**Теорема**

*Всякое хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.*

Доказательство. Пусть $X$ — паракомпакт. Сперва покажем, что $X$ регулярно.

Пусть $F \subset X$ замкнуто и $x \in X \setminus F$. В силу хаусдорфовости $X$ у всякой точки $y \in F$ существует открытая окрестность $U_y$ такая, что $x \notin \overline{U_y}$. Семейство $\{X \setminus F\} \cup \{U_y : y \in F\}$ является открытым покрытием пространства $X$. Пусть $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. Положим $V = \bigcup\{V_\alpha : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. В силу консервативности локально конечных семейств имеем $\overline{V} = \bigcup\{\overline{V_\alpha} : V_\alpha \cap F \neq \varnothing\}$. Но всякое $V_\alpha$, пересекающее $F$, содержится в некотором $U_y$, и $x \notin \overline{U_y}$. Значит, из $V_\alpha \cap F \neq \varnothing$ следует, что $x \notin \overline{V}$.

Нормальность доказывается аналогично. Пусть $F$ и $G$ — непересекающиеся замкнутые подпространства пространства $X$. Поскольку $X$ регулярно, у всякой точки $y \in G$ есть открытая окрестность $U_y$, замыкание которой не пересекается с $F$. Рассматривая открытое покрытие $\{X \setminus G\} \cup \{U_y : y \in G\}$, мы так же, как и выше, получаем окрестность $V$ множества $G$, замыкание которой не пересекается с $F$. Открытые множества $X \setminus \overline{V}$ и $V$ не пересекаются и содержат $F$ и $G$ соответственно. □

**Теорема**

*Паракомпактность наследуется замкнутыми подпространствами.*

**Доказательство.** Пусть $X$ — паракомпактное пространство, $Y$ — его замкнутое подпространство и $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства $Y$. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём открытое в $X$ множество $U_\alpha \subset X$ такое, что $U_\alpha \cap Y = V_\alpha$. Семейство $\mathscr{U} = \{X \setminus Y\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ является открытым покрытием пространства $X$. Пусть $\{W_\beta : \beta \in B\}$ — вписанное в него локально конечное покрытие $X$. Тогда $\{W_\beta \cap Y : \beta \in B\}$ — открытое покрытие пространства $Y$, причём, очевидно, оно вписано в $\mathscr{V}$ и локально конечно. □

**Теорема**

1. *Топологическая сумма* $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ *паракомпактна, если и только если все пространства* $X_\alpha$ *паракомпактны.*
2. *Если пространство* $X$ *паракомпактно, а* $K$ *компактно, то произведение* $X \times K$ *паракомпактно.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Рассмотрим открытое покрытие $\mathscr{U}$ произведения $X \times K$. Зафиксируем произвольную точку $x \in X$ и для каждой точки $y \in K$ найдём содержащий точку $(x, y)$ элемент $U$ покрытия $\mathscr{U}$, а также открытые окрестности $V_y$ точки $x$ в $X$ и $W_y$ точки $y \in K$ такие, что $V_y \times W_y \subset U$. Семейство открытых множеств $\{V_y \times W_y : y \in K\}$ покрывает подпространство $\{x\} \times K$ пространства $X \times K$, которое гомеоморфно компактному пространству $K$. Выделим из этого семейства конечное подпокрытие $\{V_{y_1} \times W_{y_1}, \ldots, V_{y_n} \times W_{y_n}\}$. Зафиксируем элементы $U_1, \ldots, U_n$ покрытия $\mathscr{U}$, для которых $V_{y_i} \times W_{y_i} \subset U_i$, $i \leqslant n$. Положим $V_x = V_{y_1} \cap \cdots \cap V_{y_n}$ и $\mathscr{U}_x = \{U_1, \ldots, U_n\}$. Заметим, что $V_x \times K \subset \bigcup \mathscr{U}_x$.

