Задание для гр. 207 на 3.10.2013

I. **Выучить определения следующих понятий**

Метрические и метризуемые пространства, топология метрического пространства (или топология, порождённая метрикой); аксиомы отделимости T_0, T_1, T_2, T_3, T_4; хаусдорфово, регулярное, нормальное пространства; непрерывные, открытые, замкнутые, факторные отображения, график отображения, гомеоморфизм.

II. **Про метрические пространства.**

1. Две метрики называются *эквивалентными*, если они порождают одну и ту же топологию. Пусть на множестве X заданы две метрики ρ_1 и ρ_2. Доказать, что если существуют действительные числа $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ такие, что $\rho_1(x, y) \leq k_2\rho_2(x, y)$ и $\rho_2(x, y) \leq k_1\rho_1(x, y)$ для любых $x, y \in X$, то метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны. Верна ли обратная импликация?

2. Доказать, что две метрики на одном и том же множестве эквивалентны тогда и только тогда, когда всякая последовательность точек этого множества, которая сходится в одной метрике, сходится и в другой.

3. Пусть (X, ρ) метрическое пространство. Доказать, что отображения ρ_1 и $\rho_2 : X \times X \to \mathbb{R}_+$ заданные формулами $\rho_1(x, y) = \min\{1, \rho(x, y)\}$ и $\rho_2(x, y) = \rho(x, y)/(1 + \rho(x, y))$ являются метриками на множестве X, эквивалентными метрике ρ, и сравнить открытые и замкнутые шары метрик ρ, ρ_1 и ρ_2.

4. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат и $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$.

   (ρ_d) $\rho_d(x, y) = 1$, если $x \neq y$, и $\rho_d(x, y) = 0$, если $x = y$;

   (ρ_e) $\rho_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$;

   (ρ_{max}) $\rho_{max}(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$;

   ($\rho_\diamondsuit$) $\rho_\diamondsuit(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$;

   (ρ_j) $\rho_j(x, y) = |x_2 - y_2|$, если $x_1 = y_1$, и $\rho_j(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2| + |y_2|$, если $x_1 \neq y_1$.

   Проверить, что определённые отображения являются метриками.

5. Нарисовать единичные открытые шары точек в метриках из задачи 4, определить иерархию порожденных ими топологий.

6. Докажите, что следующие функции

$$\rho_1(f,g) = \int\limits_0^1 |f(x)-g(x)|dx,\ \ \rho_2(f,g) = \sqrt{\int\limits_0^1 (f(x)-g(x))^2 dx},$$

$$\rho_3(f,g) = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [0,1]\}$$

на множестве всех непрерывных отображений $[0,1] \to \mathbb{R}$ являются метриками.

7. Эквивалентны ли метрики из задачи 6?

8. Точками пространства ℓ_2 являются счетные последовательности $(x_1,\dots,x_n,\dots)$ действительных чисел, для которых $\sum x_i^2 < \infty$. Для $x = (x_1,\dots,x_n,\dots)$ и $y = (y_1,\dots,y_n,\dots)$ положим $\rho(x,y) = \sqrt{\sum(x_i-y_i)^2}$. