Топологическое пространство

Определение

Пусть X — множество и каждой точке $x \in X$ поставлено в соответствие семейство $\mathscr{U}(x)$ подмножеств X так, что выполнены следующие условия-аксиомы:

1. любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$ содержит точку x;
2. для любых $U, V \in \mathscr{U}(x)$ найдётся $W \in \mathscr{U}(x)$ такое, что $W \subset U \cap V$;
3. для любого множества $U \in \mathscr{U}(x)$ и любой точки $y \in U$ найдётся $V \in \mathscr{U}(y)$ такое, что $V \subset U$.

Семейство $\{\mathscr{U}(x)\}_{x \in X}$ называется системой открытых окрестностей. Множество X вместе с заданной на нём системой открытых окрестностей называется топологическим пространством; точками топологического пространства считаются точки множества X.

Подмножество U топологического пространства X называется открытым, если для любой точки $x \in U$ существует $V \in \mathscr{U}(x)$ такое, что $V \subset U$. Множество $F \subset X$ замкнуто, если $X \setminus F$ открыто. Любое открытое множество U, содержащее точку $x \in X$, называется открытой окрестностью этой точки.

Условие 3 в этом определении равносильно тому, что любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$, $x \in X$, открыто, а условия 1 и 3 вместе — тому, что любое множество $U \in \mathscr{U}(x)$ является открытой окрестностью точки x.

Определение топологического пространства

Топологическое пространство — это множество X вместе с семейством $\mathscr{T}$ его подмножеств, удовлетворяющим следующим условиям-аксиомам:

1. $\varnothing \in \mathscr{T}$, $X \in \mathscr{T}$;
2. если $\mathscr{U} \subset \mathscr{T}$, то $\bigcup \mathscr{U} \in \mathscr{T}$ (иными словами, если A — произвольное индексное множество и для всякого $\alpha \in A$ $U_\alpha \in \mathscr{T}$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathscr{T}$);
3. если $U, V \in \mathscr{T}$, то $U \cap V \in \mathscr{T}$.

Семейство $\mathscr{T}$ называется топологией на множестве X, его элементы — открытыми множествами, а их дополнения — замкнутыми множествами. Множества, являющиеся одновременно и открытыми, и замкнутыми, называются открыто-замкнутыми.

Для топологического пространства (множества X с топологией $\mathscr{T}$) используется обозначение $(X, \mathscr{T})$ или X; его точками считаются элементы множества X.

Множество $U \subset X$ называется открытой окрестностью точки $x \in X$, если $U \ni x$ и $U \in \mathscr{T}$. Любое подмножество X, содержащее открытую окрестность точки x, называется окрестностью точки x, а любое подмножество вида $N \setminus \{x\}$, где N — окрестность точки x, называется проколотой окрестностью x.

Окрестности определены и для подмножеств X: открытой окрестностью множества $A \subset X$ называется любое открытое подмножество X, содержащее A, а окрестностью множества A называется любое подмножество X, содержащее некоторую открытую окрестность множества A.

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ называется базой топологии $\mathscr{T}$, или базой топологического пространства X, если любое открытое множество U в X является объединением элементов $\mathscr{B}$.

Очевидно, семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ является базой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X тогда и только тогда когда для каждой точки $x \in X$ и любой её окрестности U найдётся $V \in \mathscr{B}$, удовлетворяющее условиям $x \in V \subset U$.

Предложение

Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X является базой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда

1. $\bigcup \mathscr{B} = X$ *и*
2. *для любых $U, V \in \mathscr{B}$ и любой точки $x \in U \cap V$ найдётся $W \in \mathscr{B}$ со свойством $x \in W \subset U \cap V$, т.е. пересечение любых двух элементов $\mathscr{B}$ является объединением некоторого семейства элементов $\mathscr{B}$.*

Определение

Пусть $(X, \mathscr{T})$ — топологическое пространство. Семейство $\mathscr{B} \subset \mathscr{T}$ называется **предбазой топологии** $\mathscr{T}$, или **предбазой топологического пространства** X, если семейство всех конечных пересечений элементов $\mathscr{B}$ является базой топологии $\mathscr{T}$.

Предложение

Семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества X является предбазой некоторой топологии на X тогда и только тогда, когда $\bigcup \mathscr{B} = X$.

Определение

Семейство $\mathscr{B}(x)$ (открытых) окрестностей точки x топологического пространства $(X, \mathscr{T})$ называется (открытой) локальной базой топологии $\mathscr{T}$ в точке x, или базой (открытых) окрестностей точки x в пространстве $(X, \mathscr{T})$, если любая окрестность точки x содержит окрестность из $\mathscr{B}(x)$.