У нас получилось открытое покрытие $\{V_x : x \in X\}$ паракомпактного пространства $X$. Впишем в него локально конечное открытое покрытие $\mathscr{O} = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$. Для каждого $\alpha \in A$ выберем точку $x_\alpha \in X$, для которой $O_\alpha \subset V_{x_\alpha}$, и положим

$$\mathscr{C}_\alpha = \{U \cap (O_\alpha \times K) : U \in \mathscr{U}_{x_\alpha}\}.$$

Семейство $\mathscr{C}_\alpha$ конечно, и оно покрывает множество $O_\alpha \times K$, поскольку $O_\alpha \subset V_{x_\alpha}$ и $V_{x_\alpha} \times K \subset \bigcup \mathscr{U}_{x_\alpha}$. Кроме того, $\mathscr{C}_\alpha$ вписано в подсемейство $\mathscr{U}_{x_\alpha}$ покрытия $\mathscr{U}$ (а значит, и в само покрытие $\mathscr{U}$).

Рассмотрим семейство

$$\mathscr{C} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha.$$

Все его элементы — открытые подмножества пространства $X \times K$, и оно является покрытием этого пространства: для любого $(x, y) \in X \times K$ точка $x$ принадлежит некоторому $O_\alpha$, а множество $O_\alpha \times K$ покрывается семейством $\mathscr{C}_\alpha$. Кроме того, $\mathscr{C}$ вписано в покрытие $\mathscr{U}$, поскольку каждое $\mathscr{C}_\alpha$ вписано в $\mathscr{U}$.

Итак, $\mathscr{C}$ — открытое покрытие пространства $X \times K$, вписанное в $\mathscr{U}$. Покажем, что оно локально конечно. Возьмём любую точку $(x, y) \in X \times K$. Пользуясь локальной конечностью покрытия $\mathscr{O}$, Найдем открытую окрестность $U$ точки $x$ в $X$, которая пересекается лишь с конечным числом элементов $\mathscr{O}$. Пусть это элементы $O_{\alpha_1}, \ldots, O_{\alpha_k}$. Тогда открытая окрестность $U \times K$ точки $(x, y)$ может пересекаться с элементами семейства $\mathscr{C}_\alpha$ лишь для $\alpha$ из конечного множества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$, а значит, и лишь с конечным числом составленного из этих семейств покрытия $\mathscr{C}$ (потому что каждое семейство $\mathscr{C}_\alpha$ конечно). $\square$

Впоследствии мы увидим, что паракомпактность не конечно мультипликативна (пример — прямая Зоргенфрея).

## Определение

Семейство $\{f_\alpha : \alpha \in A\}$ непрерывных функций из топологического пространства $X$ в $[0,1]$ называется разбиением единицы на $X$, если для каждого $x \in X$ значения $f_\alpha(x)$ отличны от нуля лишь для конечного числа индексов $\alpha$ и $\sum\limits_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$.

Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ на $X$ подчинено покрытию $\mathscr{C}$ пространства $X$, если покрытие $\mathscr{F} = \{f_\alpha^{-1}\big((0,1]\big)\}$ вписано в $\mathscr{C}$. Разбиение единицы $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ локально конечно, если покрытие $\mathscr{F}$ локально конечно.

### Предложение

*В любое открытое локально конечное покрытие $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ паракомпакта $X$ можно комбинаторно вписать локально конечное покрытие $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ так, что $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.*

Доказательство. Поскольку $X$ регулярно, мы можем найти у каждой точки $x \in X$ открытую окрестность, замыкание которой содержится в каком-то элементе покрытия $\mathscr{U}$ (которому принадлежит точка $x$), и получить тем самым открытое покрытие $\mathscr{W}$ такое, что покрытие $\{\overline{W} : W \in \mathscr{W}\}$ вписано в $\mathscr{U}$. Возьмём локально конечное открытое покрытие $\{O_\beta : \beta \in B\}$, вписанное в $\mathscr{W}$. Для каждого $\beta \in B$ выберем $\alpha(\beta) \in A$ так, что $\overline{O}_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$. Для $\alpha \in A$ положим $V_\alpha = \bigcup\{O_\beta : \alpha(\beta) = \alpha\}$, если существует $\beta \in \alpha$, для которого $\alpha = \alpha(\beta)$, и $V_\alpha = \varnothing$, если такого $\beta$ не существует. Очевидно, $\mathscr{V} = \{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие пространства $X$. В силу консервативности покрытия $\{O_\beta : \beta \in B\}$ имеем $\overline{V}_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha(\beta)=\alpha} \overline{O}_\beta \subset U_\alpha$. Осталось заметить, что любое семейство, комбинаторно вписанное в локально конечное семейство, и само локально конечно. □

