Примеры

- Всякое конечное пространство компактно.
- Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ компактен для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.
- Канторово множество C — подмножество отрезка $[0, 1]$, которое получается по индукции удалением средних третей (без концов) из всех имеющихся на данном шаге индуктивного построения отрезков.

  Канторово множество — совершенное (т.е. замкнутое и не содержащее изолированных точек) нигде не плотное подмножество прямой; оно гомеоморфно счётной степени двухточечного дискретного пространства $\{0, 1\}$; всякий метризуемый компакт является его непрерывным образом; оно является универсальным пространством для класса $\mathscr{K}$ пространств, обладающих счётной базой из открыто-замкнутых множеств (т.е. $C \in \mathscr{K}$ и любое пространство из $\mathscr{K}$ гомеоморфно вкладывается в C).
- Для $n \in \mathbb{N}$ множество $X \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда X замкнуто и ограничено относительно евклидовой метрики d_n, т.е. содержится в шаре $B_d(0, R)$ для некоторого $R > 0$.

- Пусть κ — любой кардинал, D — множество мощности κ и $\star$ — точка, не принадлежащая D. Положим $A(\kappa) = D \cup \{\star\}$. Снабдим $A(\kappa)$ топологией, в которой все точки множества D изолированы, а окрестностями точки $\star$ служат дополнения до конечных подмножеств D, т.е. всевозможные множества вида $\{\star\} \cup D \setminus F$, где F — конечное подмножество D. Компактность пространства $A(\kappa)$ очевидна. Пространство $A(\alpha_0)$ гомеоморфно обычной сходящейся последовательности $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. Пространство $A(\kappa)$ для произвольного кардинала κ иногда называют суперпоследовательностью Александрова. Для любого бесконечного κ имеем $w(A(\kappa)) = \chi(A(\kappa)) = d(A(\kappa)) = c(A(\kappa)) = \kappa$.
- Из компактности отрезка по теореме Тихонова следует компактность любого тихоновского куба I^κ, в частности, гильбертова куба (равно как и кирпича), а также любого замкнутого подпространства I^κ. Как и $A(\kappa)$, I^κ — пример компакта веса и характера κ, однако куб I^κ обладает свойством Суслина для любого κ, а для $\kappa \leqslant 2^{\aleph_0}$ он ещё и сепарабелен.

- Важнейший пример: пространство $W_1 = \{\alpha : \alpha \leqslant \omega_1\}$ всех не более чем счётных ординалов вместе с первым несчётным, снабжённое порядковой топологией.

  Пусть $\mathscr{U} = \{U_\iota : \iota \in I\}$ — открытое покрытие пространства W_1. Рассмотрим множество A всех $\alpha \leqslant \omega_1$, для которых замкнутый интервал $[0, \alpha]$ содержится в объединении конечного числа элементов покрытия $\mathscr{U}$. Надо показать, что $W_1 \setminus A = \varnothing$. Предположим, что $W_1 \setminus A \neq \varnothing$ и обозначим через α_0 наименьший элемент этого множества. Существует $\iota_0 \in I$, для которого $\alpha_0 \in U_{\iota_0}$. Ясно, что $0 < \alpha_0$. Значит, найдётся $\beta < \alpha_0$, для которого $(\beta, \alpha_0] \subset U_{\iota_0}$. По определению ординала α_0 имеем $\beta \in A$, а по определению множества A $[0, \beta] \subset U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$ для некоторых $\iota_1, \dots, \iota_k \in I$. Следовательно, $[0, \alpha_0] \subset U_{\iota_0} \cup U_{\iota_1} \cup \dots \cup U_{\iota_k}$ в противоречие с определением α_0.

Рассмотрим теперь подпространство $W_1^0 = \{\alpha : \alpha < \omega_1\}$ пространства W_1. Оно не компактно, но всякое бесконечное множество $A \subset W_1^0$ имеет предельную точку в W_1^0, т.е. все замкнутые дискретные множества в W_1^0 конечны.

Кроме того, всякая непрерывная функция на W_1^0 ограничена. Действительно, предположим, что $f\colon W_1^0 \to \mathbb{R}$ — непрерывная неограниченная функция, т.е. f принимает сколь угодно большие положительные или сколь угодно малые отрицательные значения. Пусть для определённости f принимает сколь угодно большие значения. Определим по индукции множество $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ в $f(W_1^0)$ следующим образом: возьмём любое число $x_1 \in f(W_1^0)$; считая, что x_n уже определено, выберем в $f(W_1^0)$ точку $x_{n+1} > x_n + 2$.

