Аксиомы отделимости

T_0: *Каковы бы ни были две различные точки, хотя бы одна из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Аксиома T_0 равносильна такому условию:

- если $x \neq y$, то либо $x \notin \overline{\{y\}}$, либо $y \notin \overline{\{x\}}$.

T_1: *Каковы бы ни были две различные точки, каждая из них имеет окрестность, не содержащую другую точку.*

Равносильные условия таковы:

- Все одноточечные (значит, и конечные) множества замкнуты.

Действительно, $T_1 \iff x \notin \overline{\{y\}}$ и $y \notin \overline{\{x\}}$ для любых $x \neq y \iff \overline{\{x\}} \cap \{y : y \neq x\} = \varnothing$ для любой точки x, т.е. $\overline{\{x\}} = \{x\}$.

- Все предельные точки любого множества являются точками накопления.

Действительно, если $x \neq y$ и $x \in \overline{\{y\}}$, то x — предельная точка множества $\{y\}$, но не точка его накопления. Обратно, если в T_1-пространстве точка x — не точка накопления множества A, то у x есть окрестность U, для которой $F = U \cap A$ конечно и потому замкнуто. Значит, $U \setminus F$ — не пересекающаяся с $A \setminus \{x\}$ окрестность точки x.

- Пересечение всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Это условие нарушается тогда и только тогда, когда существуют разные точки x и y такие, что y принадлежит любой окрестности точки x, т.е. тогда и только тогда, когда нарушается аксиома T_1.

T_2: *Любые две различные точки имеют непересекающиеся окрестности.*

Равносильное условие:

- пересечение замыканий всех окрестностей любой точки x равно $\{x\}$.

Действительно, точка y принадлежит замыканию некоторого множества U, если любая окрестность y пересекается с U, поэтому то, что $y \in \bigcap\{\overline{U} : U$ — окрестность точки $x\}$, означает, что любая окрестность точки y пересекается с любой окрестностью точки x.

Поскольку каждая окрестность всякой точки содержит окрестность из любой локальной базы топологии в этой точке, аксиома T_2 равносильна и такому условию:

- для любой точки x и любой локальной базы $\mathscr{B}(x)$ в этой точке $\bigcap\{\overline{U} : U \in \mathscr{B}(x)\} = \{x\}$.

T_3: *У любой точки и любого не содержащего её замкнутого множества есть непересекающиеся окрестности.*

Эта аксиома равносильна такому условию (очень часто за аксиому T_3 принимают именно это условие):

- для любой точки x и любой её окрестности U найдётся такая окрестность V точки x, что $\overline{V} \subset U$.

Действительно, рассмотрим открытую окрестность U точки x в топологическом пространстве X, удовлетворяющем аксиоме T_3, и её дополнение $F = X \setminus U$ (которое является замкнутым множеством). Пусть V_x и V_F — непересекающиеся окрестности точки x и множества F соответственно; поскольку любая окрестность содержит открытую, можно считать, что V_x и V_F открыты. Тогда $X \setminus V_F$ замкнуто, и $V_x \subset X \setminus V_F$. Значит, $\overline{V_x} \subset X \setminus V_F \subset X \setminus F = U$. Обратно, пусть F — замкнутое множество в топологическом пространстве X, удовлетворяющем сформулированному выше условию, и пусть $x \notin F$. Тогда $U = X \setminus F$ — открытая окрестность точки x, и по предположению существует окрестность V той же точки со свойством $\overline{V} \subset U$. Ясно, что $W = X \setminus \overline{V}$ — открытая окрестность множества F и $V \cap W = \varnothing$.

T_4: *У любых двух непересекающихся замкнутых множеств есть непересекающиеся (открытые) окрестности.*

Равносильные условия:

- Для любого замкнутого множества F и любой его окрестности U найдётся такая окрестность V множества F, что $\overline{V} \subset U$.

Доказательство равносильности этого условия аксиоме T_4 дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения для аксиомы T_3.

- Если F и G — любые непересекающиеся замкнутые множества, то у F найдётся окрестность V такая, что G содержится в дополнении её замыкания.

Чтобы увидеть, что это условие равносильно первому, достаточно положить U равным дополнению G.

В этот список не включена ещё одна важнейшая аксиома отделимости, $T_{3\frac{1}{2}}$; её мы обсудим позже.

Определение

Топологические пространства, удовлетворяющие аксиоме T_2, называются хаусдорфовыми.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_3, называются регулярными.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и T_4, называются нормальными.

