Задание для гр. 207 на 14.11.2013

I. Выучить формулировки следующих утверждений:

Лемма Урысона, теорема Брауэра-Титце-Урысона, теорема Александера о предбазе.

II. Задачи:

1. Постройте непрерывную функцию на плоскости $\mathbb{R}^2$, принимающую значение 0 на осях координат Ox и Oy и значение 1 на графике гиперболы $y = 1/x$.

2. Если сепарабельное пространство содержит замкнутое дискретное подмножество мощности континуум, то оно не нормально.

3. Квадрат «стрелки» не нормален.

   Следующие задачи решить с помощью леммы Александера о предбазе:

4. Отрезок $I = [0, 1]$ компактен.

5. Рассмотрим линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

6. Докажите, что подпространство $(0, 1]\times\{0\}\cup[0, 1)\times\{1\}$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство «Две стрелки Александрова») компактно, но не обладает счетной базой.

7. Пространство X с топологией, порожденной линейным упорядочением, компактно в том и только том случае, если каждое подмножество $A \subseteq X$ обладает в X наименьшей верхней гранью.