В прообразе $f^{-1}(x_n)$ каждой точки $x_n \in X$ выберем точку α_n и положим $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\} \subset W_1^0$; ясно, что множество A бесконечно. Всякая точка $\alpha \in W_1^0$ имеет открытую окрестность $f^{-1}\big((f(\alpha) - 1, f(\alpha) + 1)\big)$, которая содержит не более одной точки из A. Следовательно, бесконечное множество $A \subset W_1^0$ не имеет точек накопления, а значит, и предельных точек в W_1^0, а таких множеств не существует. Отсюда вытекает, что и неограниченных непрерывных функций на W_1^0 не существует.

Компактификации

Важнейшее следствие теорем Тихонова состоит в том, что всякое тихоновское пространство можно компактифицировать, т.е. вложить в некоторый компакт в качестве всюду плотного подпространства.

Определение

Пара (K, c), где K — компакт, а $c\colon X \to K$ — гомеоморфное вложение топологического пространства X в K такое, что $\overline{c(X)} = K$, называется компактификацией пространства X, или компактным хаусдорфовым расширением пространства X. Разность $K \setminus c(X)$ называется наростом расширения.

Теорема

Топологическое пространство X обладает компактификацией тогда и только тогда, когда X вполне регулярно.

Теорема

Каждое вполне регулярное пространство X имеет компактификацию (K, c) со свойством $w(K) = w(X)$.

В дальнейшем под компактификацией пространства X мы будем понимать не только пару (K, c), но и сам компакт K, содержащий (гомеоморфную копию) X в качестве плотного подпространства. Для компактификаций данного пространства X принято использовать обозначения, состоящие из двух символов: cX, bX, βX и т.п.; при этом второй символ — это обозначение самогó пространства, а первый — обозначение его гомеоморфного вложения в соответствующую компактификацию. Так что запись cX не только обозначает некоторый компакт, но и подразумевает, что этот компакт содержит гомеоморфную копию пространства X, причём гомеоморфное вложение X в cX осуществляется отображением $c\colon X \to cX$ и $\overline{c(X)} = cX$.

Определение

Компактификации c_1X и c_2X считаются **эквивалентными**, если существует гомеоморфизм $\varphi\colon c_1X \to c_2X$ такой, что $c_2 = \varphi \circ c_1$, т.е. диаграмма

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, hook, "c_1"'] \arrow[dr, hook, "c_2"] & \\ c_1X \arrow[rr, "\varphi"] & & c_2X \end{tikzcd}$$

коммутативна (двигаясь по стрелкам c_1 и φ, мы получим тот же результат, что и двигаясь по стрелке c_2).

Таким образом, две компактификации пространства X эквивалентны, если они гомеоморфны и гомеоморфизм между ними устроен так, что X вложено в них одинаковым относительно этого гомеоморфизма образом.

Пример

Пусть $X = X_1 \oplus X_2$, где $X_1 = (0, 1)$ и $X_2 = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$. Рассмотрим компактификации c_1X и c_2X пространства X, представляющие собой сумму $S^1 \oplus [0, 1]$ окружности и отрезка, в которую X вложено по-разному: $c_1|_{X_1}$ — это вложение $i\colon X_1 \to S^1$ интервала в окружность, определённое формулой $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ (считаем, что $X_1 = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ и S_1 — единичная окружность на плоскости $\mathbb{R}^2$), и $c_1|_{X_2}$ — тождественное вложение X_2 в отрезок $[0, 1]$, тогда как отображение c_2 тождественно вкладывает X_1 в $[0, 1]$, а X_2 оно вкладывает в окружность отображением $i|_{(0,1)\cap\mathbb{Q}}$. Компактификации c_1X и c_2X гомеоморфны, но не эквивалентны, поскольку при любом гомеоморфизме суммы $S^1 \oplus [0, 1]$ в себя окружность должна переходить в окружность, а отрезок — в отрезок. Это вытекает из того, что окружность и отрезок связны и не гомеоморфны.