**Теорема**

*Для каждого открытого покрытия паракомпакта найдётся подчинённое ему локально конечное разбиение единицы.*

Доказательство. Пусть $X$ — паракомпакт, $\mathscr{C}$ — открытое покрытие $X$, и $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — вписанное в него локально конечное открытое покрытие. Возьмём замкнутое покрытие $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ такое, что $F_\alpha \subset U_\alpha$ для всех $\alpha \in A$. Лемма Урысона $\implies$ $\forall \alpha \in A$ существует непрерывная функцию $g_\alpha \colon X \to \mathbb{R}$ такая, что $g_\alpha(x) = 0$ при $x \in X \setminus U_\alpha$ и $g_\alpha|_{F_\alpha} \equiv 1$. Полагая $g(x) = \sum\limits_{\alpha \in A} g_\alpha(x)$, мы получим непрерывную функцию $X \to \mathbb{R}$, потому что покрытие $\mathscr{U}$ локально конечно, а значит, у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, в которой $g$ — сумма конечного числа непрерывных функций и потому непрерывна, откуда немедленно вытекает непрерывность $g$ в $x$. Искомое разбиение единицы — это $\left\{\frac{g_\alpha}{g} : \alpha \in A\right\}$. $\square$

**Теорема (Стоун)**

*Всякое метризуемое пространство паракомпактно.*

**Теорема (Майкл)**

*Паракомпактность сохраняется замкнутыми непрерывными отображениями хаусдорфовых пространств.*

Открытыми непрерывными отображениями паракомпактность не сохраняется. Более того, любое топологическое пространство является образом некоторого паракомпакта (и даже наследственно паракомпактного хаусдорфова пространства) при открытом непрерывном отображении.

## Финально компактные и линделёфовы пространства

### Определение

Для топологического пространства $X$ кардинал

$$l(X) = \min\{\text{кардинал } \kappa\colon \text{ любое открытое покрытие } X \\ \text{имеет подпокрытие мощности } \leqslant \kappa\}$$

называется **числом Линделёфа** пространства $X$.

Топологическое пространство $X$, для которого $l(X) \leqslant \aleph_0$, называется **финально компактным**. Регулярные финально компактные пространства называются **линделёфовыми**.

- Пространство финально компактно $\iff$ каждое счётно центрированное семейство замкнутых множеств в нём имеет непустое пересечение.
- Финальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами.
- В финально компактном пространстве любое несчётное множество имеет точку накопления $\implies$ нет несчётных замкнутых дискретных подпространств.
- Финальная компактность сохраняется непрерывными отображениями.

**Теорема**

1. *Топологическая сумма* $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ *непустых пространств финально компактна тогда и только тогда, когда все пространства* $X_\alpha$ *финально компактны и множество* $A$ *не более чем счётно.*
2. *Если* $X$ *финально компактно, а* $K$ *компактно, то* $X \times K$ *финально компактно.*

**Теорема**

*Все линделёфовы пространства паракомпактны.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{U}$ — открытое покрытие линделёфова пространства $X$. Для $x \in X$ зафиксируем $U_x \in \mathscr{U}$, $x \in U_x$, и найдём открытое $V_x \subset X$ такое, что $x \in V_x \subset \overline{V}_x \subset U_x \in \mathscr{U}$. Пусть $\{V_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ — счётное подпокрытие покрытия $\{V_x : x \in X\}$. Очевидно, $\{U_{x_i} : i \in \mathbb{N}\}$ — покрытие $X$. Множества

$$W_1 = U_{x_1} \quad \text{и} \quad W_{i+1} = U_{x_{i+1}} \setminus \left(\overline{V}_{x_1} \cup \cdots \cup \overline{V}_{x_i}\right), \quad i \in \mathbb{N},$$

открыты и покрывают $X$. Покрытие $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ вписано в $\mathscr{U}$ и локально конечно, так как каждая точка $x \in X$ содержится в $V_{x_j}$ для некоторого $j$ и $V_{x_j} \cap W_i = \varnothing$ для $i > j$. $\square$

**Следствие**

*Все линделёфовы пространства нормальны.*

**Теорема**

*В классе метризуемых пространств линделёфовость равносильна второй аксиоме счётности.*

Доказательство повторяет доказательство аналогичной теоремы для компактов.

