Теорема Цермело и лемма Цорна

Теорема Цермело

Любое множество можно вполне упорядочить.

Лемма Цорна

Пусть $(X, \leqslant)$ *— частично упорядоченное множество с тем свойством, что у любого подмножества* $Y \subset X$*, на котором индуцированный порядок оказывается линейным, имеется верхняя грань. Тогда в* X *есть максимальный элемент.*

Трансфинитная индукция и рекурсия

Понятие вполне упорядоченного множества и теорема Цермело позволяют распространить метод математической индукции на произвольные множества. Пусть X — любое непустое множество и $\varphi(x)$ — любое высказывание об элементах X. Предположим, что нам удалось ввести полный порядок $\leqslant$ на X так, что мы умеем доказывать $\varphi(x_0)$ для наименьшего элемента x_0 и умеем выводить утверждение $\varphi(x)$ из утверждения «$\varphi(y)$ верно для всех $y < x$». Тогда мы смело можем утверждать, что утверждение $\varphi(x)$ верно для всех $x \in X$. Действительно, если это не так, т.е. если множество $\{x \in X : \varphi(x) \text{ неверно}\}$ непусто, то мы можем взять наименьший элемент в этом множестве и сразу получить противоречие.

Теорема об изоморфизме

Пусть $(X, \leqslant)$ *и* $(Y, \preccurlyeq)$ *— любые вполне упорядоченные множества. Тогда либо существует* $x_* \in X$ *такой, что начальный интервал* $\{x \in X : x < x_*\}$ *множества* X *порядково изоморфен вполне упорядоченному множеству* Y*, либо существует* $y_* \in Y$ *такой, что вполне упорядоченное множество* X *порядково изоморфно начальному интервалу* $\{y \in Y : y \prec y_*\}$ *множества* Y*, либо сами множества* $(X, \leqslant)$ *и* $(Y, \preccurlyeq)$ *порядково изоморфны.*

Отношения эквивалентности

Отношение эквивалентности на множестве X — это подмножество $\sim$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами:

- $((x \sim y) \wedge (y \sim z)) \to (x \sim z)$ (транзитивность);
- $\forall x \in X (x \sim x)$ (рефлексивность);
- $(x \sim y) \to (y \sim x)$ (симметричность).

Запись $x \sim y$ читается «элемент x эквивалентен элементу y» или «элемент x $\sim$-эквивалентен элементу y».

Для каждого элемента $x \in X$ множество $\{y \in X : y \sim x\}$ называется классом эквивалентности элемента x и обозначается $[x]$ или $[x]_\sim$. Множество Y классов эквивалентности состоит из непересекающихся подмножеств множества X, и $\bigcup Y = X$, т.е. Y является разбиением множества X. Множество классов эквивалентности называется фактормножеством множества X по отношению $\sim$ и обозначается $X/\sim$.

Для каждого отношения эквивалентности $\sim$ на множестве X правило $x \mapsto [x]$ определяет сюръективное отображение $q\colon X \to X/{\sim}$. Оно называется естественным отображением множества X на фактормножество $X/{\sim}$. С другой стороны, каждая сюръекция $f\colon X \to Y$ порождает отношение эквивалентности $\sim_f$, для которого она является естественным отображением: $x \sim_f y$, если $f(x) = f(y)$; при этом $Y = X/{\sim_f}$.

Таким образом, по сути отношения эквивалентности и сюръективные отображения — взаимозаменяемые понятия, и выбор языка эквивалентностей или отображений — не более чем вопрос удобства и предпочтений.

Операции над множествами

Бинарные операции — это $\cap$ (пересечение), $\cup$ (объединение), $\setminus$ (разность) и $\triangle$ (симметрическая разность $(A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B))$. Унарные операции — переход к подмножеству и (при наличии фиксированного множества U, содержащего все рассматриваемые множества в качестве подмножеств) дополнение — разность между U и данным множеством; дополнение множества A обозначается A^c или $\overline{A}$. Последовательность выполнения операций над множествами задаётся скобками. При отсутствии скобок сначала выполняется операция дополнения, затем операции пересечения и разности, которые имеют одинаковый приоритет, и в последнюю очередь — операции объединения и симметрической разности.