Легко проверить, что эквивалентность компактификаций действительно является отношением эквивалентности на любом множестве компактификаций данного пространства X, но для этого надо выделить достаточно представительный набор компактификаций, который является множеством (а не целым классом множеств).

Поскольку X гомеоморфно (а значит, равномощно) плотному подпространству $c(X)$ любой своей компактификации cX, имеем $d(cX) \leqslant |X|$, а значит, $w(cX) \leqslant 2^{|cX|} \leqslant 2^{|X|}$. Таким образом, любая компактификация пространства X вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^{2^{|X|}}$, так что достаточно рассматривать только компактификации, являющиеся подпространствами этого куба, а такие компактификации действительно образуют множество, и их эквивалентность в смысле данного выше определения действительно является отношением эквивалентности. Мы будем обозначать множество всех компактификаций $cX \subset [0,1]^{2^{|X|}}$ пространства X через $\mathscr{C}(X)$, а множество классов эквивалентности таких компактификаций — через $\mathfrak{C}(X)$.

Теперь упорядочим множество $\mathfrak{C}(X)$. Точнее, мы введём транзитивное отношение $\leqslant$ на множестве компактификаций $\mathscr{C}(X)$ и докажем, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$ тогда и только тогда, когда компактификации c_1X и c_2X эквивалентны, а это означает, что формула $[c_1X] \preccurlyeq [c_2X] \iff c_1X \leqslant c_2X$ корректно определяет отношение $\preccurlyeq$ на $\mathfrak{C}(X)$ и это отношение рефлексивно и антисимметрично, т.е. является порядком.

Определение

Пусть c_1X и c_2X — две компактификации одного и того же пространства X. Положим $c_1X \leqslant c_2X$, если существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$ такое, что $f \circ c_2 = c_1$:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, hook, "c_2"'] \arrow[dr, hook, "c_1"] & \\ c_2X \arrow[rr, "f"] & & c_1X . \end{tikzcd}$$

В случае, когда вложения c_1 и c_2 тождественны, неравенство $c_1X \leqslant c_2X$ означает, что существует непрерывное отображение $f\colon c_2X \to c_1X$, которое переводит каждую точку x в себя. Отображение f сюръективно: образ $f(c_2X)$ компактен и потому замкнут в c_1X, и $c_1(X) = f(c_2(X))$ и $\overline{c_1(X)} = c_1X$.

Теорема

Компактификации c_1X и c_2X эквивалентны тогда и только тогда, когда $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$.

Доказательство. Если компактификации c_1X и c_2X эквивалентны и φ — гомеоморфизм из определения эквивалентности, то в качестве непрерывных отображений $c_2X \to c_1X$ и $c_1X \to c_2X$, гарантирующих выполнение неравенств $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$, можно взять φ и φ^{-1}.

Предположим теперь, что $c_1X \leqslant c_2X$ и $c_2X \leqslant c_1X$, и пусть $f_1 \colon c_2X \to c_1X$ и $f_2 \colon c_1X \to c_2X$ — непрерывные отображения, для которых $f_1 \circ c_2 = c_1$ и $f_2 \circ c_1 = c_2$. Если мы покажем, что f_1 — биекция, то отображение f_1 будет гомеоморфизмом, причём как раз таким, какой требуется.

Имеем $f_2 \circ f_1(y) = y$ для всех $y \in c_2X$: для композиции $f_2 \circ f_1 \colon c_2X \to c_2X$ выполнено равенство $f_2 \circ f_1 \circ c_2 = f_2 \circ c_1 = c_2$; поскольку c_2 инъективно, это означает, что $f_2 \circ f_1(y) = y$ для всякого $y \in c_2(X) \subset c_2X$, т.е. сужение $f_2 \circ f_1$ на плотное подпространство $c_2(X)$ пространства c_2X совпадает с сужением тождественного отображения $C_2X \to C_2X$, так что само $f_2 \circ f_1$ и есть тождественное отображение. $\implies$ f_1 (так же как и f_2) биективно. $\square$

Александровская компактификация

Определение

Топологическое пространство X называется локально компактным, если каждая точка $x \in X$ имеет компактную (не обязательно открытую!) окрестность.