Для любого метризуемого пространства $X$ $w(X) = d(X) = c(X) = hc(X) = l(X)$.

**Следствие**

*Всякое паракомпактное счётно компактное пространство компактно. Всякое паракомпактное псевдокомпактное пространство компактно.*

Из определения счётной компактности сразу же вытекает, что любое замкнутое подпространство счётно компактного пространства счётно компактно. Для псевдокомпактных пространств это не так (увидим дальше).

Очевидно, сумма непустых топологических пространств счётно компактна (псевдокомпактна) тогда и только тогда, когда число слагаемых конечно и все слагаемые счётно компактны (псевдокомпактны).

Существуют примеры счётно компактных пространств $X$ и $Y$, произведение которых не псевдокомпактно. Таким образом, ни счётная компактность, ни псевдокомпактность не конечно мультипликативна. Однако оба эти свойства выдерживают умножение на компакт; это доказывается стандартным путём.

**Теорема**

*Для метризуемых пространств счётная компактность и псевдокомпактность равносильны компактности.*

Эту теорему можно доказать непосредственно, но проще сослаться на теорему Стоуна (что всякое метризуемое пространство паракомпактно).

## Секвенциально компактные пространства

### Определение

Топологическое пространство $X$ секвенциально компактно, если каждая последовательность точек $X$ содержит сходящуюся подпоследовательность.

Не всякий компакт является секвенциально компактным пространством — примером служит $\beta\mathbb{N}$. Секвенциально компактное пространство не обязано быть компактным (увидим дальше). Однако очевидно, что каждое секвенциально компактное пространство счётно компактно.

Непосредственно из определения вытекает, что секвенциальная компактность наследуется замкнутыми подпространствами.

**Теорема**

1. *Сумма непустых пространств секвенциально компактна тогда и только тогда, когда число слагаемых конечно и все слагаемые секвенциально компактны.*
2. *Секвенциальная компактность счётно мультипликативна.*

**Доказательство.** Первое утверждение очевидно. Докажем второе.

Предположим, что $X_n$, $n \in \mathbb{N}$, — секвенциально компактные пространства и $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$; пусть $\mathrm{x}_i = (x_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ для $i \in \mathbb{N}$.

Последовательность $(x_{1,n})_n$ точек $X_1$ содержит подпоследовательность $(x_{1,k_{1,n}})_n$, сходящуюся к некоторой точке $x_1 \in X_1$. Последовательность $(x_{2,k_{1,n}})_n$ точек $X_2$ содержит подпоследовательность $(x_{2,k_{2,n}})_n$, сходящуюся к $x_2 \in X_2$. ...Для каждого $m \in \mathbb{N}$ последовательность $(x_{m,k_{m,n}})_n$ точек $X_m$ сходится к $x_m \in X_m$, и она является подпоследовательностью последовательностей $(x_{m,n})_n$ и $(x_{m,k_{j,n}})_n$ для всех $j \leqslant m$. Если из последовательности индексов $(k_{n,n})_n$ выкинуть первые $m-1$ членов, то получится подпоследовательность последовательности $(k_{m,n})_n$. Значит, $x_{m,k_{n,n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x_m$ для каждого $m \in \mathbb{N}$. Легко видеть, что точка $\mathrm{x} = (x_n)_n \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ — предел подпоследовательности $(\mathrm{x}_{k_{n,n}})_n$ последовательности $(\mathrm{x}_n)_n$. $\square$

# Компактность в классе метризуемых пространств

## Теорема

*Всякий метризуемый компакт удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

## Лемма

*Если в метризуемом пространстве всякое замкнутое дискретное множество не более чем счётно, то это пространство обладает свойством Суслина.*

