есть счётное плотное подмножество Y, то каждое непустое открытое множество в X содержит хотя бы одну точку из Y, а если такие множества не пересекаются, то они содержат различные точки из Y. Поэтому дизъюнктное семейство непустых открытых множеств не может быть несчётным — не хватит точек множества Y. $\square$

Теорема

Всякое метризуемое пространство со свойством Суслина удовлетворяет второй аксиоме счётности.

Доказательство. Достаточно доказать, что всякое метризуемое пространство со свойством Суслина сепарабельно. Пусть X — метризуемое пространство, топология которого порождена метрикой d. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим максимальное дизъюнктное семейство $\mathscr{B}_n$ шаров радиуса $\frac{1}{n}$. Оно существует в силу леммы Цорна (применённой к упорядоченному по включению множеству дизъюнктных семейств шаров радиуса $\frac{1}{n}$). Благодаря свойству Суслина каждое $\mathscr{B}_n$ счётно. Выберем по точке в каждом шаре из каждого семейства и обозначим полученное множество точек Y.

Пусть U — любое непустое открытое множество в X. Оно содержит шар $B_d(x, \frac{1}{n})$ для некоторых $x \in X$ и $n \in \mathbb{N}$. Шар $B_d(x, \frac{1}{3n})$ пересекается с каким-то шаром B из семейства $\mathscr{B}_{3n}$ (иначе это семейство не было бы максимальным).

В силу неравенства треугольника $B \subset B_d(x, \frac{1}{n})$. Значит, множество U содержит шар B вместе с выбранной в нём точкой из Y. □

Сходимость

Последовательности

Определение

Последовательностью элементов множества X, или просто последовательностью в X, называется любое отображение $f : \mathbb{N} \to X$. Точка $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, называется n-м членом, или n-м элементом, последовательности f. Обычно последовательность записывается в виде $(x_1, x_2, \dots)$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ или просто (x_n); при этом подразумевается, что $x_n = f(n)$. Множество $f(\mathbb{N}) \subset X$ называется множеством значений последовательности.

Последовательность тривиальна, если все её члены начиная с некоторого равны. Если последовательность тривиальна, то множество её значений конечно, но не наоборот.

Подпоследовательность последовательности $f : \mathbb{N} \to X$ — это последовательность вида $f \circ g : \mathbb{N} \to X$, где $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — любая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Подпоследовательности обычно записываются в виде $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$; при этом подразумевается, что $k_n = g(n)$.

Определение

Последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек топологического пространства X **сходится** к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $x_n \in U$ для всех $n \geqslant N$ (иными словами, все члены последовательности, начиная с некоторого, принадлежат U). В этом случае говорят, что точка x является **пределом** последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и пишут $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ или $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. В тех случаях, когда последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ заведомо не может иметь больше одного предела, вместо $x \in \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ пишут $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Последовательность называется **сходящейся**, если она сходится к некоторой точке.

Точкой накопления, или **предельной точкой**, последовательности называется точка, любая окрестность которой содержит бесконечно много членов последовательности (эти члены могут совпадать!).

Предельная точка (= точка накопления) последовательности может не быть таковой для множества значений этой последовательности (если множество значений конечно), а предельная точка множества значений не обязана быть предельной точкой последовательности.

В метрическом пространстве X всякая предельная точка любого множества $A \subset X$ является пределом некоторой последовательности точек множества A. Топологические пространства с этим свойством называются пространствами Фреше–Урысона.

Теорема

Пусть X — топологическое пространство с первой аксиомой счётности и $A \subset X$. Тогда $x \in X$ является точкой прикосновения множества A, если и только если к ней сходится некоторая последовательность точек A.

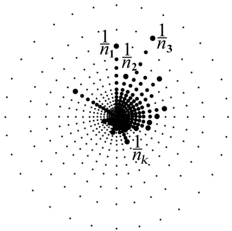
Доказательство. Пусть $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счётная база окрестностей точки x. Положив $V_n = \bigcap_{i \leqslant n} U_i$ для $n \in \mathbb{N}$, получим убывающие (не обязательно строго) окрестности $V_1 \supset V_2 \supset \dots$ точки x, которые тоже образуют базу окрестностей x. Если x — предельная точка A, то каждая окрестность V_n содержит некоторую точку $a_n \in A$. Последовательность $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ сходится к x: любая окрестность U точки x содержит некоторую окрестность V_N, а значит, U содержит и все окрестности V_n с $n \geqslant N$, а вместе с ними и все точки a_n с $n \geqslant N$.