Теорема об александровской компактификации

Каждое некомпактное локально компактное хаусдорфово пространство X обладает компактификацией αX, для которой $\alpha(X) = X$ и нарост $\alpha X \setminus X$ состоит из одной точки. Эта компактификация является наименьшим элементом множества компактификаций $\mathscr{C}(X)$, а её вес равен весу X.

Доказательство. Возьмём любую точку $* \notin X$ и положим $\alpha = \mathrm{id}_X$ и $\alpha X = X \cup \{*\}$. Объявим открытыми в αX все множества, открытые в X, а также все множества вида $\{*\} \cup (X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X. Легко видеть, что $\alpha X \in T_2$ и αX — компактификация пространства X. Значит, $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, и мы можем рассмотреть множество компактификаций $\mathscr{C}(X)$.

Пусть $cX \in \mathscr{C}(X)$. Соотношение $\alpha X \leqslant cX$ будет доказано, если мы покажем, что отображение $f\colon cX \to \alpha X$, определённое правилом

$$f(x) = \begin{cases} \alpha(c^{-1}(x)) = c^{-1}(x) & \text{при } x \in c(X), \\ * & \text{при } x \in cX \setminus c(X) \end{cases}$$

(если считать, что $X = c(X)$, то это отображение переводит нарост $cX \setminus X$ в нарост-точку $\{*\}$, а остальные точки оставляет на месте), непрерывно и удовлетворяет условию $f \circ c = \alpha$. Равенство $f \circ c = \alpha$ следует прямо из определения, а чтобы доказать непрерывность, достаточно проверить, что $c(X)$ открыто в cX. Действительно, прообраз любого открытого множества является либо открытым подмножеством множества $c(X)$ (так что если $c(X)$ открыто, то он будет открыт и во всём пространстве cX), либо множеством вида $f^{-1}(\alpha X \setminus K)$, где K — компактное подмножество X (а такое множество является дополнением в cX до множества $c(K)$, которое компактно, так как c — гомеоморфизм, и потому замкнуто). То, что локально компактное пространство $c(X)$ открыто в cX, вытекает из следующей леммы.

Лемма

Любое локально компактное хаусдорфово пространство Y открыто в любом хаусдорфовом пространстве Z, содержащем Y в качестве плотного подпространства.

Доказательство. Каждая точка $y \in Y$ обладает компактной окрестностью N. Эта окрестность замкнута, поскольку Y хаусдорфово, и содержит некоторую открытую окрестность U точки y. Поскольку $\overline{U} \subset N$, замыкание $\overline{U}^Y$ компактно. Имеем $\overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y$; поскольку это множество компактно, оно замкнуто и в Z. Имеем $\overline{U}^Z = \overline{U}^Y = \overline{U}^Z \cap Y \subset Y$. Пусть W — открытое множество в Z, для которого $U = Y \cap W$. Тогда $y \in W \subset \overline{W}^Z = \overline{Y \cap W}^Z = \overline{U}^Z \subset Y$, а значит, каждая точка $y \in Y$ имеет окрестность, содержащуюся в Y, т.е. Y открыто. $\square$

Покажем теперь, что $w(\alpha X) = w(X)$. X не компактно $\implies$ $w(X) \geqslant \aleph_0$. Пусть U — любая окрестность любой точки $x \in X$, и пусть N — компактная окрестность этой точки. Пересечение $U \cap N$ содержит с замыканием открытую окрестность точки x, и замыкание этой окрестности компактно. $\implies$ у пространства X имеется база, состоящая из открытых множеств с компактным замыканием. Выберем из неё базу $\mathscr{B}$ мощности $w(X)$. Рассмотрим на $X \cup \{*\}$ новую топологию с предбазой $\mathscr{B} \cup \big\{\{*\} \cup X \setminus \overline{U} : U \in \mathscr{B}\big\}$. Предбаза $\mathscr{B}$ имеет мощность $w(X)$ и потому определяет топологию веса $w(X)$, причём эта топология хаусдорфова и слабее топологии пространства αX; αX компактно $\implies$ она совпадает с топологией αX. $\square$

Определение

Компактификация αX локально компактного некомпактного хаусдорфова пространства X называется **александровской компактификацией**, или **одноточечной компактификацией**, или **минимальной компактификацией** этого пространства.

