Теорема

Всякое компактное подпространство любого хаусдорфова пространства замкнуто.

Доказательство. Пусть X — хаусдорфово пространство, $K \subset X$ — его компактное подмножество и $x \in \overline{K} \setminus K$. Имеем $\bigcap\{\overline{U} : U$ — окрестность $x\} = \{x\}$, и поскольку $x \notin K$, семейство

$$\mathscr{U} = \{X \setminus \overline{U} : U \text{ — окрестность точки } x \text{ в } X\}$$

представляет собой открытое покрытие компакта K. Пусть $\{X \setminus \overline{U}_1, \dots, X \setminus \overline{U}_n\}$ — его конечное подпокрытие. Тогда множество $U_1 \cap \dots \cap U_n$ — окрестность точки x, не пересекающая K, в противоречие с условием $x \in \overline{K}$. $\square$

Теорема

Любое замкнутое подпространство компактного пространства компактно.

Доказательство. Пусть K — компактное пространство и $X \subset K$ — его замкнутое подпространство. Рассмотрим любое центрированное семейство $\mathscr{F}$ замкнутых подмножеств пространства X. Поскольку X замкнуто в K, $\mathscr{F}$ является также и центрированным семейством замкнутых подмножеств K, так что $\bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing$. $\square$

Теорема

Любое бесконечное множество в компактном пространстве X имеет точку накопления.

Доказательство. Пусть $A \subset X$ не имеет точек накопления. Тогда у любой точки $x \in \overline{A}$ найдётся открытая окрестность U_x в X, пересечение которой с A конечно. $\overline{A}$ компактно, и семейство $\{U_x \cap \overline{A} : x \in \overline{A}\}$ является его открытым покрытием. Выделим из него конечное подпокрытие $\{U_{x_1} \cap \overline{A}, \ldots, U_{x_k} \cap \overline{A}\}$. Из того, что $U_{x_1} \cap \overline{A} \cup \cdots \cup U_{x_k} \cap \overline{A} = \overline{A}$ и все множества $U_{x_i} \cap \overline{A}$ конечны, вытекает, что множество $\overline{A}$ (а значит, и A) конечно. □

Следствие

Компактное пространство не содержит бесконечных замкнутых дискретных подпространств.

Доказательство. Из теоремы следует, что любое бесконечное множество в компактном пространстве имеет предельную точку. Множество Y в топологическом пространстве X замкнуто и дискретно $\iff$ Y не имеет предельных точек в X. □

Теорема

Всякий непрерывный образ компактного пространства K компактен.

Доказательство. Пусть $f\colon K \xrightarrow{\text{на}} X$ непрерывно, $\mathscr{U}$ — открытое покрытие X. Тогда $\{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}\}$ — открытое покрытие K. Оно содержит конечное подпокрытие $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$, и $\{U_1, \dots, U_n\}$ — подпокрытие $\mathscr{U}$. □

Следствие

Всякое непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово пространство замкнуто и, следовательно, факторно.

Доказательство. Пусть $f\colon K \to X$ — непрерывное отображение компактного пространства в хаусдорфово. Любое замкнутое множество $F \subset K$ компактно, и $f(F)$ компактно и, значит, замкнуто в X. □

Следствие

Любая непрерывная биекция из компактного пространства в любое хаусдорфово пространство является гомеоморфизмом.

Теорема

Любая непрерывная функция на компактном пространстве ограничена.

Доказательство. Если $f\colon X \to \mathbb{R}$ — неограниченная непрерывная функция, то $\{f^{-1}\big((-n, n)\big) : n \in \mathbb{N}\}$ — открытое покрытие X, из которого нельзя выделить конечное подпокрытие. $\square$

Предложение

Во всяком хаусдорфовом пространстве любые точка и не содержащее её компактное множество имеют непересекающиеся окрестности.

Доказательство. Пусть $X \in T_2$, $K \subset X$ компактно и $x \in X \setminus K$. $\forall y \in K$ зафиксируем открытые $U_y \ni y$ и $V_y \ni x$, $U_y \cap V_y = \varnothing$. Пусть $\{U_{y_1}, \ldots, U_{y_n}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_y : y \in K\}$ компакта K. Ясно, что $U = \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_{y_i}$ — окрестность K, $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} V_{y_i}$ — окрестность x и $U \cap V = \varnothing$. □

Предложение

Во всяком T_3-пространстве любые два непересекающихся множества, одно из которых компактно, а другое замкнуто, имеют непересекающиеся окрестности.

Доказательство. Пусть $X \in T_3$, $K \subset X$ компактно, $F \subset X$ замкнуто и $K \cap F = \varnothing$. $\forall x \in K$ зафиксируем открытые $U_x \ni x$ и $V_x \supset F$, $U_x \cap V_x = \varnothing$. Пусть $\{U_{x_1}, \ldots, U_{x_n}\}$ — подпокрытие открытого покрытия $\{U_x : x \in K\}$ множества K. Тогда $U = \bigcup\limits_{i \leqslant n} U_{x_i}$ — окрестность K, $V = \bigcap\limits_{i \leqslant n} V_{x_i}$ — окрестность F и $U \cap V = \varnothing$. □

Теорема

Всякий компакт нормален.