Доказательство. Пусть $X$ — пространство, топология которого порождается метрикой $d$, и $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — несчётное дизъюнктное семейство непустых открытых множеств в $X$. Каждое $U_\alpha$ содержит некоторый шар $B_d(x_\alpha, \frac{1}{n_\alpha})$, где $x_\alpha \in X$ и $n_\alpha \in \mathbb{N}$. Поскольку $\mathscr{U}$ несчётно, а $\mathbb{N}$ счётно, найдутся $n \in \mathbb{N}$ и несчётное $A' \subset A$ такие, что $n_\alpha = n$ для всех $\alpha \in A'$. Окрестность $B_d(x, \frac{1}{n})$ любой точки $x \in X$ содержит не больше одного элемента множества $Y = \{x_\alpha : \alpha \in A'\}$, поскольку $x_\alpha \in B_d(x, \frac{1}{n}) \iff x \in B_d(x_\alpha, \frac{1}{n})$, причём $n = n_\alpha$ для $\alpha \in A'$ и семейство $\{B_d(x_\alpha, \frac{1}{n_\alpha}) : \alpha \in A'\}$ дизъюнктно. Следовательно, несчётное множество $Y$ замкнуто и дискретно в противоречие с предположением. $\square$

**Доказательство теоремы.** Достаточно показать, что любой метризуемый компакт обладает свойством Суслина, а это вытекает из доказанной леммы и того, что любое замкнутое дискретное множество в компактном пространстве само компактно и потому не может быть бесконечным, тем более, несчётным. □

**Теорема**

*Для метризуемого пространства $X$ следующие условия равносильны:*

1. *$X$ компактно;*
2. *любая непрерывная функция на $X$ ограничена;*
3. *любое бесконечное множество в $X$ имеет предельную точку;*
4. *любая последовательность точек пространства $X$ содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть $X$ — метризуемое пространство, и пусть $d$ — какая-нибудь метрика, порождающая его топологию. Мы будем доказывать теорему по схеме 1$\Rightarrow$2$\Rightarrow$3$\Rightarrow$4$\Rightarrow$3$\Rightarrow$1.

Импликация 1$\Rightarrow$2 уже была доказана. Покажем, что 2$\Rightarrow$3. Пусть $Y$ — бесконечное подмножество $X$ без предельных точек. Тогда $Y$ замкнуто и дискретно. Значит, всякое отображение из $Y \subset X$ в любое пространство непрерывно. Поскольку $Y$ бесконечно, существует неограниченная функция $f : Y \to \mathbb{R}$. Пространство $X$ нормально, будучи метризуемым. По теореме Титце–Урысона функция $f$ продолжается до непрерывной функции $\hat{f}$ на $X$.

Докажем импликацию ③⇒④. Пусть $(x_n)_{\in\mathbb{N}}$ — любая последовательность точек $X$. Если множество $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ её значений конечно, то она содержит постоянную подпоследовательность, которая сходится. Пусть множество значений бесконечно и $x$ — его предельная точка. 1-Окрестность $x$ содержит бесконечно много точек $x_n$. Выберем какую-нибудь из них. Пусть это $x_{k_1}$. В $\frac{1}{2}$-окрестности точки $x$ выберем точку $x_{k_2}$ с номером $k_2 > k_1$. Продолжая в том же духе, мы получим подпоследовательность $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с тем свойством, что для каждого $n$ $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Ясно, что $x_{k_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$.

Обратная импликация ④⇒③ очевидна — любое бесконечное множество содержит счётное множество, а точки счётного множества можно занумеровать натуральными числами, так что получится последовательность. Предел любой сходящейся подпоследовательности этой последовательности будет предельной точкой данного бесконечного множества.

Докажем, что ③⇒①. Пусть $X$ удовлетворяет условию ③; это означает, что $X$ не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств, а значит, обладает свойством Суслина и счётной базой. Пусть открытое покрытие $\mathscr{U}$ пространства $X$ не содержит конечного подпокрытия. Можно считать, что $\mathscr{U}$ состоит из элементов счётной базы и само счётно. Пусть $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ положим $F_n = X \setminus U_n$; все $F_n$ замкнуты. Множество $F_1$ непусто (иначе $\{U_1\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$); выберем в нём какую-нибудь точку $x_1$. Множество $F_1 \cap F_2$ тоже непусто (иначе $\{U_1, U_2\}$ — конечное подпокрытие покрытия $\mathscr{U}$); выберем точку $x_2 \in F_1 \cap F_2$. Продолжая в том же духе, мы получим последовательность $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ точек $X$ с тем свойством, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ множество $F_n$ содержит все $x_k$ с номерами $k \geqslant n$. Поскольку $X$ удовлетворяет условию ③, оно удовлетворяет и условию ④. Пусть $x$ — предел подпоследовательности $(x_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ последовательности $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Возьмём любое $n \in \mathbb{N}$ и найдём $m \in \mathbb{N}$, для которого $k_m \geqslant n$. По построению все члены последовательности $(x_{k_{m+i}})_{i\in\mathbb{N}}$ принадлежат множеству $F_n$. Кроме того, $x_{k_{m+i}} \xrightarrow[i\to\infty]{} x$. Значит, $x \in F_n$. Таким образом, $x \in \bigcap\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$; следовательно, $x \notin \bigcup\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, т.е. $\mathscr{U}$ — не покрытие. □