Теорема

Если в семействе $\mathscr{C}(X)$ всех компактификаций некомпактного пространства X есть наименьший элемент cX (относительно порядка $\leqslant$), то X локально компактно и cX эквивалентна александровской компактификации αX.

Доказательство. Сначала покажем, что нарост $cX \setminus c(X)$ одноточечный. Предположим, что нарост $x, y \in cX \setminus c(X)$, $x \neq y$. $Y = cX \setminus \{x, y\}$ локально компактно, и αY — компактификация X. $\implies$ $\alpha Y = c'X$, где $c' \colon X \to c'X$ — гомеоморфное вложение и $c'(x) = c(x)$ для всех $x \in X$. По условию $cX \leqslant c'X$; $\implies$ $\exists$ непрерывное отображение $f \colon c'X \to cX$ такое, что $f|_{c'(X)} = \mathrm{id}_{c'(X)}$. $c'(X)$ плотно $\implies$ $f|_Y = \mathrm{id}_Y$, так что компакты $c'X$ и cX являются компактификациями Y (вложения $Y \to c'X$ и $Y \to cX$ тождественны). Имеем $f(c'X \setminus Y) = cX \setminus Y$ (по недавно доказанному предложению). $c'X = \alpha Y = Y \cup \{*\}$ и $Y = cX \setminus \{x, y\}$ $\implies$ $f(\{*\}) = \{x, y\}$. Такого быть не может.

Итак, $cX = c(X) \cup \{\star\}$ для некоторой точки $\star \notin c(X)$. Покажем, что $c(X)$ локально компактно. cX регулярно $\implies$ $cX \in T_1$ $\implies$ $c(X) = cX \setminus \{\star\}$ — открытая окрестность в cX любой точки $x \in c(X)$, и любая точка $x \in c(X)$ имеет окрестность V, замыкание которой в cX содержится в $c(X)$.

Итак, $cX = c(X) \cup \{\star\}$ и пространство $c(X)$ (а значит, и X) локально компактно. $\implies$ для X определена одноточечная компактификация $\alpha X = X \cup \{*\}$. По условию теоремы $cX \leqslant \alpha X$, т.е. $\exists$ непрерывное отображение $\varphi \colon \alpha X \to cX$ такое, что $\varphi \circ \mathrm{id}_X = c$. Имеем $\varphi(\{*\}) = \{\star\}$ $\implies$ φ биективно $\implies$ гомеоморфизм. $\implies$ компактификации cX и αX эквивалентны. $\square$

Стоун–чеховская компактификация

Определение

Компактификация тихоновского пространства X, наибольшая относительно $\leqslant$, называется компактификацией Стоуна–Чеха, или стоун-чеховской компактификацией, или стоун-чеховским расширением, или максимальной компактификацией пространства X и обозначается βX.

Теорема

Для каждого тихоновского пространства X существует стоун-чеховская компактификация βX.

Доказательство. Рассмотрим произведение $\prod\limits_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX$ и диагональное отображение

$$\beta = \mathop{\Delta}_{cX \in \mathscr{C}(X)} c \colon X \to \prod_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX,$$

которое по теореме о диагональном произведении отображений является гомеоморфным вложением. Обозначим замыкание $\overline{\beta(X)}$ его образа в $\prod\limits_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX$ через βX. По теореме Тихонова о компактности произведений и в силу компактности замкнутых подмножеств компактов пространство βX является компактификацией пространства X, причём эта компактификация наибольшая: для любой компактификации $c_0X \in \mathscr{C}(X)$ сужение $\widetilde{\pi}_{c_0X}$ канонической проекции $\pi_{c_0X} \colon \prod\limits_{cX \in \mathscr{C}(X)} cX \to c_0X$ на $\beta(X)$ удовлетворяет условию $\widetilde{\pi}_{c_0X} \circ \beta = c_0$, поэтому $c_0X \leqslant \beta X$ при всех $c_0X \in \mathscr{C}(X)$, так что βX — действительно стоун-чеховская компактификация. $\square$

Начиная с этого момента мы будем отождествлять пространство X с подпространством $c(X)$ любой его компактификации (когда это удобно) без специальных оговорок. В частности, мы будем считать, что $X \subset \beta X$. Такое отождествление позволяет обсуждать продолжение непрерывных отображений пространства X на его компактификации cX без необходимости всякий раз включать в цепочку отображений гомеоморфизм $X \rightleftarrows c(X)$.

