Система аксиом ZFC

Аксиома существования: множества существуют.

(В виде формулы эта аксиома может выглядеть так: $\exists x(x = x)$.)

Аксиома объёмности: два множества равны тогда и только тогда, когда они имеют одни и те же элементы, т.е. каждый элемент одного множества принадлежит другому и наоборот.

Аксиома пары: для любых множеств x и y существует множество $z = \{x, y\}$, состоящее из двух элементов — x и y (*неупорядоченная пара* элементов x и y).

Аксиома объединения: для любого множества x существует множество $y = \bigcup x$ — объединение множеств-элементов x; его элементами являются в точности все элементы элементов множества x.

Схема аксиом выделения: любому множеству x и любому свойству φ отвечает множество, состоящее в точности из тех элементов множества x, которые обладают свойством φ.

Из схемы аксиом выделения и аксиомы существования вытекает существование пустого множества, не имеющего вообще никаких элементов (оно обозначается $\varnothing$): достаточно в качестве $\varphi(t)$ взять $\neg(t = t)$.

Множество всех $y \in x$, обладающих свойством φ, обозначается $\{y \in x : \varphi(y)\}$. Когда рассматриваются элементы фиксированного множества x, иногда пишут $\{y : \varphi(y)\}$.

Схема аксиом подстановки: если $\varphi(u, v)$ — формула с двумя свободными переменными, причём для любого множества a существует единственное множество b такое, что $\varphi(a, b)$ — истинное высказывание, то для любого данного множества x определено множество y, элементами которого являются те и только те множества z, для которых $\varphi(a, z)$ истинно при некотором $a \in x$.

Здесь формулу φ можно воспринимать как класс-отображение, которое каждому a ставит в соответствие то единственное множество b, для которого высказывание $\varphi(a, b)$ истинно; тогда y — не что иное как образ множества x при этом «отображении».

Аксиома бесконечности: существует множество, которое содержит (в качестве элемента) $\varnothing$ и вместе с каждым элементом x содержит и элемент $S(x) = x \cup \{x\}$ ($x \cup \{x\}$ — множество, элементами которого являются все элементы множества x и само множество x).

Аксиома множества подмножеств: для любого множества x существует множество y, состоящее из всех подмножеств множества x; для него используются обозначения $\mathscr{P}(x)$, 2^x и $\exp x$.

Аксиома регулярности: каждое непустое множество x содержит элемент y такой, что $x \cap y = \varnothing$.

Аксиома выбора: для каждого множества x, состоящего из непересекающихся непустых элементов, существует множество, которое пересекается с каждым элементом множества x ровно по одному элементу.

Отношения и отображения

Аксиомы объёмности и пары дают возможность образовывать одноэлементное множество $\{x\}$ из любого множества x:

$$\{x\} = \{x, x\}.$$

Отсюда и из аксиомы пары вытекает, что для любых двух множеств x и y существует множество

$$\{\{x\}, \{x, y\}\};$$

оно называется упорядоченной парой элементов x и y и обозначается (x, y). При этом x называется первым элементом, а y — вторым элементом пары (x, y).

Знакомое всем понятие декартова произведения $X \times Y$ двух множеств X и Y определяется как множество всех упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$ и $y \in Y$. Подмножества декартова произведения называются бинарными отношениями, или просто отношениями, между X и Y. Отношение между X и X называется отношением на X. Важнейший частный случай отношения между множествами — отображение, а важнейший частный случай отношения на множестве — порядок.

Отображения

Отображение между множествами X и Y (ещё говорят «отображение множества X в Y» или «отображение из X в Y») — это любое подмножество f декартова произведения $X \times Y$ со свойствами

- $\forall x \in X \exists y \in Y ((x, y) \in f)$ и
- $((x, y) \in f) \wedge ((x, z) \in f) \to (y = z)$.

(Подмножества $X \times Y$, удовлетворяющие лишь второму условию, называются частичными отображениями.) Множество X называется областью определения отображения f, а множество Y — областью значений.

Для отображения f из X в Y с фиксированной областью значений Y используется обозначение $f \colon X \to Y$.