Скажем, что метрическое пространство $(X, d)$ компактно, если топологическое пространство $(X, \mathscr{T}_d)$, где $\mathscr{T}_d$ — топология, порождённая метрикой $d$, компактно. Компактность метрических пространств можно охарактеризовать в терминах сугубо метрических — $\varepsilon$-сетей, последовательностей Коши и полноты.

**Предложение**

*Метрическое пространство $(X, d)$ вполне ограничено тогда и только тогда, когда всякая последовательность в $X$ содержит подпоследовательность Коши.*

**Теорема**

*Метрическое пространство компактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено и полно.*

**Теорема**

1. *В классе метризуемых пространств секвенциальная компактность равносильна компактности.*
2. *В классе пространств с первой аксиомой счётности секвенциальная компактность равносильна счётной компактности.*

Доказательство. То, что секвенциально компактные метризуемые пространства компактны, вытекает из теоремы о компактности счётно компактных метризуемых пространств и того, что из секвенциальной компактности следует счётная компактность. Обратная импликация вытекает из того, что все метризуемые пространства удовлетворяют первой аксиоме счётности ($\Longrightarrow$ топология определяется сходимостью последовательностей) и существования предельной точки у всякого бесконечного множества (в частности, у множества точек любой нетривиальной последовательности) в компакте. Это же рассуждение доказывает и второе утверждение. □

## Примеры

- *Одноточечная линделёфикация дискретного пространства:* $L(\kappa) = D \cup \{*\}$, где $|D| = \kappa$, $* \notin D$. Точки $D$ изолированы, окрестности $*$ — дополнения до не более чем счётных подмножеств $D$. $w(L(\kappa)) = \chi(L(\kappa)) = c(L(\kappa)) = |D|$. В $L(\kappa)$ нет нетривиальных сходящихся последовательностей.
- *Прямая Зоргенфрея $S$.* Это $\mathbb{R}$ с топологией, порождённой базой $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. $S$ неметризуема, удовлетворяет первой аксиоме счётности, наследственно сепарабельна и наследственно нормальна, но $S \times S$ не нормален. Покажем, что $S$ линделёфова; получим пример линделёфова ($\Rightarrow$ паракомпактного) пространства, квадрат которого не нормален ($\Rightarrow$ не линделёфов и не паракомпактен).

  Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие $S$, и пусть $V_\alpha$ — внутренность $U_\alpha$ в $\mathbb{R}$. Покажем, что $L = S \setminus \bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha$ счётно. $\forall x \in L \; \exists \; \alpha(x) \in A$ и число $r(x) > x$ такие, что $[x, r(x)) \subset U_{\alpha(x)}$. Для любых разных $x, y \in L$ имеем $[x, r(x)) \cap [y, r(y)) = \varnothing \implies L$ счётно. $\mathbb{R} \setminus L \subset \mathbb{R}$ обладает счётной базой, и $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$ — его открытое покрытие. Пусть $\{V_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ — подпокрытие. Семейство $\{U_{\alpha_n} : n \in \mathbb{N}\}$ покрывает $\mathbb{R} = S$, кроме части $L$.

- *Пространство $W_1^0$ всех не более чем счётных ординалов с порядковой топологией.* Знаем: $W_1^0$ не компактно и локально компактно. Все замкнутые дискретные множества в $W_1^0$ конечны $\Rightarrow$ $W_1^0$ счётно компактно $\Rightarrow$ псевдокомпактно. Значит, $W_1^0$ не паракомпактно. $W_1^0$ удовлетворяет первой аксиоме счётности $\Rightarrow$ секвенциально компактно. Покажем, что $W_1^0$ ещё и нормально.