Теорема

Пусть X — тихоновское пространство.

1. *Каждое непрерывное отображение $f\colon X \to K$ пространства X в любой компакт K можно продолжить до непрерывного отображения $\hat{f}\colon \beta X \to K$.*
2. *Если cX — компактификация X и любое непрерывное отображение $f\colon X \to K$ в любой компакт K продолжается до непрерывного отображения $\hat{f}\colon cX \to K$, то cX эквивалентна βX.*

Доказательство. 1. Положим $c = \beta \,\Delta\, f\colon X \to \beta X \times K$. По теореме о диагональном отображении c — гомеоморфное вложение, так что $cX = \overline{c(X)} \subset \beta X \times K$ — компактификация пространства X. βX максимальна $\Longrightarrow$ $\exists$ непрерывное $g\colon \beta X \to cX$ такое, что $g \circ \beta = g|_X = c$. Пусть $\pi\colon cX \to K$ — сужение проекции $\pi_K\colon \beta X \times K \to K$ на cX. Положим $\hat{f} = \pi \circ g\colon \beta X \to K$. Тогда $\hat{f}$ — продолжение f, так как $\hat{f}|_X = \hat{f} \circ \beta = \pi \circ g \circ \beta = \pi \circ c = f$.

2. Продолжим тождественное вложение $\beta\colon X \to \beta X$ до непрерывного отображения $\hat{\beta}\colon cX \to \beta X$. Имеем $\hat{\beta} \circ c = \beta$, т.е. $\beta X \leqslant cX$, и $cX \leqslant \beta X$, т.к. βX максимальна; значит, cX и βX эквивалентны. $\square$

Счётно компактные и псевдокомпактные пространства

Определение

Топологическое пространство X называется счётно компактным, если каждое счётное открытое покрытие этого пространства содержит конечное подпокрытие.

(Иногда за определение берут равносильное требование существования точки накопления у всякого бесконечного подмножества.)

Определение

Топологическое пространство X называется псевдокомпактным, если оно вполне регулярно и всякая непрерывная функция $X \to \mathbb{R}$ ограничена.

Теорема

Для топологического пространства X следующие условия равносильны:

1. *X счётно компактно;*
2. *любое счётное центрированное семейство замкнутых множеств в X имеет непустое пересечение;*
3. *любое локально конечное семейство непустых множеств в X конечно;*
4. *любое бесконечное множество в X имеет точку накопления.*

2$\Rightarrow$3: Пусть $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ — бесконечное локально конечное семейство непустых подмножеств X. Оно консервативно. Значит, $\forall n \in \mathbb{N}$ множество $F_n = \bigcup\limits_{j \geqslant n} \overline{A}_j$ замкнуто. $\{F_n\}$ — убывающая ($\Rightarrow$ центрированная) счётная система, и $\bigcap F_n = \varnothing$.

4$\Rightarrow$1: Пусть у открытого покрытия $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ нет конечного подпокрытия. Возьмём $x_1 \in X$ и выберем $k_1 \in \mathbb{N}$ так, что $x_1 \in U_{k_1}$. …Возьмём $x_{n+1} \in X \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{k_n})$ и выберем $k_{n+1} \in \mathbb{N}$, для которого $x_{n+1} \in U_{k_{n+1}}$. Множество $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ бесконечно и не имеет точек накопления (для $x \in X$ и элемента $U_n \in \mathscr{U}$, содержащего x, $U_n \cap A$ конечно). □

Теорема

1. *X псевдокомпактно;*
2. *для любого счётного центрированного семейства $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ открытых множеств в X пересечение $\bigcap\limits_{i\in\mathbb{N}} \overline{V}_i$ непусто;*
3. *любое локально конечное семейство непустых открытых множеств в X конечно;*
4. *любое локально конечное открытое покрытие пространства X содержит конечное подпокрытие.*

Доказательство. 1⇒3: Пусть $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ — бесконечное локально конечное семейство непустых открытых множеств. Для $n \in \mathbb{N}$ выберем $x_n \in U_n$ и непрерывную функцию $f_n\colon X \to [0,1]$ такую, что $f_n(x_n) = 1$ и $f_n(X \setminus U_n) \subset \{0\}$. Положим $g_n = n \cdot f_n$. Поскольку семейство $\{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ локально конечно, функция $g = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ определена и непрерывна в каждой точке $x \in X$. Ясно, что функция g неограничена.

