Предложение

Пусть X_α, $\alpha \in A$, — непустые топологические пространства.
1. *Для каждого $\beta \in A$ пространство X_β вкладывается в топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в качестве подпространства.*
2. *Если все X_α — T_1-пространства, то для каждого $\beta \in A$ X_β вкладывается в $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ в качестве замкнутого подпространства.*

Доказательство. Выберем по точке x_α^* в каждом пространстве X_α.

Для каждого $\beta \in A$ положим $X_\beta^* = \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$, где $Y_\beta = X_\beta$ и $Y_\alpha = \{x_\alpha^*\}$ для $\alpha \neq \beta$. Сужение $\pi_\beta\big|_{X_\beta^*} : X_\beta^* \to X_\beta$ — гомеоморфизм. Значит, отображение $\left(\pi_\beta\big|_{X_\beta^*}\right)^{-1}$, рассматриваемое как отображение в $\prod X_\alpha \supset X_\beta^*$, — гомеоморфное вложение.

Если все X_α являются T_1-пространствами, то $\{x_\alpha^*\}$ замкнуты в X_α для всех $\alpha \in A$, и подпространства X_β^* замкнуты в $\prod X_\alpha$ для всех $\beta \in A$. $\square$

Определение

Говорят, что топологическое свойство $\mathscr{P}$ мультипликативно (конечно мультипликативно, счётно мультипликативно, κ-мультипликативно для кардинала κ), если для любого индексного множества A (любого конечного A, любого счётного A, любого A мощности $\leqslant \kappa$) и любых топологических пространств X_α, $\alpha \in A$, со свойством $\mathscr{P}$ топологическое произведение $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ тоже обладает свойством $\mathscr{P}$.

Нормальность не мультипликативна и даже не конечно мультипликативна (стрелка Зоргенфрея).

Теорема

Топологическое произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *удовлетворяет аксиоме отделимости* T_i, $i \leqslant 3\frac{1}{2}$, *тогда и только тогда, когда* $X_\alpha \in T_i$ *для всех* $\alpha \in A$.

Если $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ *нормально, то все* X_α *нормальны.*

Доказательство. То, что произведение T_i-пространств является T_i-пространством для $i \leqslant 2$, видно из описания предбазы.

Покажем, что произведение T_3-пространств удовлетворяет аксиоме T_3. Пусть $x \in \prod X_\alpha$ и U — любая окрестность x в $\prod X_\alpha$. Возьмём элемент $\prod U_\alpha$ канонической базы произведения $\prod X_\alpha$, содержащийся в U и содержащий x. Число тех координат α, для которых $U_\alpha \neq X_\alpha$, конечно; пусть это координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Для каждого $i \leqslant n$ найдём окрестность V_{α_i} точки x_{α_i} в X_{α_i} такую, что $\overline{V_{\alpha_i}} \subset U_{\alpha_i}$. Для $\alpha \neq \alpha_i$, $i \leqslant n$, положим $V_\alpha = X_\alpha$. Тогда $\prod V_\alpha$ — каноническая окрестность точки (x_α) и $\prod \overline{V_\alpha} \subset \prod U_\alpha \subset U$. Значит, $\overline{\prod U_\alpha} \subset U$.

Докажем выполнение $T_{3\frac{1}{2}}$ для произведения $T_{3\frac{1}{2}}$-пространств. Для точки $(x_\alpha) \in \prod X_\alpha$ и любой её окрестности U найдём каноническую окрестность $\prod U_\alpha \subset U$ точки (x_α). Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ таковы, что $U_\alpha = X_\alpha$ для всех $\alpha \neq \alpha_i$, $i \leqslant n$. Для каждого $i \leqslant n$ возьмём непрерывную функцию $f_{\alpha_i}\colon X_{\alpha_i} \to [0,1]$ такую, что $f_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = 0$ и $f_{\alpha_i}(X_{\alpha_i} \setminus U_{\alpha_i}) \subset \{1\}$. Положим $g_{\alpha_i} = f_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i}$ и $g = \max\{g_{\alpha_i} : i \leqslant n\}$. Мы получили непрерывную функцию $g\colon \prod X_\alpha \to [0,1]$ с тем свойством, что $g\big((x_\alpha)\big) = 0$ и $g\big(\prod X_\alpha \setminus U\big) \subset g\big(\prod X_\alpha \setminus \prod U_\alpha\big) \subset \{1\}$, что и требовалось.

Мы показали, что для $i \leqslant 3\frac{1}{2}$ произведение T_i-пространств тоже является T_i-пространством. То, что все сомножители в произведении, удовлетворяющем аксиоме T_i, где $i \leqslant 4$, удовлетворяют той же аксиоме, вытекает из того, что замкнутые подпространства T_4-пространств являются T_4-пространствами. $\square$

Теорема

Первая и вторая аксиомы счётности счётно мультипликативны.