Обратное утверждение очевидно. □

Пример: счётный веер Фреше–Урысона

$$V(\aleph_0) = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \times \mathbb{N}$$

Все точки $\left(\frac{1}{n}, k\right)$, где $n, k \in \mathbb{N}$, изолированы, а базу окрестностей общей точки 0 составляют всевозможные множества вида $\{0\} \cup \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right) : n, k \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_k\right\}$, где $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность натуральных чисел.



$V(\aleph_0)$ не удовлетворяет первой аксиоме счётности, но является пространством Фреше–Урысона: каково бы ни было множество $A \subset V(\aleph_0)$, точка $x = \left(\frac{1}{n}, k\right)$ является предельной для $A \iff x \in A$, а точка 0 является предельной для A $\iff \exists k \in \mathbb{N}$, для которого пересечение $A \cap \left\{\left(\frac{1}{n}, k\right) : n \in \mathbb{N}\right\}$ бесконечно.

Пример: одноточечная линделёфикация дискретного пространства

$L(D) = D \cup \{\star\}$, где D — несчётное множество,
$\star$ — единственная неизолированная точка

Окрестности точки $\star$ — всевозможные дополнения до счётных подмножеств множества D

Пространство $L(D)$ недискретно, но в нём нет ни одной нетривиальной сходящейся последовательности.

Направленности

Определение

Множество X вместе с отношением $\leqslant$ на нём, удовлетворяющим условиям

1. $x \leqslant x$ для всех $x \in X$ (рефлексивность),
2. если $x \leqslant y$ и $y \leqslant z$, то $x \leqslant z$ (транзитивность) и
3. для любых $x, y \in X$ существует такой $z \in X$, что $x \leqslant z$ и $y \leqslant z$,

называется направленным (вверх) множеством.

Определение

Направленность в множестве X — это любое отображение $f\colon A \to X$, где A — множество, направленное вверх отношением $\leqslant$. Обычно направленности записываются в виде $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ или просто (x_α) (подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha)$). Направленность $g = (y_\beta)_{\beta\in B}$, где B — множество, направленное вверх отношением $\preccurlyeq$, называется поднаправленностью направленности $f = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$, если существует отображение $\varphi\colon B \to A$ такое, что $y_\beta = x_{\varphi(\beta)}$ для всех $\beta \in B$ (т.е. $g = \varphi \circ f$) и $\forall \alpha_0 \in A \ \exists \beta_0 \in B$ с тем свойством, что $\alpha_0 \leqslant \varphi(\beta)$ при всех $\beta \succcurlyeq \beta_0$.

Определение

Направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в топологическом пространстве X сходится к точке $x \in X$, если для любой окрестности U точки x существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $x_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$. В этом случае говорят, что точка x является пределом направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ и пишут $x \in \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ или $x_\alpha \underset{A}{\to} x$. В тех случаях, когда направленность $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ заведомо не может иметь более одного предела, вместо $x \in \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$ пишут $x = \lim\limits_{\alpha\in A} x_\alpha$. Направленность сходится, или является сходящейся, если она сходится к некоторой точке.

Точка x топологического пространства X называется предельной точкой направленности $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в этом пространстве, если для любой окрестности U точки x и любого $\alpha_0 \in A$ существует $\alpha \in A$ такое, что $\alpha \geqslant \alpha_0$ и $x_\alpha \in U$.

Теорема

Точка x в топологическом пространстве X является точкой прикосновения множества $Y \subset X$ тогда только тогда, когда некоторая направленность в Y сходится к x.

Доказательство

Необходимость. Пусть x — точка прикосновения Y. Очевидно, множество $\mathscr{U}(x)$ всех окрестностей x направлено отношением $\leqslant$, обратным включению ($U \leqslant V$, если $U \supset V$). Пользуясь тем, что x — точка прикосновения множества Y, в каждой окрестности $U \in \mathscr{U}(x)$ выберем точку $y_U \in Y$. По построению $y_U \xrightarrow[\mathscr{U}(x)]{} y$.

Достаточность. Пусть $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ — сходящаяся к x направленность, причём $y_\alpha \in Y$ для всех $\alpha \in A$, и пусть $\leqslant$ — направление на A. По определению предела направленности для любой окрестности U точки x существует $\alpha_0 \in A$ такое, что $y_\alpha \in U$ для всех $\alpha \geqslant \alpha_0$; значит, любая окрестность точки x содержит некоторую точку из Y, а это и есть определение точки прикосновения. □