Всякая предбаза топологии $\mathscr{T}$ на множестве X однозначно определяет некоторую базу той же топологии, а значит, и саму топологию. Семейство локальных баз топологии во всех точках $x \in X$ образует систему окрестностей и тоже однозначно определяет топологию. Однако одна и та же топология может иметь (и почти всегда имеет) много разных баз и локальных баз. Если семейство $\mathscr{B}$ является базой некоторой топологии $\mathscr{T}$ на множестве X, то любое семейство $\mathscr{B}' \supset \mathscr{B}$, $\mathscr{B}' \subset \mathscr{T}$, тоже является базой $\mathscr{T}$.

Определение

Наименьшая мощность локальной базы топологии топологического пространства X в точке $x \in X$ называется характером X в точке x и обозначается $\chi(x, X)$:

$$\chi(x, X) = \min\{|\mathscr{B}(x)| : \mathscr{B}(x) \text{ — локальная база топологии } X \text{ в точке } x\}.$$

Супремум кардиналов $\chi(x, X)$ по всем точкам $x \in X$ называется характером пространства X и обозначается $\chi(X)$:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

Если характер пространства X не более чем счётен, т.е. X имеет не более чем счётную локальную базу в каждой точке, то говорят, что X удовлетворяет первой аксиоме счётности.

Определение

Наименьшая мощность базы топологии топологического пространства X называется **весом** этого пространства и обозначается $w(X)$:

$$w(X) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \text{ — база топологии } X\}.$$

Если вес пространства X не более чем счётен, то говорят, что X удовлетворяет **второй аксиоме счётности**.

Для любого топологического пространства X имеет место неравенство

$$\chi(X) \leqslant w(X),$$

поскольку любая база любой топологии на множестве X содержит открытую локальную базу той же топологии в каждой точке $x \in X$.

Определение

Пусть X — метрическое пространство. Семейство $\mathscr{B} = \{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$, где $\mathscr{B}(x) = \{B_d(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ — множество всех ε-окрестностей точки x метрического пространства (X, d), образует систему открытых окрестностей, а значит, порождает некоторую топологию $\mathscr{T}_d$, называемую метрической топологией. Семейство $\mathscr{B} = \bigcup\limits_{x \in X} \mathscr{B}(x)$ является базой этой топологии.

Если (X, d) — любое метрическое пространство и $\mathscr{T}_d$ — топология, порождённая метрикой d, то характер пространства $(X, \mathscr{T}_d)$ всегда не более чем счётен: любая окрестность любой точки $x \in X$ содержит $\frac{1}{n}$-окрестность x для некоторого n; значит, семейство $\frac{1}{n}$-окрестностей x для всех $n \in \mathbb{N}$ образует локальную базу топологии $\mathscr{T}_d$ в точке x, а это семейство не более чем счётно.

Разные метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X могут порождать одну и ту же топологию $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$ на X.

Определение

Две метрики d_1 и d_2 на одном и том же множестве X эквивалентны, если они порождают одну и ту же метрическую топологию, т.е. если $\mathscr{T}_{d_1} = \mathscr{T}_{d_2}$.

Примеры метрических пространств

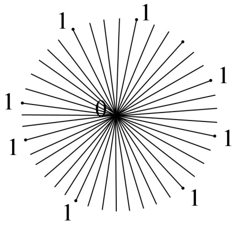
- Произвольное множество X с дискретной метрикой $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$, которая определяется так:
$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y, \\ 1, & \text{если } x \neq y, \end{cases} \qquad x, y \in X.$$
Эта метрика порождает дискретную топологию $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$, в которой все подмножества X открыты (и замкнуты).
- Вещественная прямая $\mathbb{R}$ с обычной метрикой $d\colon (x,y) \mapsto |x-y|$.
- На любом нормированном векторном пространстве V с нормой $\|\cdot\|$ стандартным образом определяется метрика $d(x,y) = \|x-y\|$. Таким образом, на векторном пространстве со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ возникает метрика $d(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$ — она порождена нормой $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

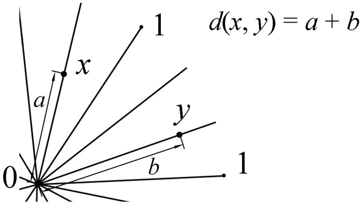
В частности, стандартное скалярное произведение на евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, определённое правилом $(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ для $\mathrm{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $\mathrm{y} = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$, задаёт евклидову норму $|\mathrm{x}|_n = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} x_i^2}$ и евклидову метрику $d_n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \sqrt{\sum_{i \leqslant n} (x_i - y_i)^2}$. Топологию, порождённую этой метрикой на $\mathbb{R}^n$, мы будем называть евклидовой топологией.