Теорема (Хьюитта–Марчевского–Пондицери)

Пусть κ *— бесконечный кардинал. Если* A *— множество мощности* $\leqslant 2^\kappa$ *и для каждого* $\alpha \in A$ X_α *— топологическое пространство со свойством* $d(X_\alpha) \leqslant \kappa$*, то* $d\left(\prod X_\alpha\right) \leqslant \kappa$*.*

В частности, сепарабельность $2^{\aleph_0}$*-мультипликативна.*

Марчевский и Пондицери доказали также, что если $|A| > 2^\kappa$ и для каждого $\alpha \in A$ пространство X_α содержит хотя бы две точки, то $d\left(\prod X_\alpha\right) > \kappa$.

Теорема

Если семейство пространств $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ *таково, что для любого конечного множества индексов* $F \subset A$ *произведение* $\prod_{\alpha \in F} X_\alpha$ *обладает свойством Суслина, то и всё произведение* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *обладает этим свойством.*

Следствие

Любое произведение сепарабельных пространств обладает свойством Суслина.

Доказательство. Достаточно заметить, что сепарабельность конечно мультипликативна, и всякое сепарабельное пространство обладает свойством Суслина. □

Отображения топологических пространств в произведения

Предложение

Отображение $f : X \to \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ *непрерывно тогда и только тогда, когда композиция* $\pi_\alpha \circ f$ *непрерывна для каждого* $\alpha \in A$.

Доказательство. Доказательства требует только непрерывность f в предположении непрерывности всех композиций $\pi_\alpha \circ f$. Рассмотрим предбазу

$$\mathscr{B} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A,\ U \text{ открыто в } X_\alpha\}$$

топологии произведения $\prod X_\alpha$. Для каждого $\alpha \in A$ имеем $f^{-1}\bigl(\pi_\alpha^{-1}(U)\bigr) = (\pi_\alpha \circ f)^{-1}(U)$, а это множество открыто в силу непрерывности отображения $\pi_\alpha \circ f$. $\square$

Теорема

Декартово произведение $\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha \colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ *любого семейства непрерывных отображений* $f_\alpha \colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, *непрерывно.*

Доказательство. Для каждого $\beta \in A$ обозначим каноническую проекцию произведения $\prod X_\alpha$ на X_β через π^X_β, а каноническую проекцию произведения $\prod Y_\alpha$ на Y_β — через π^Y_β. Очевидно, для всех $\beta \in A$ имеем

$$\pi^Y_\beta \circ \prod\nolimits_{\alpha\in A} f_\alpha = f_\beta \circ \pi^X_\beta,$$

а отображения $f_\beta \circ \pi^X_\beta$ непрерывны как композиции непрерывных отображений. $\square$

Теорема

Диагональное произведение $\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha \colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ *любого семейства непрерывных отображений* $f_\alpha \colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, *одного и того же пространства* X *в пространства* Y_α, $\alpha \in A$, *непрерывно.*

Доказательство. Действительно, для каждого $\alpha \in A$ имеем $\pi_\alpha \circ f = f_\alpha$. $\square$

Замечание

Для любого семейства отображений $f_\alpha\colon X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, и любых множеств $X'_\alpha \subset X_\alpha$ и $Y'_\alpha \subset Y_\alpha$ имеем

$$\left(\prod f_\alpha\right)\left(\prod X'_\alpha\right) = \prod f_\alpha(X'_\alpha) \quad \text{и} \quad \left(\prod f_\alpha\right)^{-1}\left(\prod Y'_\alpha\right) = \prod f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha),$$
$$\left(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha\right)(X') \subset \prod_{\alpha\in A} f_\alpha(X') \quad \text{и} \quad \left(\Delta_{\alpha\in A} f_\alpha\right)^{-1}\left(\prod_{\alpha\in A} Y'_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} f_\alpha^{-1}(Y'_\alpha).$$

Замечание

Для семейства отображений $f_\alpha\colon X \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, диагональное произведение Δf_α есть композиция диагонального произведения $i = \Delta^A \operatorname{id}_X\colon X \to X^A$ $|A|$ экземпляров тождественного отображения $X \to X$ и декартова произведения $\prod f_\alpha\colon X^A \to \prod Y_\alpha$. Образ $\Delta = i(X) \subset X^A$ называется диагональю произведения X^A:

$$\Delta = \{(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X^A : x_\alpha = x_\beta \text{ для любых } \alpha, \beta \in A\} =$$
$$= \bigcap_{\beta,\gamma\in A} \{x \in X^A : \pi_\beta(x) = \pi_\gamma(x)\}.$$

X хаусдорфово $\iff$ диагональ Δ замкнута в произведении X^A.

Вложения топологических пространств в произведения

Определение

Пусть X — множество и $\{Y_\alpha : \alpha \in A\}$. Семейство отображений $\mathscr{F} = \{f_\alpha \colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки множества X, если $\forall x, y \in X$, $x \neq y$, найдётся $\alpha \in A$, для которого $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$.

Если при этом X и все X_α — топологические пространства и для каждой точки $x \in X$ и любого замкнутого $F \subset X$, $F \not\ni x$, существует $\alpha \in A$ такое, что $f_\alpha(x) \notin \overline{f_\alpha(F)}^{X_\alpha}$, то семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества в X.

