Задание для гр. 207 на 12.12.2013

Задачи для проверочной работы. Будет шесть задач, по одной из каждой темы.

1. Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{Cl}(A) \subseteq \mathrm{Cl}(B)$ и $\mathrm{Int}(A) \subseteq \mathrm{Int}(B)$.

   $\mathrm{Cl}(A \cap B) \subseteq \mathrm{Cl}(A) \cap \mathrm{Cl}(B)$. Показать, что на равенство заменить нельзя.

   $\mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(B) \subseteq \mathrm{Int}(A \cup B)$. Показать, что на равенство заменить нельзя.

2. $X \setminus \mathrm{Int}(A) = \mathrm{Cl}(X \setminus A)$.

3. Множество всех внутренних точек множества A совпадает с $\mathrm{Int}(A)$.

   Множество всех точек прикосновения множества A совпадает с $\mathrm{Cl}(A)$.

   $\partial A = \mathrm{Cl}(A) \setminus \mathrm{Int}(A)$.

   $\mathrm{Cl}(A) = A \cup \partial A$.

   $\mathrm{Int}(A) = A \setminus \partial A$.

   $X \setminus \partial A = \mathrm{Int}(A) \cup \mathrm{Int}(X \setminus A)$.

4. $\partial(A \cap B) \subseteq \partial A \cup \partial B$.

   $\partial(X \setminus A) = \partial A$.

   $\partial(\mathrm{Cl}(A)) \subseteq \partial A$.

   $\partial(\mathrm{Int}(A)) \subseteq \partial A$.

5. Проверьте, что если множества A и B удовлетворяют условию $A \cap \mathrm{Cl}(B) = \emptyset = \mathrm{Cl}(A) \cap B$, то $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$.

6. Пусть топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности. Доказать, что из любого открытого покрытия X можно выбрать счетное подпокрытие.

7. Доказать, что если пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности, то оно удовлетворяет и первой аксиоме счетности. Верна ли обратная импликация?

8. Каждое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счётности, сепарабельно.

9. Доказать, что прямая $\mathbb{R}$ с эвклидовой топологией обладает счетной базой.

10. Доказать, что прямая Зоргенфрея не обладает счетной базой. Удовлетворяет ли прямая Зоргенфрея первой аксиоме счетности? Являются ли прямая Зоргенфрея сепарабельным пространством?

11. Привести пример сепарабельного пространства и его не сепарабельного подпространства.

12. Если A всюду плотно в X, то для любого открытого $U \subseteq X$

$$\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(U \cap A).$$

13. Проверьте, что объединение коплотного множества и нигде не плотного множества является коплотным множеством. Заметим, что объединение двух коплотных множеств не обязательно коплотно.

14. Доказать, что замкнутое всюду плотное подмножество пространства X совпадает с X.

15. Докажите, что в любом всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$ имеется счетное всюду плотное подмножество.

———————————————————————

16. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность точек не может иметь более одного предела.

17. Привести пример T_1-пространства и последовательность точек в нём, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

18. Будет ли прямая Зоргенфрея нормальным пространством?

19. Докажите, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тем самым метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, если оно сепарабельно.

20. Существует ли не сепарабельное метрическое пространство?

21. Метризуема ли прямая Зоргенфрея?

22. Метрическое пространство нормально.

———————————————————————

23. Если пространство компактно, то всякое бесконечное подмножество имеет предельную точку.

24. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

25. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) компактным пространством?

26. (Теорема о замкнутом графике.) Если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно и Y хаусдорфово, то график отображения замкнут.

27. Докажите, что если график отображения $f\colon X \to Y$ замкнут и Y компактно, то отображение непрерывно.

28. Доказать, что метризуемый компакт удовлетворяет второй аксиоме счетности.

---

29. Каждая непрерывная вещественная функция на счетно компактном пространстве ограничена.

30. Докажите, что любое не счетно компактное пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подмножество.

31. Нормальное пространство, на котором всякая непрерывная функция ограничена, является счетно компактным.

---

32. Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подмножество мощности континуум, то оно не нормально.

33. Квадрат «стрелки» не нормален.

34. Отрезок $I = [0, 1]$ компактен.

35. Рассмотрим линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

---

36. Каждое связное нормальное пространство, в котором есть по крайней мере две различные точки, имеет мощность, не меньшую $\mathfrak{c}$.

37. Каждое счетное регулярное пространство нормально.

38. Покажите (с применением задач 36 и 37), что не существует счетного связного регулярного пространства, содержащего более одной точки.

39. Для всякой точки $x \in X$ ее компонента связности C_x содержится в квазикомпоненте Q_x. (Пример пространства, в котором квазикомпонента не совпадает с компонентой.)

40. Связность сохраняется непрерывными отображениями (в сторону образа).

41. Всякое линейно связное пространство связно. (Пример, связного, но не линейно связного пространства.)