Основные свойства операций

- Операции $\cap$, $\cup$ и $\triangle$ ассоциативны.
- Операции $\cap$, $\cup$ и $\triangle$ коммутативны.
- Операции $\cap$ и $\cup$ дистрибутивны друг относительно друга: для любых множеств A, B и C выполнены соотношения
$$A \cap (B \cup C) = A \cap B \cup A \cap C$$
и
$$A \cup B \cap C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$
- Операция $\cap$ дистрибутивна относительно $\triangle$: для любых множеств A, B и C выполнено равенство
$$(A \triangle B) \cap C = (A \cap C) \triangle (B \cap C).$$
- Для любого множества A $A \cap \varnothing = \varnothing$ и $A \cup \varnothing = A$.
- Дополнение множества A до фиксированного объемлющего множества U обладает свойствами
$$A^{c} \cap A = \varnothing, \quad A^{c} \cup A = U, \quad A^{c} \triangle A = U, \quad (A^{c})^{c} = A,$$
$$\varnothing^{c} = U, \quad U^{c} = \varnothing.$$

Законы де Моргана

Для любых множеств A, B и C

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$$

и

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

Декартово произведение $A \times B$ множеств A и B — это множество упорядоченных пар $\{(a, b) : a \in A,\ b \in B\}$ (эта операция естественным образом обобщается до n-арной операции декартова произведения n множеств).

Возведение в степень: для любых множеств A и B множество A^B («A в степени B») определяется как множество всех отображений из B в A:

$$A^B = \{f : B \to A\}.$$

Это множество пусто только в том случае, когда A пусто, а B непусто.

Всякое подмножество A любого множества X однозначно определяется его характеристической функцией $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, так что множество всех подмножеств множества X естественно отождествляется с множеством 2^X, и для множества всех подмножеств наряду с обозначением $\mathscr{P}(X)$ широко используется обозначение 2^X.

Операции над семействами множеств

Для семейства множеств $\mathscr{F}$ его объединение — это множество всех элементов всех множеств из $\mathscr{F}$, а пересечение — это множество тех x, которые принадлежат каждому множеству из семейства $\mathscr{F}$.

Для объединения семейства множеств $\mathscr{F}$ используются также обозначения $\bigcup\{X : X \in \mathscr{F}\}$ и $\bigcup\limits_{X \in \mathscr{F}} X$. Возможны вариации — например, если семейство задано некоторым свойством φ, пишут $\bigcup\{X : \varphi(X)\}$. Аналогичные обозначения используются для пересечений.

Пусть заданы множество A, семейство множеств $\mathscr{F}$ и сюръективное отображение $f : A \to \mathscr{F}$. Для $\alpha \in A$ положим $X_\alpha = f(\alpha)$ (множества с разными индексами могут совпадать). Семейство $\mathscr{F}$ вместе с отображением f называется индексированным семейством и обозначается $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$. Множество A называется множеством индексов или индексным множеством, а его элементы — индексами элементов индексированного семейства. Элементами индексированного семейства $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ считаются множества X_α. Если $f(\alpha) = f(\beta)$ для $\alpha \neq \beta$, то X_α и X_β — одно и то же множество, но разные элементы индексированного семейства.

В индексированных семействах индексами снабжены только сами множества из этих семейств, но не их элементы. Поэтому объединения и пересечения индексированных семейств определяются точно так же, как объединения и пересечения соответствующих неиндексированных семейств, и ничем от них не отличаются, зато добавляются наглядные варианты обозначений $\bigcup\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ (то же для пересечений).

Для объединений и пересечений семейств выполнены законы дистрибутивности и де Моргана в сильной форме: для любого множества X и любого индексированного (для удобства) семейства множеств $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$

- $X \cap \bigcup\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(X \cap Y_\alpha)$,
- $X \cup \bigcap\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(X \cup Y_\alpha)$,
- $X \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in A}(X \setminus Y_\alpha)$,
- $X \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in A}(X \setminus Y_\alpha)$.

Декартово произведение семейства множеств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ определяется так:

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = \{f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : \forall \alpha \in A (f(\alpha) \in X_\alpha)\}.$$

Элемент $f : A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ принято записывать не в виде отображения, а в специальном виде $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$, где подразумевается, что $x_\alpha = f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого α. При этом x_α называется α-й координатой элемента $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Канонической проекцией произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ на сомножитель X_β, где $\beta \in A$, называется отображение $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$, определённое естественным правилом $\pi_\beta\big((x_\alpha)_{\alpha \in A}\big) = x_\beta$ для всех $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Когда ясно из контекста, что речь идёт именно о канонических проекциях, мы будем называть их просто проекциями.

Операции над отображениями

Сужение, подотображение, продолжение, обратное отображение ...