$X \in T_0$, $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества $\implies$ $\mathscr{F}$ разделяет точки.

Теорема о диагональном произведении

Если семейство непрерывных отображений $\mathscr{F} = \{f_\alpha \colon X \to Y_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки X, то $f = \Delta\, f_\alpha \colon X \to \prod Y_\alpha$ инъективно. Если, сверх того, семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то f — гомеоморфное вложение.

В частности, если существует $\alpha \in A$, для которого f_α — гомеоморфное вложение, то f — тоже гомеоморфное вложение.

Лемма

Если непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств инъективно и одноэлементное семейство $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества, то f — гомеоморфное вложение.

Доказательство. Нам нужно доказать, что подотображение отображения f с областью значений $f(X)$, т.е. отображение $\check{f}\colon X \to f(X)$, определённое правилом $\check{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in X$, является гомеоморфизмом. Поскольку отображение $\check{f}$ непрерывно и взаимно однозначно по предположению, достаточно проверить, что оно замкнуто, или, другими словами, что для каждого замкнутого множества $F \subset X$

$$\check{f}(F) = \overline{\check{f}(F)}^{f(X)}, \qquad \text{т.е.} \qquad f(F) = f(X) \cap \overline{f(F)}^{Y}. \tag{$\star$}$$

Пусть F — замкнутое множество в X. Если $y = f(x) \in f(X) \setminus f(F)$, то $x \notin F$ и $y = f(x) \notin \overline{f(F)}^{Y}$, поскольку $\{f\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Следовательно, правая часть равенства $(\star)$ содержится в левой. Обратное включение очевидно. □

Доказательство теоремы. Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки, то для каждой пары различных точек $x, y \in X$ существует такое $f_\alpha \in \mathscr{F}$, что $f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y)$. Таким образом, $f(x) \neq f(y)$, а это и означает, что f инъективно.

Если семейство $\mathscr{F}$ разделяет точки и замкнутые множества, то семейство $\{f\}$ тоже обладает этим свойством, так как если $f(x) \in \overline{f(F)}$ для некоторого $F \subset X$, то

$$f_\alpha(x) = \pi_\alpha(f(x)) \in \pi_\alpha(\overline{f(F)}) \subset \overline{\pi_\alpha(f(F))} = \overline{f_\alpha(F)}$$

для каждого $\alpha \in A$. Осталось применить лемму. $\square$

Следствие

Диагональ любой степени X^A топологического пространства X гомеоморфна этому пространству.

Определение

Тихоновским кубом называется топологическое произведение вида $[0,1]^\kappa$, где κ — любой бесконечный кардинал. Тихоновский куб $[0,1]^{\aleph_0}$ называется также гильбертовым кубом.

Теорема Тихонова о вложении

Всякое тихоновское пространство веса $\kappa \geqslant \aleph_0$ вкладывается в тихоновский куб $[0,1]^\kappa$.

Доказательство. Пусть X — тихоновское пространство и $w(X) = \kappa \geqslant \aleph_0$. Поскольку $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, семейство всех дополнений до прообразов 1 при непрерывных функциях $X \to [0,1]$) составляет базу пространства X, и поскольку $w(X) = \kappa$, из этой базы можно выделить базу $\mathscr{B}$ мощности κ. Пусть $\mathscr{B} = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$, где $|A| = \kappa$. Для каждого $\alpha \in A$ возьмём непрерывную функцию $f_\alpha\colon X \to [0,1]$, для которой $U_\alpha = f_\alpha^{-1}([0,1))$.

Семейство $\mathscr{F} = \{f_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества: если $x \in X$ и $F \subset X$ — не содержащее точку x замкнутое множество, то найдётся окрестность $U_\alpha \in \mathscr{B}$ этой точки, не пересекающая F. Соответствующая функция f_α переводит F в 0, причём $f_\alpha(x) \neq 0$, поскольку $f_\alpha(U_\alpha) \subset [0,1)$ и $x \in U_\alpha$. Значит, $f(x) \notin \overline{f(F)}$.

Поскольку $X \in T_1$, $\mathscr{F}$ разделяет точки. По теореме о диагональном произведении $\Delta\, f_\alpha\colon X \to [0,1]^A = [0,1]^\kappa$ — гомеоморфное вложение. $\square$

Замечание

Вес тихоновского куба $[0,1]^\kappa$ равен κ. Действительно, из того, что $w([0,1]) = \aleph_0$, немедленно вытекает, что каноническая предбаза, а значит, и каноническая база произведения $[0,1]^\kappa$ имеет мощность κ. Значит, вес $[0,1]^\kappa$ не больше κ. Но он не может быть и меньше κ — ведь мы только что доказали, что любое тихоновское пространство веса κ (в частности, дискретное пространство мощности κ) вкладывается в $[0,1]^\kappa$, а вес подпространства не может быть больше веса самого пространства. Следовательно, $w([0,1]^\kappa) = \kappa$, и теорему о вложении в тихоновский куб можно сформулировать так: любое бесконечное тихоновское пространство вкладывается в тихоновский куб того же веса.