  Пусть $A, B \subset W_1^0$ замкнуты. Предположим, что $A$ и $B$ неограничены в $W_1^0$. Легко построить последовательности $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и $(\beta)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $\alpha_n \in A$, $\beta_n \in B$ и $\alpha_n < \beta_n < \alpha_{n+1}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \beta_n < \omega_1$. Обозначим этот супремум $\gamma$. Любая окрестность $\gamma$ в $W_1^0$ содержит интервал вида $(\gamma_1, \gamma_2)$, где $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, а любой такой интервал содержит как точки вида $\alpha_i$, так и точки вида $\beta_i$. Значит, точка $\gamma$ предельная для $A$ и для $B \Rightarrow \gamma \in A \cap B$. Итак, если замкнутые множества $A$ и $B$ в $W_1^0$ не пересекаются, то либо $A$, либо $B$ ограничено. Пусть для определённости $A$ ограничено, т.е. $A \subset [0, \alpha_0]$, где $\alpha_0$ — некоторый счётный ординал. Множество $[0, \alpha_0]$ замкнуто в компакте $W_1$ и потому само компактно $\Rightarrow A$ компактно. Значит, у $A$ и $B$ есть непересекающиеся окрестности в $W_1^0$.

- *Псевдокомпактное не счётно компактное пространство:* $X = \beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$.
  $X$ псевдокомпактно, но содержит бесконечное замкнутое дискретное (и, следовательно, не псевдокомпактное) подпространство. Таким образом, этот пример вдобавок показывает, что псевдокомпактность не наследуется замкнутыми подпространствами.

  $X$ содержит бесконечное замкнутое дискретное подпространство $\mathbb{N}$.

  Покажем, что $X$ псевдокомпактно. Пусть $f : X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ плотно в $\mathbb{R}$, а значит, и в $\beta\mathbb{R}$ и в $X$. $\Rightarrow$ Оно пересекается со всеми открытыми множествами $f^{-1}\big((-\infty, -n) \cup (n, +\infty)\big)$ (они непусты). Выберем попарно различные $x_1, x_2, \dots \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ так, что $|f(x_n)| > n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет предельных точек в $\mathbb{R}$; $\Rightarrow$ $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ не имеет предельных точек в $X$ и, тем более, в $\mathbb{R} \subset X$. Итак, $D$ — замкнутое дискретное подпространство нормального пространства $\mathbb{R}$, и $D \cap \mathbb{N} = \varnothing$. Имеем $\overline{D}^{\beta\mathbb{R}} \cap \overline{\mathbb{N}}^{\beta\mathbb{R}} = \overline{D}^{\beta\mathbb{R}} \cap \beta\mathbb{N} = \varnothing$. $\Rightarrow$ $\overline{D}^{\beta\mathbb{R}} \subset X$, т.е. $\overline{D}^{\beta\mathbb{R}} = \overline{D}^{X} = D$. $\Rightarrow$ $D$ компактно — противоречие.

# Связность и несвязность

## Определение

Топологическое пространство называется **связным**, если его нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых подпространств, и **несвязным**, если его можно так представить. Связный компакт называется **континуумом**.

Иными словами, $X$ связно, если его нельзя представить в виде $Y \oplus Z$, где $Y$ и $Z$ — непустые подпространства $X$.

## Замечание

Очевидно, в определении связного пространства слово «открытых» можно заменить на «замкнутых», а также на «открыто-замкнутых».

**Теорема**

*Для топологического пространства $X$ следующие условия равносильны:*

1. $X$ *связно;*
2. $X$ *не содержит открыто-замкнутых подмножеств, кроме* $\varnothing$ *и* $X$;
3. *если* $X = Y \cup Z$ *и множества* $Y$ *и* $Z$ *отделены в* $X$ *(т.е.* $\overline{Y} \cap Z = Y \cap \overline{Z} = \varnothing$*), то* $Y$ *или* $Z$ *пусто;*
4. *каждое непрерывное отображение* $f : X \to \{0, 1\}$ *постоянно.*

**Следствие**

*Каждое связное тихоновское пространство, содержащее хотя бы две разные точки (в частности, любой неодноточечный континуум), имеет мощность* $\geqslant 2^{\aleph_0}$.