В тех случаях, когда два множества (или точки) имеют непересекающиеся окрестности, говорят, что эти множества отделены окрестностями. Например, аксиома T_4 утверждает, что любые непересекающиеся замкнутые множества отделены окрестностями.

Класс всех топологических пространств, удовлетворяющих данной аксиоме отделимости, обозначается тем же символом, что и сама аксиома, так что запись $X \in T_i$, где $i = 1, 2, 3, 4$, означает, что пространство X удовлетворяет аксиоме T_i. Вместо «топологическое пространство, удовлетворяющее аксиоме отделимости T_i», часто пишут «T_i-пространство».

Хаусдорфовы пространства

Теорема

Для топологического пространства X следующие условия равносильны:

1. *X хаусдорфово;*
2. *если фильтр на X сходится, то он сходится к ровно одной точке;*
3. *если ультрафильтр на X сходится, то он сходится к ровно одной точке.*

Доказательство. 1 $\implies$ 2: Пусть $\mathscr{F}$ — фильтр на X и $\mathscr{F} \to x$. Возьмём точку $y \in X$, $y \neq x$. $X \in T_2 \implies$ существуют непересекающиеся окрестности U и V точек x и y. $\mathscr{F} \to x \implies U \in \mathscr{F}$. Значит, $V \notin \mathscr{F}$ и $\mathscr{F}$ не сходится к y.

Импликация 2 $\implies$ 3 тривиальна.

3 $\implies$ 1: Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Предположим, что любая окрестность x пересекается с любой окрестностью y. Рассмотрим семейство

$$\mathscr{F} = \{U \cap V : U \text{ — окрестность } x,\ V \text{ — окрестность } y\}.$$

Оно центрировано и содержит все окрестности x и все окрестности точки y (в качестве U или V можно брать X). $\mathscr{F}$ содержится в некотором ультрафильтре $\mathscr{U}$. Имеем $\mathscr{U} \to x$ и $\mathscr{U} \to y$. Противоречие. □

Теорема

График любого непрерывного отображения $f\colon X \to Y$ произвольного топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y замкнут в $X \times Y$.

Доказательство. Надо показать, что множество $(X \times Y) \setminus \operatorname{Gr} f$ открыто, т.е. что если $x \in X$, $y \in Y$ и $y \neq f(x)$, то найдутся открытые множества $U \subset X$ в X и $V \subset Y$ в Y такие, что $(x, y) \in U \times V$ и $z \neq f(t)$ для любых $t \in U$ и $z \in V$. Это действительно так: поскольку пространство Y хаусдорфово, у точек y и $f(x)$ найдутся непересекающиеся открытые окрестности V и W в Y, а поскольку отображение f непрерывно, множество $U = f^{-1}(W)$ открыто в X. Ясно, что множества U и V обладают нужными свойствами. □

Теорема

Топологическое пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ замкнута в пространстве $X \times X$.

Доказательство. Замкнутость диагонали в предположении хаусдорфовости X вытекает из предыдущей теоремы, поскольку $\Delta = \operatorname{Gr} \mathrm{id}_X$, а тождественное отображение id_X всегда непрерывно.

Обратно, предположим, что диагональ Δ замкнута и рассмотрим две любые разные точки $x, y \in X$. Поскольку $(x, y) \notin \Delta$, у точки (x, y) найдётся не пересекающая Δ окрестность в $X \times X$. Поскольку топология произведения $X \times X$ порождена базой $\{U \times V : U$ и V открыты в $X\}$, найдутся открытые множества $U, V \subset X$ такие, что $(x, y) \in U \times V$ (а значит, $x \in U$ и $y \in V$) и $U \times V \cap \Delta = \varnothing$, т.е. $U \cap V = \varnothing$, что и доказывает хаусдорфовость X. $\square$

Теорема

Пусть $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения некоторого топологического пространства X в хаусдорфово пространство Y. Тогда множество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ точек их совпадения замкнуто в X.

Доказательство. Мы покажем, что множество $A = \{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ открыто в X.

Для каждого $x \in A$ имеем $f(x) \neq g(x)$; поскольку Y хаусдорфово, существуют открытые в Y множества U и V такие, что $f(x) \in U$, $g(x) \in V$ и $U \cap V = \varnothing$.

Множество $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ открыто в x (так как f и g непрерывны), содержит точку x и содержится в A.