Образом $f(x)$ точки $x \in X$ при отображении f, или значением отображения f в точке x, называется та единственная точка $y \in Y$, для которой $(x, y) \in f$. Говорят при этом, что точка x переходит в точку y при отображении f, или что f переводит x в y, и пишут $x \mapsto y$. Определены также образ $f(A)$ множества $A \subset X$ при отображении f и полный прообраз $f^{-1}(B)$ множества $B \subset Y$:

$$f(A) = \{y \in Y : \exists x \in A((x, y) \in f)\},$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : \exists y \in B((x, y) \in f)\}.$$

Образ $f(X)$ всего множества X называется образом отображения f. Просто прообразом множества B называется любое множество $C \subset X$, для которого $f(C) = B$.

Иногда (когда ясно из контекста, что речь идёт именно о полном прообразе) слово «полный» опускают и называют полный прообраз просто прообразом. Если множество B одноточечно, т.е. $B = \{y\}$ для некоторого $y \in Y$, вместо $f^{-1}(\{y\})$ обычно пишут $f^{-1}(y)$ и говорят о (полном) прообразе точки y, имея в виду (полный) прообраз одноточечного множества $\{y\}$. В случае, когда этот прообраз тоже состоит из одной точки (а также когда речь идёт об обратном отображении — см. ниже), под $f^{-1}(y)$ часто подразумевают не сам прообраз, а его единственный элемент.

Отображение $f\colon X \to Y$ называется сюръективным, если $f(X) = Y$ (в этом случае иногда пишут $f\colon X \xrightarrow{\text{на}} Y$), и инъективным, если прообраз каждой точки $y \in Y$ содержит не более одной точки множества X. Отображение, одновременно являющееся сюръективным и инъективным, называется биективным, или взаимно однозначным. Сюръективные (инъективные, биективные) отображения называются также сюръекциями или наложениями (инъекциями или вложениями, биекциями).

Отображения во множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел называются функциями. Функция $f\colon X \to \mathbb{R}$ ограничена, если существует $M \in \mathbb{R}$ такое, что $|f(x)| \leqslant M$ для всех $x \in X$.

Простейший пример отображения — пустое отображение. Один из простейших примеров непустого отображения — тождественное отображение непустого множества X на себя; оно равно диагонали $\{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ декартова произведения $X \times X$ (переводит каждую точку множества X в себя). Для такого отображения используется обозначение id_X.

Свойства образов и прообразов отображений

Для любого отображения $f\colon X \to Y$ и любых множеств $A_1 \subset A_2 \subset X$

$$f(A_1) \subset f(A_2),$$

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2),$$

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2),$$

и для любых множеств $B_1 \subset B_2 \subset Y$

$$f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f(B_2),$$

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2).$$

Порядок

Частичный порядок, или просто порядок, на множестве X — это подмножество $\leqslant$ декартова квадрата $X \times X$, обладающее следующими свойствами (мы пишем $x \leqslant y$ вместо $(x, y) \in \leqslant$; кроме того, мы иногда пишем $y \geqslant x$ вместо $x \leqslant y$):

- $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z)) \to (x \leqslant z)$ (транзитивность);
- $\forall x \in X (x \leqslant x)$ (рефлексивность);
- $((x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)) \to (x = y)$ (антисимметричность).

Множество X вместе с заданным на нём порядком (т.е. пара $(X, \leqslant)$) называется (частично) упорядоченным множеством; про множество X говорят, что оно (частично) упорядочено отношением $\leqslant$. Запись $x \leqslant y$ читается «элемент x не больше элемента y» или «элемент x не превосходит элемента y», а запись $x \geqslant y$ — «элемент x не меньше элемента y».

Для каждого порядка $\leqslant$ на X однозначно определено соответствующее отношение $<$ строгого порядка: $x < y$, если $x \leqslant y$ и $x \neq y$. При этом говорят, что элемент x меньше элемента y, а y больше x. И наоборот, по строгому порядку $<$ очевидным образом восстанавливается порядок $\leqslant$, которому он соответствует.