- Композиция отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — это отображение $g \circ f\colon X \to Z$, определённое правилом $x \mapsto g(f(x))$.
- Декартовым произведением отображений $f_1\colon X_1 \to Y_1$ и $f_2\colon X_2 \to Y_2$ называется отображение $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, определённое правилом $(x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1), f_2(x_2))$. Более общо, декартово произведение семейства отображений $\{f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha\}$ — это отображение
$$\prod_{\alpha\in A} f_\alpha\colon \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, \qquad (x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A}.$$

- Диагональное произведение, или диагональ, отображений $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Z$, определённых на одном и том же множестве, — это отображение $f \mathbin{\Delta} g\colon X \to Y \times Z$, заданное правилом $x \to (f(x), g(x))$, а диагональ семейства отображений $\{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ — это отображение
$$\mathop{\Delta}_{\alpha\in A} f_\alpha\colon X \to \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha, \qquad x \mapsto (f_\alpha(x))_{\alpha\in A}.$$
Всякое отображение $f\colon X \to \prod Y_\alpha$ является диагональным произведением своих «координат» $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ (каждое f_α переводит точку $x \in X$ в α-ю координату её образа $f(x)$).

Мощность множества

Мощность множества X обозначается $|X|$. Два множества X и Y называются равномощными, если существует биекция между ними; в этом случае говорят ещё, что мощности X и Y равны, и пишут $|X| = |Y|$. В наивной (канторовской) теории множеств мощность $|X|$ множества X понимается как класс всех множеств Y, для которых существует биекция $X \rightleftarrows Y$.

Мощности множеств можно сравнивать: $|X| \leqslant |Y|$, если X равномощно подмножеству Y, т.е. если существует инъекция из X в Y (или, что равносильно, сюръекция из Y на X). Хорошо известная теорема Кантора–Бернштейна гласит, что если $|X| \leqslant |Y|$ и $|Y| \leqslant |X|$, то $|X| = |Y|$.

Кантор называл мощности множеств кардиналами и обозначал бесконечные кардиналы буквой $\aleph$ («алеф», первая буква еврейского алфавита) с индексами; индексы были упорядочены так, что бо́льшим индексам соответствовали бо́льшие кардиналы. Самый маленький алеф — это $\aleph_0$ (мощность множества натуральных чисел). Все множества мощности $\aleph_0$ (т.е. находящиеся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел) называются счётными, а не являющиеся счётными бесконечные множества называются несчётными. Наименьшая мощность несчётного множества обозначается $\aleph_1$, наименьшая мощность, бо́льшая $\aleph_1$, обозначается $\aleph_2$ и т.д.

Чем индексировать кардиналы?

Чтобы ответить на этот вопрос, вдобавок ко взаимно однозначным соответствиям между множествами Кантор рассмотрел порядковые изоморфизмы между вполне упорядоченными множествами. Классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств он назвал порядковыми типами, или ординалами. Теорема об изоморфизме для вполне упорядоченных множеств даёт прекрасный инструмент для сравнения ординалов — достаточно заметить, что никакое вполне упорядоченное множество $(X, \leqslant)$ не изоморфно никакому своему собственному начальному интервалу $\{x \in X : x < x^*\}$, где $x^* \in X$. После этого останется лишь объявить, что порядковый тип вполне упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ меньше порядкового типа вполне упорядоченного множества $(Y, \preccurlyeq)$, если $(X, \leqslant)$ порядково изоморфно начальному интервалу множества $(Y, \preccurlyeq)$. Именно ординалами Кантор и индексировал алефы.

В современной (аксиоматической) теории множеств теория кардиналов и ординалов вполне формализована. Под ординалами понимаются не классы порядково изоморфных вполне упорядоченных множеств, а конкретные вполне упорядоченные множества. В определении ординала фигурирует понятие транзитивности: множество X транзитивно, если каждый элемент X является его подмножеством; иными словами, для каждого $y \in X$ все элементы множества y являются также элементами X. Ординал (другие названия — порядковый тип и порядковое число) — это любое транзитивное множество, строго вполне упорядоченное отношением $\in$. Соответствующий нестрогий порядок обозначается стандартным символом $\leqslant$, а сами ординалы обычно обозначаются первыми буквами греческого алфавита.

Из определения видно, что каждый элемент ординала сам является ординалом: если α — ординал и $\beta \in \alpha$, то β — тоже ординал, причём $\beta = \{\gamma \in \alpha : \gamma < \beta\}$. Иными словами, любой элемент ординала является начальным интервалом этого ординала и наоборот.

Из теоремы об изоморфизме для вполне упорядоченных множеств вытекает, что если α и β — два неизоморфных ординала, то либо один из них изоморфен начальному интервалу (= элементу) другого, либо наоборот. Легко видеть, что в данном случае изоморфизм означает равенство: если α и β — два разных ординала, то либо $\alpha \in \beta$, либо $\beta \in \alpha$. Таким образом, отношение $\in$ (и $\leqslant$) упорядочивает не только сами ординалы, но и позволяет сравнивать любые ординалы друг с другом; допуская некоторую вольность, можно сказать, что это отношение является порядком на классе всех ординалов.
Итак, для любых двух ординалов α и β либо $\alpha \leqslant \beta$, либо $\beta \leqslant \alpha$, причём записи $\alpha < \beta$ и $\alpha \in \beta$ означают ровно одно и тоже, а запись $\alpha \leqslant \beta$ означает, что либо $\alpha \in \beta$, либо $\alpha = \beta$. Кроме того, в силу аксиомы регулярности в любом непустом множестве ординалов имеется наименьший элемент, т.е. класс ординалов строго вполне упорядочен отношением $\in$.