Предложение

Во всяком $T_{3\frac{1}{2}}$-пространстве X для любых непересекающихся компактного множества K и замкнутого множества F существует непрерывная функция $f: X \to [0,1]$, тождественно равная 0 на K и 1 на F.

Доказательство. Для каждой точки $x \in K$ возьмём непрерывную функцию $f_x: X \to [0,1]$, принимающую значение 0 в точке x и тождественно равную 1 на F, и положим $U_x = f_x^{-1}\big([0,\frac{1}{2})\big)$. Из открытого покрытия $\{U_x : x \in K\}$ компактного множества K выделим конечное подпокрытие $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$. Функция $g = \min(f_1, \dots, f_n)$, определённая правилом $g(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$, непрерывна, причём $g(K) \subset [0, \frac{1}{2})$ и $g(F) \subset \{1\}$. Осталось положить $f(x) = \max\big\{2\big(g(x) - \frac{1}{2}\big), 0\big\}$ для всех $x \in X$. $\square$

Теорема Тихонова о компактности произведений

Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *непустых пространств компактно тогда и только тогда, когда все* X_α *компактны.*

Доказательство. *Необходимость* $\Longleftarrow$ непрерывность всех $\pi_\beta\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_\beta$.

Достаточность. Пусть все X_α компактны и $\mathscr{U}$ — любой ультрафильтр на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Нужно показать: $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке x. Для каждого $\alpha \in A$ положим $\mathscr{U}_\alpha = \{Y \subset X_\alpha : \pi_\alpha^{-1}(Y) \in \mathscr{U}\}$. Это ультрафильтр на X_α, и поскольку X_α компактно, $\mathscr{U}_\alpha$ сходится к некоторой точке $x_\alpha \in X_\alpha$. Положим $\mathrm{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$. Пусть U — любая окрестность точки x в $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Она содержит каноническую окрестность $\prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha$. Пусть $V_\alpha = X_\alpha$ для $\alpha \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Для каждого $i \leqslant n$ $\mathscr{U}_{\alpha_i} \to x_{\alpha_i}$, поэтому $V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$ и $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_{\alpha_i}) \in \mathscr{U}$. Определение фильтров $\Longrightarrow$ $\prod\limits_{\alpha\in A} V_\alpha = \bigcap\limits_{i\leqslant n} \pi_{\alpha_i}^{-1} V_{\alpha_i} \in \mathscr{U}$ и $U \in \mathscr{U}$. □

Произведение любого семейства хаусдорфовых пространств хаусдорфово, поэтому из теоремы Тихонова немедленно вытекает такое утверждение (его называют также *хаусдорфовой версией теоремы Тихонова*):

Следствие

Произведение любого семейства компактов является компактом.

Следствие

Пусть X — $T_{3\frac{1}{2}}$-пространство и K — его компактное подмножество. Тогда

1. *у любой непрерывной функции $f: K \to [-1,1]$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}: X \to [-1,1]$;*
2. *у любой непрерывной функции $f: K \to \mathbb{R}$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}: X \to \mathbb{R}$.*

Доказательство. Теоремы Тихонова $\implies$ $X \subset [0,1]^\kappa$, где $\kappa = w(x)$, и $[0,1]^\kappa$ компактно, а значит, и нормально. Поскольку $K \subset X \subset [0,1]^\kappa$ и любой компакт замкнут в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве, мы можем применить теорему Титце–Урысона. □

Теорема Бэра о категории

В любом компакте X пересечение $G = \bigcap\limits_{i \in \mathbb{N}} G_i$ любой последовательности $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ всюду плотных открытых множеств всюду плотно.

Доказательство. Возьмём непустое $U \subset X$. G_1 открыто и плотно $\implies$ существует открытое $U_1 \neq \varnothing$ такое, что $\overline{U}_1 \subset U \cap G_1$. Аналогично существует открытое $U_2 \neq \varnothing$ такое, что $\overline{U}_2 \subset U_1 \cap G_2$, и т.д. В результате мы получим последовательность $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ непустых отрытых множеств с тем свойством, что $\overline{U}_{n+1} \subset U_n \cap G_{n+1}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, семейство $\{\overline{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ центрировано. X компактно $\implies$ $\bigcap \overline{U}_n \neq \varnothing$. По построению $\bigcap \overline{U}_n \subset U \cap G$. U произвольно $\implies$ множество G всюду плотно. □

Двойственная формулировка:

В любом компакте дополнение до объединения любой последовательности нигде не плотных множеств всюду плотно.

Определение

Множества первой категории (тощие множества) — это те множества, которые можно представить в виде счётного объединения нигде не плотных множеств; все прочие множества называются множествами второй категории (тучными). Пространства, которые являются тощими (тучными) множествами в себе, называют пространствами первой (второй) категории. О пространстве, в котором всякое тощее множество имеет пустую внутренность, говорят, что оно обладает свойством Бэра.

Любое пространство со свойством Бэра является пространством второй категории, но не наоборот: пример — подпространство $\mathbb{Q} \cup [0,1]$ вещественной прямой.

В этой терминологии теорема Бэра звучит так:

Всякий компакт обладает свойством Бэра.