Помимо тихоновского и гильбертова куба бывает ещё гильбертов кирпич — это подпространство $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\left[0,\frac{1}{2^k}\right]$ гильбертова пространства $\ell^2=\left\{\mathrm{x}=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}:\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n^2<\infty\right\}$ (скалярное произведение в нём определено правилом $(\mathrm{x},\mathrm{y})=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}x_n\cdot y_n$). Скалярное произведение стандартным образом порождает норму, а норма — метрику на $\prod\limits_{k\in\mathbb{N}}\left[0,\frac{1}{2^k}\right]$; легко проверить, что эта метрика порождает топологию тихоновского произведения. Так как все отрезки $\left[0,\frac{1}{2^k}\right]$ гомеоморфны друг другу и отрезку $[0,1]$, заключаем, что гильбертов кирпич с метрической топологией гомеоморфен гильбертову кубу $[0,1]^{\aleph_0}$.

Из этих рассуждений следует, что куб $[0,1]^{\aleph_0}$ метризуем.

**Метризационная теорема Урысона**

Топологическое пространство со счётной базой метризуемо тогда и только тогда, когда оно регулярно.

## Обратные спектры и проективные пределы

Конструкция предела обратного спектра родственна конструкции предела прямого спектра, только все отображения в обратных спектрах направлены в обратную сторону, и вместо факторпространства суммы в определении предела фигурирует подпространство произведения.

Пусть $(A, \leqslant)$ — направленное множество и $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ — семейство топологических пространств. Предположим, что для любых $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \leqslant \beta$, определены непрерывные отображения $\pi_\alpha^\beta\colon X_\beta \to X_\alpha$ с такими свойствами:

- $\pi_\alpha^\alpha = \mathrm{id}_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$ — тождественное отображение для любого $\alpha$;
- $\pi_\alpha^\gamma = \pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta^\gamma$ для любых $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

Такие отображения $\pi_\alpha^\beta$ называются ***проекциями***, а семейство пространств и отображений $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in A, \alpha \leqslant \beta\}$ называется ***обратным спектром*** над $A$. ***Проективным***, или ***обратным***, пределом этого семейства, или ***пределом обратного спектра***, называется подпространство произведения

$$\varprojlim X_\alpha = \{(x_\alpha)_{\alpha \in A} : \pi_\beta^\gamma(x_\gamma) = x_\beta \text{ для любых } \beta, \gamma \in A,\ \beta \leqslant \gamma\} \subset \prod X_\alpha.$$

**Предложение**

Предел обратного спектра $\{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta : \alpha, \beta \in A, \alpha \leqslant \beta\}$ хаусдорфовых пространств есть замкнутое подпространство произведения $\prod X_\alpha$.

Доказательство. Для $\alpha \leqslant \beta$ положим $S_{\alpha\beta} = \Big\{(x_\gamma)_{\gamma\in A} \in \prod\limits_{\gamma\in A} X_\gamma : \pi_\alpha^\beta(x_\beta) = x_\alpha\Big\}$.

Каждое множество $S_{\alpha\beta}$ замкнуто, так как оно состоит из точек совпадения непрерывных отображений $\pi_\alpha^\beta \circ \pi_\beta \colon \prod\limits_{\gamma\in A} X_\gamma \to X_\alpha$ и $\pi_\alpha \colon \prod\limits_{\gamma\in A} X_\gamma \to X_\alpha$ (здесь $\pi_\beta$ и $\pi_\alpha$ — канонические проекции произведения на сомножители) и все пространства $X_\alpha$ хаусдорфовы. Значит, пересечение $\varprojlim X_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\beta} S_{\alpha\beta}$ тоже замкнуто. □

Пусть $A$ — бесконечное множество и $X_\alpha$, $\alpha \in A$, — любые пространства. Семейство $\mathscr{F}$ всех конечных подмножеств $A$ направлено отношением $\subset$. Для каждого $F \in \mathscr{F}$ положим $X_F = \prod\limits_{\alpha \in F} X_\alpha$. Для любых $F, G \in \mathscr{F}$, $F \subset G$, определено отображение $\pi^G_F \colon X_G \to X_F$ сужения элементов произведения $X_G$ (которые, напомним, суть отображения $G \to \bigcup\limits_{\alpha \in G} X_\alpha$) на $F \subset G$, причём это отображение непрерывно. Мы получили обратный спектр $\{X_F, \pi^G_F : F, G \in \mathscr{F}, F \subset G\}$. Для каждого $\alpha \in A$ положим $F_\alpha = \{\alpha\} \in \mathscr{F}$. Несложно показать, что отображение $\lim_{\longleftarrow} X_F \to \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, определённое правилом $(x_F)_{F \in \mathscr{F}} \mapsto (x_{F_\alpha})_{\alpha \in A} = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$, — гомеоморфизм. Следовательно, применяя операцию перехода к пределу обратного спектра, можно выражать бесконечные произведения через конечные.