Мы показали, что каждая точка $x \in A$ содержится в A вместе с некоторой своей окрестностью W; значит, A открыто. $\square$

Следствие

Множество $\mathrm{Fix}\, f = \{x \in X : f(x) = x\}$ *неподвижных точек любого отображения* $f : X \to X$ *хаусдорфова пространства* X *в себя замкнуто в* X.

Доказательство. Достаточно применить теорему к отображениям f и $g = \mathrm{id}_X$. □

Следствие

Если $f, g : X \to Y$ *— непрерывные отображения произвольного топологического пространства* X *в хаусдорфово пространство* Y, $A \subset X$, $\overline{A} = X$ *и* $f(a) = g(a)$ *для всех* $a \in A$, *то* $f = g$, *т.е.* $f(x) = g(x)$ *для всех* $x \in X$.

В частности, любые непрерывные функции на топологическом пространстве, совпадающие на плотном подмножестве этого пространства, совпадают и на всём пространстве.

Теорема

Всякое метризуемое пространство нормально.

Доказательство. Пусть X — метризуемое пространство, и пусть d — любая метрика на пространстве X, порождающая его топологию.

Заметим, что X — T_1- и даже T_2-пространство, поскольку если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то $d(x, y) > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, и $B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap B_d(y, \frac{\varepsilon}{2}) = \varnothing$.

Покажем, что $X \in T_4$. Пусть A и B замкнуты, $A \cap B = \varnothing$. Рассмотрим

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}. \tag{1}$$

Вспомним: $x \in \overline{Y} \iff d(x, Y) = 0$. Значит, $\forall x \in A$ имеем $d(x, B) > 0$, и $\forall y \notin A$ имеем $d(y, A) > 0$, так что функция f определена корректно. Она непрерывна, так как функции $X \to \mathbb{R}$, определённые правилами $x \mapsto d(x, A)$ и $x \mapsto d(x, B)$, непрерывны. Наконец, ясно, что $f|_A \equiv 0$ и $f|_B \equiv 1$, так что $U = f^{-1}([0, \frac{1}{2}))$ и $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, 1])$ — непересекающиеся открытые (в силу непрерывности f) окрестности множеств A и B соответственно. $\square$

Лемма Урысона

Для каждой пары непересекающихся замкнутых множеств A и B в T_4-пространстве X существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$.

Доказательство. Сперва мы построим семейство открытых множеств V_r, $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, удовлетворяющее условиям

1. $\overline{V}_r \subset V_s$ для $r < s$, $r, s \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, и
2. $A \subset V_0$, $B \subset X \setminus V_1$.

Положим $r_1 = 0$ и $r_2 = 1$ и как-нибудь заиндексируем все рациональные числа в интервале $(0,1)$ натуральными числами, бóльшими 2: $r_3, r_4, r_5, \ldots$. Введём вспомогательное условие

1_n $\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_j}$, если $r_i < r_j$ и $i, j \leqslant n$

и будем строить множества V_r индукцией по номеру (индексу) рационального числа r.

Пользуясь тем, что $X \in T_4$, найдём открытые множества U и V со свойствами $A \subset U$, $B \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$. Положим $V_0 = U$ и $V_1 = X \setminus B$. Очевидно, $A \subset V_0 \subset X \setminus V = \overline{X \setminus V} \subset V_1$; следовательно, $\overline{V}_0 \subset V_1$, т.е. условие ❶$_n$ выполнено для $n = 2$ (условие ❷ тоже выполнено).

Допустим, что $n \geqslant 2$ и множества V_{r_j} уже определены для $j \leqslant n$ так, что выполнено условие ❶$_n$. Найдём среди чисел $r_1, r_2, \ldots, r_n$ числа r_l и r_m, ближайшие к r_{n+1} слева и справа соответственно. Поскольку $r_l < r_m$ и $l, m \leqslant n$, из ❶$_n$ следует, что $\overline{V}_{r_l} \subset V_{r_m}$. Из того, что $X \in T_4$, вытекает существование открытого множества W такого, что $\overline{V}_{r_l} \subset W \subset \overline{W} \subset V_{r_m}$. Положим $V_{r_{n+1}} = W$. Поскольку любое число $r_i \neq r_l$ с индексом $i \leqslant n$, удовлетворяющее условию $r_i < r_{n+1}$, меньше r_l, по индуктивному предположению имеем $\overline{V}_{r_i} \subset V_{r_l}$ для любого такого r_i, и поскольку любое число $r_j \neq r_m$ с индексом $j \leqslant n$, удовлетворяющее условию $r_j > r_{n+1}$, больше r_m, по индуктивному предположению имеем $\overline{V}_{r_m} \subset V_{r_j}$ для любого такого r_j. Значит, множества $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots, V_{r_n}, V_{r_{n+1}} = W$ удовлетворяют условию ❶$_{n+1}$.