Доказательство. Пусть $X$ — связное тихоновское пространство, и пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Поскольку $X \in T_1$, множество $\{x\}$ замкнуто в $X$, а поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, существует непрерывная функция $f : X \to [0, 1]$, для которой $f(x) = 0$ и $f(y) = 1$. Функция $f$ сюръективна, потому что если бы нашлось $r \in [0, 1] \setminus f(X)$, то мы бы имели $X = f^{-1}([0, r)) \oplus f^{-1}((r, 1])$ в противоречие со связностью $X$. □

**Следствие**

*Если $Y \subset X$ и $Y$ связно, и если $X_1$ и $X_2$ — отделённые множества в $X$, для которых $Y \subset X_1 \cup X_2$, то одно из множеств $X_1$ и $X_2$ содержит $Y$.*

**Следствие**

*Если $Y_\alpha \subset X$, $\alpha \in A$, — связные подпространства и $\bigcap\limits_{\alpha \in A} \overline{Y_\alpha} \neq \varnothing$, то $\bigcup\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ связно.*

**Следствие**

*Если для любых двух точек пространства $X$ существует содержащее их связное $Y \subset X$, то $X$ связно.*

**Следствие**

*Если $Y$ связно, $Y \subset X$ и $Y \subset Z \subset \overline{Y}$, то $Z$ тоже связно. В частности, $\overline{Y}$ связно.*

**Следствие**

*Тихоновское пространство $X$ связно тогда и только тогда, когда $\beta X$ связно.*

**Теорема**

*Обычная прямая, а также все интервалы, отрезки и открытые и замкнутые лучи на прямой связны.*

Доказательство. Предположим, что прямая $\mathbb{R}$ несвязна, т.е. $\mathbb{R} = W_1 \cup W_2$, где $W_1, W_2 \neq \varnothing$, $W_1 \cap W_2 = \varnothing$ и оба множества $W_1$ и $W_2$ открыты. (Тогда эти множества одновременно и замкнуты.) Возьмём $w_1 \in W_1$ и $w_2 \in W_2$; будем считать для определённости, что $w_1 < w_2$. Положим $w = \sup\{x \in W_1 \cap [w_1, w_2]\}$. Если $w \in W_1$, то $w < w_2$ и, поскольку $W_1$ открыто, найдётся $\varepsilon > 0$, для которого $(w - \varepsilon, w + \varepsilon) \subset W_1 \cap [w_1, w_2]$; имеем $w' = w + \frac{\varepsilon}{2} > w$ и $w' \in W_1 \cap [w_1, w_2]$. Если же $w \in W_2$, то, поскольку $W_2$ открыто, найдётся $\varepsilon > 0$, для которого $(w - \varepsilon, w] \subset W_2 \cap [w_1, w_2]$, и $x \leqslant w - \varepsilon < w$ для всех $x \in W_1 \cap [w_1, w_2]$. В любом случае получаем противоречие с определением супремума.

Открытые интервалы и открытые лучи гомеоморфны прямой и потому тоже связны.

Отрезки и замкнутые лучи связны в силу следствий. □

### Определение

Объединение всех связных подпространств пространства $X$, содержащих точку $x \in X$, называется компонентой связности, или связной компонентой, или просто компонентой, точки $x$ в $X$ (или пространства $X$).

- Компонента точки $x$ — это максимальное связное подмножество $X$, содержащее $x$.
- Компонента любой точки замкнута.
- Компоненты любых двух точек в топологическом пространстве либо не пересекаются, либо совпадают. Таким образом, в совокупности компоненты точек составляют разбиение пространства на попарно непересекающиеся связные замкнутые множества, которые называются компонентами связности, или связными компонентами, или просто компонентами, этого пространства.

**Теорема**

*Образ связного пространства при непрерывном отображении связен.*

Доказательство очевидно.

**Следствие**

*Если непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, определённая на связном пространстве $X$, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.*

Действительно, иначе множество $f(X)$ было бы несвязным.

**Следствие**

*Если связное тихоновское пространство $|X|$ содержит более одной точки, то $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$.*

Действительно, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то существует непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$ такая, что $f(x) = 0$ и $f(x) = 1$. По предыдущему следствию $|f(X)| \geqslant [0, 1] = 2^{\aleph_0}$, откуда $|X| \geqslant 2^{\aleph_0}$.