- Гильбертово пространство числовых последовательностей
$$\ell^2 = \Big\{ \mathrm{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n^2 < \infty \Big\}$$
со скалярным произведением $(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n \cdot y_n$ и нормой $\|\mathrm{x}\|_2 = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{x_n^2}$.
Пространство ℓ^2 входит в серию нормированных пространств
$$\ell^p = \Big\{ \mathrm{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \Big\}, \quad \|\mathrm{x}\|_p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[p]{|x_n|^p},$$
где $p \in \mathbb{N}$; сюда же относится пространство ℓ^∞ всех ограниченных числовых последовательностей с нормой $\|\mathrm{x}\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$.

- Поле $\mathbb{Q}$ рациональных чисел с p-адической нормой, которая определяется так: Пусть p — простое число. Любое не равное нулю рациональное число r можно представить в виде $p^n \frac{a}{b}$, где n, a и b — целые числа, причём a и b не делятся на p. Положим $|r|_p = p^{-n}$ и $|0|_p = 0$. Так определённая функция $|\cdot|_p$ является нормированием поля $\mathbb{Q}$, и она удовлетворяет условию $|r+s|_p \leqslant \max\{|r|_p, |s|_p\}$, а значит, порождённая ею метрика d_p удовлетворяет сильному неравенству треугольника
$$d_p(x,z) \leqslant \max\{d_p(x,y), d_p(y,z)\} \qquad \text{для любых} \quad x,y,z \in \mathbb{Q}.$$
Метрики с этим свойством называются неархимедовыми метриками, или ультраметриками.

- Метрический ёж $J(\kappa)$ колючести κ (где κ — любой кардинал) — это объединение κ копий единичного отрезка (иголок) с общим началом 0. Формально: $J(\kappa) = \{0\} \cup (0,1] \times \kappa$. Расстояние между точками x и y определяется как обычное расстояние $|x-y|$ между точками единичного отрезка, если x и y принадлежат одной иголке, и как сумма расстояний от этих точек до 0, если они принадлежат разным иголкам.





Формальное определение: $d(0,0) = 0$, $d(0,(x,\alpha)) = x$,

$$d((x,\alpha),(y,\beta)) = \begin{cases} |x-y|, & \alpha = \beta, \\ x+y, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

для любых $x, y \in (0,1]$ и $\alpha, \beta \in \kappa$.

Новые метрики можно строить из уже имеющихся. Если $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ — метрика на множестве X, то для любого $\lambda > 0$ отображения $\lambda \cdot d\colon (x, y) \mapsto \lambda \cdot d(x, y)$ и $\min(d, \boldsymbol{\lambda})\colon (x, y) \mapsto \min\{d(x, y), \lambda\}$ (здесь $\boldsymbol{\lambda}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, тождественно равная λ) тоже являются метриками на X, и они порождают ту же топологию. Вообще, если $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неубывающая функция такая, что $f(0) = 0$ и $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$, то $f \circ d\colon (x, y) \to f(d(x, y))$ — метрика, эквивалентная d. Кроме того, сумма

$$d_1 + d_2\colon (x, y) \mapsto d_1(x, y) + d_2(x, y)$$

и максимум

$$\max(d_1, d_2)\colon (x, y) \mapsto \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$$

любых двух метрик d_1 и d_2 на одном и том же множестве тоже являются метриками.

Примеры топологических пространств

Определение

Топологическое пространство метризуемо, если его топология метризуема, т.е. является метрической топологией, порождённой некоторой метрикой.

Предложение

Всякое метризуемое топологическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счётности.

- На пустом или одноточечном множестве X существует ровно одна топология $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$, но на всяком непустом неодноточечном X есть по меньшей мере две разные топологии: $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ и $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$. Топология $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$ называется антидискретной, и она никогда не метризуема для непустых неодноточечных X. Топология $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$ называется дискретной, и она порождена дискретной метрикой.
- Всякий линейный порядок $\leqslant$ на множестве X порождает порядковую, или интервальную, топологию на X; её предбазу составляют все открытые лучи $\{x : x < a\}$ и $\{x : a < x\}$, где $a \in X$, а базу — все открытые интервалы и лучи.

- Плоскость Немыцкого. Как множество это верхняя полуплоскость $L \subset \mathbb{R}^2$ вместе с граничной прямой l, а топология $\mathscr{T}_N$ на ней задаётся такой системой открытых окрестностей: открытая локальная база в каждой точке $x \notin l$ состоит из всех содержащихся в $L \setminus l$ открытых окрестностей точки x в евклидовой топологии плоскости $\mathbb{R}^2$, а локальная база в каждой точке $x \in l$ образована всеми множествами вида $D_x \cup \{x\}$, где D_x — расположенный в верхней полуплоскости открытый круг, граница которого касается l в точке x.