В результате получим последовательность открытых множеств $V_{r_1}, V_{r_2}, \ldots,$ удовлетворяющую условиям ❶ и ❷.

Определим функцию $f\colon X \to [0,1]$ формулой

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r : x \in V_r\}, & \text{если } x \in V_1, \\ 1, & \text{если } x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

В силу ❷ имеем $f(x) = 0$ для $x \in A$ и $f(x) = 1$ для $x \in B$. Покажем, что f непрерывна. Достаточно проверить, что все множества вида $f^{-1}([0,a))$ и $f^{-1}((b,1])$ открыты в X.

Для $a \in (0,1]$ и $x \in X$ $f(x) < a \iff \exists r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ т., что $r < a$ и $x \in V_r$; значит, $f^{-1}([0,a)) = \bigcup\{V_r : r \in [0,a) \cap \mathbb{Q}\}$, а это множество открыто.

Для $b \in [0,1)$ и $x \in X$ $f(x) > b \iff \exists r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ т., что $r > b$ и $x \notin V_r$. Пусть $s \in \mathbb{Q}$, $b < s < r$. В силу ❶ имеем $\overline{V_s} \subset V_r$; значит, если $f(x) > b$, то найдётся $s \in (b,1] \cap \mathbb{Q}$, для которого $x \notin \overline{V_s}$. Очевидно, верно и обратное: если $x \notin \overline{V_s}$ для некоторого $s \in (b,1] \cap \mathbb{Q}$, то $x \notin V_s$ и $f(x) \geqslant s > b$. Значит, $f^{-1}((b,1]) = \bigcup\{X \setminus \overline{V_s} : s \in (b,1] \cap \mathbb{Q}\}$, а это множество открыто.

Мы доказали непрерывность функции f, а вместе с ней и лемму Урысона. $\square$

На самом деле лемма Урысона (как и теорема Титце–Урысона) представляет собой характеристику T_4-пространств.

Говорят, что непересекающиеся множества A и B в топологическом пространстве X функционально отделимы, если существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ для всех $x \in A$ и $f(y) = 1$ для всех $y \in B$. Ясно, что это условие равносильно существованию непрерывной функции $g\colon X \to \mathbb{R}$, принимающей разные постоянные значения на множествах A и B: если $g(A) \equiv a$ и $g(B) \equiv b$, то функцию f можно определить правилом $f(x) = \frac{|f(x)-a|}{|f(x)-a|+|f(x)-b|}$.

Таким образом, лемму Урысона можно сформулировать так: *топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_4 тогда и только тогда, когда в нём любые два непересекающихся замкнутых множества функционально отделимы*.

Теорема Титце–Урысона о продолжении

Пусть X — T_4-пространство и F — его замкнутое подмножество. Тогда

а) у любой непрерывной функции $f\colon F \to [-1, 1]$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}\colon X \to [-1, 1]$;

б) у любой непрерывной функции $f\colon F \to \mathbb{R}$ имеется непрерывное продолжение $\hat{f}\colon X \to \mathbb{R}$.

Доказательство. а) Для любой непрерывной функции $f_0\colon F \to \mathbb{R}$ со свойством $|f_0(x)| \leqslant a$ для $x \in F$ (где $a > 0$) существует непрерывная функция $g\colon X \to \mathbb{R}$ со свойствами

1. $|g(x)| \leqslant \frac{a}{3}$ для всех $x \in X$;
2. $|f_0(x) - g(x)| \leqslant \frac{2}{3}a$ для $x \in F$.

В самом деле, множества $A = f_0^{-1}([-a, -\frac{a}{3}])$ и $B = f_0^{-1}([\frac{a}{3}, a])$ замкнуты в F, и они не пересекаются; поскольку F замкнуто в X, множества A и B замкнуты и в X, и по лемме Урысона существует непрерывная функция $\varphi\colon X \to [0, 1]$ такая, что $\varphi|_A \equiv 0$ и $\varphi|_B \equiv 1$. Функция $g\colon X \to \mathbb{R}$, определённая правилом $g(x) = \frac{2}{3}a \cdot (\varphi(x) - \frac{1}{2})$ для $x \in X$, непрерывна и удовлетворяет условиям 1 и 2.