3⇒4: очевидно.

4⇒1: Пусть X удовлетворяет условию 4 и $f\colon X\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. Семейство $\{f^{-1}(n-1,n+1) : n\in\mathbb{Z}\}$ представляет собой локальное конечное открытое покрытие X. Из условия 4 вытекает, что это покрытие содержит лишь конечное число непустых элементов, т.е. функция f ограничена.

3⇒2: Пусть X — пространство со свойством 3. Если $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — счётное центрированное семейство открытых множеств, то найдётся точка $x\in X$, каждая окрестность которой пересекает бесконечно много множеств $V_n=\bigcap\limits_{i\leqslant n} W_i$ (иначе бесконечное семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ непустых открытых множеств было бы локально конечным). Значит, любая окрестность точки x пересекает W_n для каждого $n\in\mathbb{N}$ (если точка x имеет окрестность U такую, что $U\cap W_n=\varnothing$, то $U\cap V_k=\varnothing$ для всех $k\geqslant n$), т.е. $x\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{W}_i$.

2⇒1: Для всякой неограниченной непрерывной функции $f\colon X\to\mathbb{R}$ семейство $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $V_n=\{x : |f(x)|>n\}$, центрировано, однако $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}\overline{V}_n=\varnothing$. □

Следствие

1. *Всякое счётно компактное тихоновское пространство псевдокомпактно.*
2. *Всякое нормальное псевдокомпактное пространство счётно компактно.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теорем. Докажем второе. Если $X \in T_1$ нормально и X не счётно компактно, то X содержит бесконечное замкнутое дискретное множество D. Выберем попарно различные точки $x_1, x_2, \dots \in D$ и рассмотрим неограниченную функцию $f: D \to \mathbb{R}$, определённую правилом

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{если } x = x_n, \\ 0, & \text{если } x \in D \setminus \{x_1, x_2, \dots\}. \end{cases}$$

Она непрерывна. Если $X \in T_4$, то по теореме Титце–Урысона f продолжается до (неограниченной) непрерывной функции на X. □

Локально компактные пространства

Определение

Скажем, что топологическое пространство локально компактно, если у каждой его точки есть компактная окрестность (не обязательно открытая).

Для хаусдорфова пространства это условие равносильно существованию открытой окрестности с компактным замыканием у каждой его точки.

Теорема

Локально компактные хаусдорфовы пространства — это в точности открытые подпространства компактов.

Теорема

Всякое плотное локально компактное подпространство в хаусдорфовом пространстве открыто.

(Уже доказали при рассмотрении александровской компактификации.)

Теорема

Всякое хаусдорфово локально компактное пространство вполне регулярно.

Определение

Псевдохарактер T_1-пространства X с топологией $\mathscr{T}$ в точке $x \in X$ — это кардинал

$$\psi(x, X) = \min\big\{|\mathscr{U}| : \mathscr{U} \subset \mathscr{T},\ \bigcap \mathscr{U} = \{x\}\big\}.$$

Наименьший кардинал κ с тем свойством, что $\psi(x, X) \leqslant \kappa$ для всех точек $x \in X$, называется *псевдохарактером* пространства X и обозначается $\psi(X)$:

$$\psi(X) = \sup\big\{\psi(x, X) : x \in X\big\}.$$

Теорема

Характер локально компактного хаусдорфова пространства в любой точке равен его псевдохарактеру в этой точке.