## Гиперпространства

Для любого пространства $X$ определено тихоновское произведение $2^X$ (где 2 понимается в обычном смысле — как дискретное пространство $\{0,1\}$). Однако топология произведения на $2^X$ зависит только от мощности пространства $X$ и совершенно никак не связана с его топологией. Поэтому экспоненту снабжают не топологией тихоновского произведения, а специальной топологией, которая называется *экспоненциальной топологией*, или *топологией Вьеториса*. Её предбазу составляют множества вида $\{Y \subset X : Y \subset U\}$ и $\{Y \subset X : Y \cap V \neq \varnothing\}$, где $U$ и $V$ — открытые подмножества $X$. Базу топологии Виеториса составляют множества вида $\langle U_1, \ldots, U_n\rangle = \{F \subset X : F \subset U_1 \cup \cdots \cup U_n, F \cap U_i \neq \varnothing$ для $i \leqslant n\}$, где $n \in \mathbb{N}$ и $U_1, \ldots, U_n$ — произвольные открытые подмножества $X$.

Пространство всех подмножеств $X$ с топологией Вьеториса редко бывает хаусдорфовым, поэтому обычно вместо семейства всех подмножеств пространства $X$ рассматривают семейство $\mathrm{Cl}(X)$ всех его непустых замкнутых подмножеств. Это семейство, снабжённое топологией Вьеториса, называется *экспоненциальным пространством* пространства $X$ и обозначается $\exp X$. Часто используют и обозначение $2^X$.

Топология Вьеториса обладает тем замечательным свойством, что естественное отображение $i\colon X \to \mathrm{Cl}(X)$, определённое правилом $i(x) = \overline{\{x\}}$, является гомеоморфным вложением относительно этой топологии. На семействе $\mathrm{Cl}(X)$ могут существовать и другие топологии с этим свойством. Множество $\mathrm{Cl}(X)$, снабжённое любой такой топологией, называется *гиперпространством* над $X$. Таким образом, экспоненциальное пространство $\exp X$ — частный случай гиперпространства.

В связи с гиперпространствами естественно возникает понятие *многозначного отображения* $F\colon X \to Y$ — отображения, которое каждой точке множества $X$ ставит в соответствие некоторое подмножество множества $Y$. Иными словами, многозначное отображение $X \to Y$ — это отображение $X \to \mathscr{P}(Y)$.

Пусть $X$ и $Y$ — топологические пространства. Многозначное отображение $F\colon X \to Y$, которое каждой точке $x \in X$ ставит в соответствие замкнутое подмножество $F(x)$ пространства $Y$, называется *полунепрерывным снизу (сверху)*, если для любого открытого множества $U \subset Y$ множество $\{x \in X : F(x) \cap U \neq \varnothing\}$ (множество $\{x \in X : F(x) \subset U\}$) открыто в $X$. Отображение $f\colon X \to \exp Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда многозначное отображение $F\colon X \to Y$, определённое правилом $F(x) = f(x)$, полунепрерывно снизу и сверху.

Если топология $X$ определяется ограниченной метрикой $d$, то на пространстве $\exp X$ возникает метрика, определённая правилом

$$d_H(A, B) = \max\left\{\sup_{x\in A} d(x, B), \sup_{y\in B} d(y, X)\right\}$$

для $A, B \in \exp X$. Эта метрика называется ***метрикой Хаусдорфа***. Расстояние Хаусдорфа между $A$ и $B$ равно минимальному числу $\delta$ с тем свойством, что $A$ содержится в замкнутой $\delta$-окрестности множества $B$, а $B$ содержится в замкнутой $\delta$-окрестности множества $A$. Вообще говоря, топология, порождённая метрикой Хаусдорфа на $\exp X$, может отличаться от топологии Вьеториса, но если $X$ компактно, то эти топологии совпадают.

### Теорема Майкла о селекции

*Пусть $X$ — паракомпактное пространство, $Y$ — банахово пространство и $F\colon X \to Y$ — полунепрерывное снизу многозначное отображение такое, что для каждого $x \in X$ $F(x)$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $Y$. Тогда существует непрерывная селекция многозначного отображения $F$, т.е. непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ с тем свойством, что $f(x) \in F(x)$ для каждого $x \in X$.*

### Определение

Пусть $X$ — произвольное множество и $Y \subset X$. Покрытие множества $Y$ — это любое индексированное семейство $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ подмножеств $X$, которое покрывает $Y$, т.е. удовлетворяет условию $\bigcup \mathscr{C} \supset Y$.