Два элемента x и y множества X, упорядоченного отношением $\leqslant$, сравнимы, если либо $x \leqslant y$, либо $y \leqslant x$. Говорят, что $y \in X$ лежит между $x \in X$ и $z \in X$, если $x \leqslant y \leqslant z$. Элемент x множества $Y \subset X$ называется минимальным (максимальным) элементом этого множества, если $\forall y \in Y((y \leqslant x) \to (y = x))$ (соответственно $\forall y \in Y((x \leqslant y) \to (y = x)))$. Элемент x ограничивает множество $Y \subset X$ сверху (снизу), или является верхней (нижней) гранью множества Y, если $\forall y \in Y(y \leqslant x)$ (соответственно $\forall y \in Y(x \leqslant y))$. Если при этом x принадлежит множеству Y, то он называется наименьшим (наибольшим) элементом Y и обозначается $\min Y$ $(\max Y)$. Множество, у которого есть верхняя (нижняя, верхняя и нижняя) грань называется ограниченным сверху (ограниченным снизу, ограниченным). Наименьшая (наибольшая) верхняя (нижняя) грань множества Y, если она существует, называется также точной верхней (нижней) гранью, или супремумом (инфимумом), множества Y и обозначается $\sup Y$ $(\inf Y)$.

Интервалом упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ называется любое его подмножество I с тем свойством, что для любых $x, y \in I$ всякий элемент $z \in X$ между x и y принадлежит I. Интервалы бывают восьми типов:

$$\begin{array}{llll} \text{а)} & \{x : x \leqslant a\}, & \text{д)} & \{x : a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b], \\ \text{б)} & \{x : x < a\}, & \text{е)} & \{x : a < x < b\} = (a, b), \\ \text{в)} & \{x : a \leqslant x\}, & \text{ё)} & \{x : a \leqslant x < b\} = [a, b), \\ \text{г)} & \{x : a < x\}, & \text{ж)} & \{x : a < x \leqslant b\} = (a, b], \end{array}$$

где $a, b \in I$. Интервалы типов а), в) и д) называются замкнутыми, интервалы типов б), г) и е) — открытыми, а интервалы типов ё) и ж) — полуоткрытыми интервалами, а иногда просто полуинтервалами. Интервалы типов а)–г) называют лучами, а интервалы типов д)–ж) — ограниченными интервалами (хотя если множество $(X, \leqslant)$ содержит наименьший или наибольший элемент, лучи тоже могут быть ограниченными). Интервалы типов а) и б) называют также начальными интервалами.

Порядок $\leqslant$ на X называется линейным, если любые два элемента x и y множества X сравнимы. В этом случае пара $(X, \leqslant)$ называется линейно упорядоченным множеством, а пара $(X, <)$ — строго линейно упорядоченным множеством.

Порядок $\leqslant$ на X полон, если он линеен и любое непустое множество $Y \subset X$ содержит наименьший (в Y) элемент. Пара $(X, \leqslant)$, где $\leqslant$ — полный порядок, называется вполне упорядоченным множеством, а пара $(X, <)$ — строго вполне упорядоченным множеством. Всякое непустое вполне упорядоченное множество имеет наименьший элемент (хотя наибольший элемент существовать не обязан), и для всякого его элемента, который не является наибольшим, определён элемент, непосредственно следующий за ним.

На каждом подмножестве Y упорядоченного множества $(X, \leqslant)$ естественно возникает индуцированный порядок, или сужение порядка $\leqslant$ на Y — это пересечение порядка $\leqslant$ (который является подмножеством $X \times X$) с $Y \times Y$. Как легко видеть, индуцированный порядок линеен или полон, если таковым является порядок $\leqslant$ на X. В дальнейшем, рассматривая подмножества упорядоченных множеств, мы всегда будем считать, что они снабжены индуцированным порядком.

Отображение $f : X \to Y$ между упорядоченными множествами $(X, \leqslant)$ и $(Y, \preccurlyeq)$ называется порядковым изоморфизмом, а сами эти упорядоченные множества — порядково изоморфными, если f взаимно однозначно и для любых $x, y \in X$ соотношение $x \leqslant y$ выполнено тогда и только тогда, когда $f(x) \preccurlyeq f(y)$. В случае линейно упорядоченных множеств любая изотонная (т.е. сохраняющая порядок, «монотонно неубывающая») биекция является порядковым изоморфизмом.