Доказательство. Пусть X — локально компактное хаусдорфово (а значит, и регулярное) пространство и $x \in X$. Ясно, что $\psi(x, X) \leqslant \chi(x, X)$, так что надо доказать, что $\psi(x, X) \geqslant \chi(x, X)$. Можно считать, что $\psi(x, X) = \kappa \geqslant \aleph_0$. Пусть U_α, $\alpha < \kappa$, — открытые подмножества X и $\{x\} = \bigcap\limits_{\alpha<\kappa} U_\alpha$, и пусть W — открытая окрестность x с компактным замыканием. Для каждого $\alpha < \kappa$ найдём открытую окрестность $V_\alpha \subset W$ точки x, для которой $\overline{V}_\alpha \subset U_\alpha$. Ясно, что $\bigcap\limits_{\alpha<\kappa} V_\alpha = \{x\}$ и все V_α имеют компактное замыкание. Возьмём любую открытую окрестность U точки x и любой ординал $\alpha_0 < \kappa$. Множества $(\overline{V}_{\alpha_0} \setminus U) \setminus \overline{V}_\alpha$, $\alpha < \kappa$, образуют открытое покрытие компакта $\overline{V}_{\alpha_0} \setminus U$. Оно содержит конечное подпокрытие $\{(\overline{V}_{\alpha_0} \setminus U) \setminus \overline{V}_{\alpha_i} : i = 1, \ldots, n\}$. Имеем $(\overline{V}_{\alpha_0} \cap \overline{V}_{\alpha_1}) \cap \cdots \cap (\overline{V}_{\alpha_0} \cap \overline{V}_{\alpha_n}) \subset U$; значит, $V_{\alpha_0} \cap V_{\alpha_1} \cap \cdots \cap V_{\alpha_n} \subset U$. Таким образом, любая открытая окрестность U точки x содержит конечное пересечение элементов семейства $\{V_\alpha : \alpha \in A\}$, т.е. все такие конечные пересечения образуют базу открытых окрестностей точки x. Мощность множества всех этих пересечений равна κ. $\square$

Следствие

Вес любого локально компактного хаусдорфова пространства не превосходит его мощности.

Доказательство. Для конечных пространств утверждение очевидно.

Для любого пространства X и любой точки $x \in X$ имеем $\{x\} = \bigcap \big\{X \setminus \{y\} : y \in X, y \neq x\big\}$. В T_1-пространстве X все множества $X \setminus \{y\}$ открыты и, следовательно, $\psi(x, X) \leqslant |X|$. Если же X хаусдорфово и локально компактно, то по доказанной теореме $\chi(x, X) \leqslant |X|$ для всех $x \in X$, т.е. $\chi(X) \leqslant |X|$.

Для любого топологического пространства X выполнено неравенство $w(X) \leqslant \chi(X) \cdot |X|$. Действительно, если $\mathscr{B}(x)$ — база окрестностей для каждого $x \in X$, то $\mathscr{B} = \bigcup\{\mathscr{B}(x) : x \in X\}$ — база топологии X, и если $\chi(X) \leqslant |X|$, то все локальные базы $\mathscr{B}(x)$ можно выбрать имеющими мощность $\leqslant |X|$. В результате получим $w(X) \leqslant |\mathscr{B}| \leqslant |X| \cdot |X|$. Для бесконечного X имеем $|X| \cdot |X| = |X|$, откуда $w(X) \leqslant |X|$. $\square$

Паракомпактные пространства

Определение

Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X **локально конечно**, если у каждой точки $x \in X$ есть окрестность, пересекающая лишь конечное число элементов $\mathscr{F}$.

Определение

Топологическое пространство **паракомпактно**, если в каждое его открытое покрытие можно вписать локально конечное открытое покрытие. Хаусдорфовы паракомпактные пространства называются **паракомпактами**.

Паракомпактность действительно является обобщением компактности, потому что из открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие тогда и только тогда, когда в него можно вписать конечное покрытие.

Определение

Семейство $\mathscr{F}$ подмножеств топологического пространства X называется консервативным, если для всякого $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$ имеет место равенство $\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F} = \overline{\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} F}$.

Предложение

Каждое локально конечное семейство консервативно.

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ — локально конечное семейство подмножеств топологического пространства X, и пусть $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$. Включение $\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F} \subset \overline{\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} F}$ следует из монотонности оператора замыкания. Проверим обратное включение. Пусть $x \notin \bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} \overline{F}$, и пусть U — окрестность x, пересекающая лишь конечное число элементов семейства $\mathscr{F}$, а значит, и семейства $\mathscr{F}'$. Пусть $F_1, \dots, F_n$ — все элементы $\mathscr{F}'$, пересекающие U. Положим $V = U \setminus (\overline{F}_1 \cup \dots \cup \overline{F}_n)$. Очевидно, V — окрестность точки x и $V \cap \overline{\bigcup\limits_{F \in \mathscr{F}'} F} = \varnothing$. □