Задание для гр. 207 на 17.10.2013

I. Выучить определения следующих понятий:

Компактные, секвенциально компактные, паракомпактные, финально компактные, счётно компактные, локально компактные пространства.

II. Доказать следующие утверждения:

1. Если пространство компактно, то всякое бесконечное подмножество имеет предельную точку. Приведите пример, когда обратное неверно.

2. Докажите, что в регулярном пространстве для любых дизъюнктных замкнутого и компактного подмножеств существуют их дизъюнктные окрестности. Тем самым компактное хаусдорфово пространство нормально.

3. Регулярное финально компактное пространство паракомпактно.

4. Хаусдорфово паракомпактное пространство нормально.

5. Пусть на множестве X даны хаусдорфова $\mathcal{O}_1$ и компактная $\mathcal{O}_2$ топологии. Показать, что если $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, то $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$.

6. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно прямая в топологии Зарисского) компактным пространством?

7. Какие подпространства прямой Зоргенфрея являются компактными?

8. (Теорема о замкнутом графике.) Если отображение $f\colon X \to Y$ непрерывно и Y хаусдорфово, то график отображения замкнут.

9. Докажите, что если график отображения $f\colon X \to Y$ замкнут и Y компактно, то отображение непрерывно.

10. Пусть X — хаусдорфово пространство, K_α, $\alpha \in A$, — семейство компактных подмножеств, U — окрестность $\cap\{K_\alpha\colon \alpha \in A\}$. Тогда существует конечное подмножество $A_{Fin} \subset A$ такое, что $\cap\{K_\alpha\colon \alpha \in A_{Fin}\} \subset U$.

11. Доказать, что метризуемое пространство X компактно в том и только том случае, если любая вещественная функция на X ограничена.

12. Доказать, что для метризуемых пространств условия компактности и секвенциальной компактности эквивалентны.

13. Доказать, что метризуемый компакт сепарабелен и удовлетворяет второй аксиоме счетности.

14. Доказать, что любая функция на метрическом компакте равномерно непрерывна.

15. (Теорема Лебега о покрытиях) Доказать, что для любого открытого покрытия ω метрического компакта X существует $\varepsilon > 0$ такое, что покрытие X из открытых шаров радиуса ε вписано в покрытие ω. Можно ли условие компактности метрического пространства заменить условием рассмотрения конечных покрытий?

16. Доказать, что для любых метрик ρ_1 и ρ_2 на метризуемом компакте X выполнено следующее условие: для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что для любых точек $x, y \in X$ $\rho_2(x, y) < \varepsilon$ как только $\rho_1(x, y) < \delta_1$ и $\rho_1(x, y) < \varepsilon$ как только $\rho_2(x, y) < \delta_2$.

17. Метрическое пространство полно, если любая фундаментальная последовательность имеет предел. Подмножество A метрического пространства вполне ограничено, если для любого $\varepsilon > 0$ из семейства открытых шаров радиуса ε, покрывающих A, можно выбрать конечное подсемейство, покрывающее A. Доказать, что подмножество A полного метрического пространства X компактно в том и только том случае, если оно замкнуто и вполне ограничено (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ обладает конечной ε-сетью). Показать, что условие вполне ограниченности нельзя заменить на условие ограниченности.

18. Рассмотрите линейное упорядочение на квадрате I^2: $(x_1, y_1) < (x_2, y_2)$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$. Докажите, что квадрат с интервальной топологией заданного линейного порядка (лексикографически упорядоченный квадрат) компактен, удовлетворяет первой аксиоме счетности, но не сепарабелен.

19. Докажите, что подмножество $\{0\} \times (0, 1] \cup \{1\} \times [0, 1)$ лексикографически упорядоченного квадрата (пространство "Две стрелки Александрова") компактно, но не удовлетворяет второй аксиоме счетности (тем самым не метризуемо).

20. Покажите, что любое нормальное пространство со счетной базой является всюду плотным подмножеством метризуемого компакта.

21. Докажите, что открытое подмножество локально компактного хаусдорфова пространства локально компактно. Можно ли отказаться от условия хаусдорфовости?

22. Будет ли объединение локально компактных подмножеств локально компактного пространства локально компактным?

23. Будет ли непрерывный хаусдорфов образ локально компактного пространства локально компактным? А если, дополнительно, отображение открыто или замкнуто?

24. Привести пример счетного открытого покрытия числовой прямой, из которого нельзя *выбрать* локально конечное подпокрытие.

25. Доказать, что в любое открытое покрытие пространства $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, можно вписать локально конечное покрытие.

26. Показать, что любое (не обязательно открытое) локально конечное покрытие компакта конечно.

27. Будет ли непрерывный образ финально компактного пространства финально компактным?

28. Будет ли непрерывный (хаусдорфов) образ паракомпактного пространства паракомпактным пространством?

29. Докажите, что любое некомпактное пространство содержит бесконечное замкнутое дискретное подмножество.

30. Докажите, что на любом некомпактном пространстве X существует непрерывная функция $f\colon X \to (0,1]$, для которой $\inf\{f(x)\colon x \in X\} = 0$.

31. Докажите, что для любого компактного подмножества K метрического пространства X существуют точки $x, y \in K$ такие, что $\mathrm{diam} X = \rho(x, y)$.

32. Приведите пример двух компактов X, Y на плоскости таких, что X и Y не гомеоморфны, но $X \times [0,1]$ и $Y \times [0,1]$ гомеоморфны.