Теперь определим по индукции последовательность непрерывных функций $g_n \colon X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих таким условиям для всех $n \in \mathbb{N}$:

3. $|g_n(x)| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ для всех $x \in X$;
4. $\left|f(x) - \sum_{i \leqslant n} g_i(x)\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$ для $x \in F$.

Функцию g_1 мы определим, применив сделанное выше замечание к $a = 1$ и функции f_0, равной надотображению $\tilde{f} \colon F \to \mathbb{R}$ отображения $f \colon F \to [-1, 1]$. Допустим, что функции $g_1, g_2, \ldots, g_k$ уже построены так, что выполнены условия 3 и 4 с $n \leqslant k$. Применяя то же самое замечание к $a = \left(\frac{2}{3}\right)^k$ и $f_0 = \tilde{f} - \sum_{i \leqslant k} g_i\big|_F$, мы получим функцию g_{k+1}, удовлетворяющую условиям 3 и 4 с $n = k + 1$. Индуктивное построение завершено.

Согласно известному из анализа признаку Вейерштрасса в силу условия 3 ряд функций $\sum_{n \in \mathbb{N}} g_n(x)$ равномерно сходится на $\mathbb{R}$ к некоторой функции $\hat{f} \colon X \to [-1, 1]$, причём по теореме Коши $\hat{f}$ непрерывна. Из условия 4 следует, что $\hat{f}(x) = f(x)$ для всех $x \in F$. Значит, $\hat{f}$ — искомое непрерывное продолжение функции f на X.

б) Рассмотрим теперь функцию $f\colon F \to \mathbb{R}$. Пусть $\psi\colon \mathbb{R} \to [-1,1]$ — функция, определённая правилом $\psi(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Тогда $\psi \circ f$ — непрерывная функция $F \to [-1,1]$, причём $\psi \circ f(F) \subset (-1,1)$, и к ней применимо уже доказанное утверждение а). Пусть $\hat{f}_1\colon X \to [-1,1]$ — непрерывное продолжение функции $\psi \circ f$. В силу его непрерывности множество $G = f_1^{-1}(\{-1,1\})$ замкнуто в X, и оно не пересекает F. Значит, по лемме Урысона существует непрерывное отображение $\varphi\colon X \to [0,1]$ такое, что $\varphi|_G \equiv 0$ и $\varphi|_F \equiv 1$. Легко видеть, что отображение $\hat{f}_2\colon X \to [-1,1]$, определённое формулой $\hat{f}_2(x) = \hat{f}_1(x) \cdot \varphi(x)$, тоже является непрерывным продолжением отображения $\psi \circ f$ на X, причём $\hat{f}_2(X) \subset \psi(\mathbb{R}) = (-1,1)$. Функция $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \hat{f}_2$ — искомое непрерывное продолжение f на X. □

Утверждение а) теоремы Титце–Урысона остаётся верным при замене отрезка $[-1,1]$ на любой другой отрезок $[a,b]$, где $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Действительно, для $f\colon F \to [a,b]$ достаточно рассмотреть любой гомеоморфизм $\psi\colon [a,b] \to [-1,1]$ (например, $\psi(x) = \frac{a+b-2x}{a-b}$), построить непрерывное продолжение $\widehat{\psi \circ f}\colon X \to [-1,1]$ функции $\psi \circ f\colon F \to [-1,1]$ и положить $\hat{f} = \psi^{-1} \circ \widehat{\psi \circ f}$.

Тихоновские пространства

Определение

Топологическое пространство X удовлетворяет аксиоме отделимости $T_{3\frac{1}{2}}$, если для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой точки $x \notin F$ существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$, принимающая значение 0 в точке x и тождественно равная 1 на множестве F.

Пространства, удовлетворяющие аксиомам T_1 и $T_{3\frac{1}{2}}$, называются вполне регулярными, или тихоновскими.

Иногда за определение принимают равносильное условие: $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, если для любой точки $x \in X$ и любой её окрестности U существует непрерывная функция $f\colon X \to [0,1]$ такая, что $f(x) = 0$ и $f|_{X\setminus U} \equiv 1$.