Из теоремы Цермело и того, что всякое вполне упорядоченное множество изоморфно ординалу, следует, что мощность любого множества равна мощности некоторого ординала, а значит, и мощности некоторого ω_α. Отсюда немедленно вытекает сравнимость мощностей любых множеств и существование наименьшего несчётного кардинала $\aleph_1$ (а также и существование всех прочих алефов). В современной теории множеств кардиналы (мощности множеств) определяются как ординалы вида ω_α; другими словами, кардинал — это любой ординал α с тем свойством, что мощность всякого ординала $\beta < \alpha$ меньше мощности α, т.е. никакой ординал $\beta < \alpha$ нельзя сюръективно отобразить на α; можно ещё сказать, что ординал является кардиналом, если он равен своей собственной мощности.

Таким образом, символы ω_α и обозначают одно и то же, и сейчас ω_α используются для обозначения кардиналов даже чаще, чем $\aleph_\alpha$ (хотя использовать $\aleph_\alpha$ для обозначения соответствующих ординалов, когда они рассматриваются именно как ординалы, а не кардиналы, не принято). Итак, кардиналы — это конкретные ординалы, и класс всех кардиналов вполне упорядочен тем же отношением $\leqslant$, что и ординалы. Кардиналы обычно обозначаются буквами из середины греческого алфавита или алефом с индексами.

Кардиналы отличаются от ординалов арифметикой.

Метрические пространства

Определение

Метрикой на множестве X называется функция $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ (аксиома тождества);
2. $d(x, y) = d(y, x)$ для любых $x, y \in X$ (аксиома симметрии);
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ для любых $x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Множество X с метрикой d называется метрическим пространством и обозначается (X, d) или просто X. Точками метрического пространства считаются точки множества X. Значение $d(x, y)$ называется расстоянием между точками x и y в метрике d или в метрическом пространстве (X, d). Расстояние между непустыми множествами $A, B \subset X$ определяется формулой $d(A, B) = \inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$. Вместо $d(\{x\}, A)$ пишут $d(x, A)$.

Из определения метрики вытекает, что $d(x, y) > 0$ для любых различных $x, y \in X$.

Пусть (X, d) — метрическое пространство, $x \in X$ и $\varepsilon > 0$. Множество

$$B_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) < \varepsilon\}$$

называется ε-окрестностью точки x, или открытым шаром радиуса ε с центром в точке x, а множество

$$\overline{B}_d(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(y, x) \leqslant \varepsilon\}$$

— замкнутым шаром радиуса ε с центром в x.

Говорят, что множество $U \subset X$ открыто, если для любого $x \in U$ найдётся такое $\varepsilon > 0$, что $B_d(x, \varepsilon) \subset U$. Всякое множество $F \subset X$, для которого $X \setminus F$ открыто, называется замкнутым.

Иначе, множество U открыто, если вместе с каждой точкой оно содержит некоторую ε-окрестность этой точки, и F замкнуто, если у любой не принадлежащей F точки найдётся ε-окрестность, не пересекающая F.

В силу неравенства треугольника все открытые шары $B_d(x, \varepsilon)$ действительно открыты: если $y \in B_d(x, \varepsilon)$, то $d(y, x) < \varepsilon$, а значит, найдётся $\delta > 0$, для которого $d(y, x) < \varepsilon - \delta$; для любой точки $z \in B_d(y, \delta)$ по неравенству треугольника имеем $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) < \varepsilon - \delta + \delta = \varepsilon$, а это означает, что $B_d(y, \delta) \subset B_d(x, \varepsilon)$. Очевидно также, что все замкнутые шары $\overline{B}_d(x, \varepsilon)$ замкнуты.

Итак, открытые множества — это всевозможные объединения множеств вида $B_d(x, \varepsilon)$ (с разными x и ε). Иными словами, множество $U \subset X$ открыто $\iff$ $U = \bigcup\{B_d(x, \varepsilon_x) : x \in A\}$, где A — любое подмножество X и ε_x, $x \in A$, — любые положительные числа.

Непрерывность отображений метрических пространств, сходимость последовательности в метрическом пространстве и т.п. определяются точно так же, как и в случае числовых функций — например, отображение f непрерывно в точке x, если для любой ε-окрестности U точки $f(x)$ найдётся δ-окрестность V точки x, для которой $f(V) \subset U$.