Если $X$ — топологическое пространство и покрытие состоит из открытых (замкнутых, открыто-замкнутых) множеств, то его называют открытым (замкнутым, открыто-замкнутым) покрытием.

Пусть $\mathscr{C}'$ — ещё одно покрытие $Y$. Говорят, что $\mathscr{C}'$ вписано в $\mathscr{C}$, и пишут $\mathscr{C}' \leqslant \mathscr{C}$ или $\mathscr{C}' \prec \mathscr{C}$, если всякий элемент $C'$ покрытия $\mathscr{C}'$ содержится в некотором $C \in \mathscr{C}$. Покрытие $\mathscr{C}'$ комбинаторно вписано в $\mathscr{C}$, или является ужатием покрытия $\mathscr{C}$, если оба покрытия заиндексированы элементами одного и того же множества $A$ (т.е. $\mathscr{C} = \{C_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\mathscr{C}' = \{C'_\alpha : \alpha \in A\}$) и $C'_\alpha \subset C_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$.

Частный случай вписанного покрытия — подпокрытие: семейство $\mathscr{C}' \subset \mathscr{C}$ называется подпокрытием покрытия $\mathscr{C}$, если оно само является покрытием, т.е. $\bigcup \mathscr{C}' \supset Y$.

Как правило, мы будем рассматривать ситуации, когда $Y = X$.

**Замечание**

Иногда вместо покрытия множества $X$ удобнее рассматривать двойственное семейство, состоящее из всех дополнений до элементов покрытия. Законы де Моргана $\implies$ семейство $\mathscr{C}$ подмножеств $X$ является покрытием множества $X$ тогда и только тогда, когда двойственное семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus C : C \in \mathscr{C}\}$ имеет пустое пересечение.

### Определение

Топологическое пространство **компактно**, если любое его открытое покрытие содержит конечное открытое подпокрытие. Хаусдорфовы компактные пространства называются **компактами**.

### Определение′

Топологическое пространство **компактно**, если любое центрированное семейство его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.

### Предложение

*Пусть $X$ — топологическое пространство и $\mathscr{B}$ — его база. Тогда $X$ компактно $\iff$ любое открытое покрытие $X$ элементами $\mathscr{B}$ содержит конечное подпокрытие.*

**Доказательство.** Пусть $\mathscr{U} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ — открытое покрытие $X$. $\forall x \in X$ выберем $U_{\alpha(x)} \in \mathscr{U}$, содержащий $x$, и зафиксируем $V_x \in \mathscr{B}$: $x \in V_x \subset U_{\alpha(x)}$. Семейство $\{V_x : x \in X\}$ — открытое покрытие $X$ элементами $\mathscr{B}$. Пусть $\{V_{x_1}, \ldots, V_{x_n}\}$ — конечное подпокрытие. $V_{x_i} \subset U_{\alpha(x_i)} \implies U_{\alpha(x_1)} \cup \cdots \cup U_{\alpha(x_n)} = X$. $\square$

**Теорема**

*Топологическое пространство $X$ компактно тогда и только тогда, когда всякий ультрафильтр на множестве $X$ сходится.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $\mathscr{U}$ — ультрафильтр на $X$, который не сходится ни к одной точке $x \in X$. Тогда у любой точки $x \in X$ есть открытая окрестность $U_x$, не принадлежащая $\mathscr{U}$. Эти окрестности образуют открытое покрытие компактного пространства $X$; пусть $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_m}\}$ — его конечное подпокрытие. Имеем $U_{x_i} \in \mathscr{U}$ для некоторого $i \leqslant m$, однако по построению $U_{x_i} \notin \mathscr{U}$ для всех $i$.

*Достаточность.* Если существует открытое покрытие $\mathscr{V}$ пространства $X$, которое не содержит конечного подпокрытия, то семейство $\mathscr{F} = \{X \setminus V : V \in \mathscr{V}\}$ центрировано. Семейство $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$ на $X$. По условию $\mathscr{U}$ сходится к некоторой точке $x$. Пусть $V$ — содержащий эту точку элемент покрытия $\mathscr{V}$. Тогда $V \in \mathscr{U}$, поскольку $\mathscr{U} \to x$, и $X \setminus V \in \mathscr{U}$ по определению семейства $\mathscr{F} \subset \mathscr{U}$. Противоречие. □