$T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$: если $X \in T_{3\frac{1}{2}}$, F замкнуто в X и $x \in X \setminus F$, то множества $U = f^{-1}\bigl([0,\frac{1}{2})\bigr)$ и $V = f^{-1}\bigl((\frac{1}{2},1]\bigr)$, где $f\colon X \to [0,1]$ — непрерывная функция, равная 0 в точке x и 1 на множестве F, — непересекающиеся окрестности x и F.

$$\text{нормальность} \implies \text{тихоновость} \implies \text{регулярность} \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0.$$

Ни одну из этих стрелок нельзя обратить.

Примеры

- $T_0 \not\Longrightarrow T_1$

  Связное двоеточие — множество $\{a, b\}$, состоящее из двух точек a и b, с топологией $\{\varnothing, \{a\}, \{a, b\}\}$.

- $T_1 \not\Longrightarrow T_2$

  Множество $\mathbb{R}$ с топологией Зарисского, в которой открыты все дополнения до конечных множеств и только они.

- $T_2 \not\Longrightarrow T_3$

  Прямая $\mathbb{R}$ с топологией, базу которой составляют все открытые интервалы и множества вида $(-\varepsilon, \varepsilon) \setminus S$, где $\varepsilon > 0$ и $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$.

  Множество S замкнуто в новой топологии и $0 \notin S$, однако S и 0 не отделены окрестностями.

- $T_1 + T_3 \not\Longrightarrow T_{3\frac{1}{2}}$

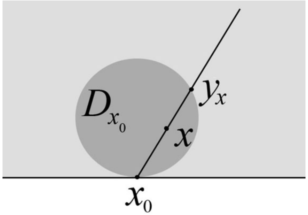
  Сложный пример.
- $T_1 + T_{3\frac{1}{2}} \not\Longrightarrow T_4$

  Плоскость Немыцкого L

  $L \in T_1$: топология L сильнее топологии, порождённой метрикой.

  $L \in T_{3\frac{1}{2}}$: достаточно проверить для точек граничной прямой l плоскости Немыцкого — всякая окрестность любой точки $x_0 \in L \setminus l$ содержит некоторую ε-окрестность относительно евклидовой метрики d на плоскости, а для ε-окрестности нужная функция из определения $T_{3\frac{1}{2}}$ существует (притом непрерывная не только относительно топологии L, но и относительно более слабой метрической топологии замкнутой верхней полуплоскости) — можно положить $f(x) = \min\{\frac{d(x_0,x)}{\varepsilon}, 1\}$.

  Пусть $x_0 \in l$, U — любая окрестность точки x_0 и $D_{x_0} \cup \{x_0\}$ — базисная окрестность x_0, содержащаяся в U. Для $x \in D_{x_0}$ обозначим через y_x точку, в которой луч, выходящий из точки x_0 и проходящий через x, пересекает границу круга D_{x_0}:



Функция $f\colon L \to [0,1]$, определённая правилом

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = x_0, \\ 1, & \text{если } x \in L \setminus \big(D_{x_0} \cup \{x_0\}\big), \\ \frac{d(x_0,x)}{d(x_0,y_x)}, & \text{если } x \in D_{x_0}, \end{cases}$$

непрерывна на L, $f(x_0) = 0$ и $f|_L \setminus U \equiv 1$ (так как $U \supset D_{x_0}$).

Мы показали, что плоскость Немыцкого L вполне регулярна. Вместо того чтобы доказывать, что L не нормальна, мы докажем несколько более общий факт.

Предложение

Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подпространство мощности $\geqslant 2^{\aleph_0}$, то оно не удовлетворяет аксиоме T_4.

Доказательство. Пусть X — сепарабельное пространство, $Y \subset X$ — счётное всюду плотное множество в X и D — замкнутое дискретное подпространство X мощности $2^{\aleph_0}$. Знаем: если непрерывные функции $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ принимают одинаковые значения в точках Y, то они совпадают. Значит, на X существует не более чем $|\mathbb{R}|^{|Y|} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ разных непрерывных функций.

Поскольку D дискретно, любая функция $D \to \mathbb{R}$ непрерывна, а число разных таких функций равно $|D|^{|\mathbb{R}|} = 2^{2^{\aleph_0}}$. Если бы пространство X удовлетворяло аксиоме T_4, то каждая из этих функций допускала бы непрерывное продолжение на X, и все продолжения были бы разными (так как уже сами функции разные), а это невозможно, поскольку по теореме Кантора $2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$. $\square$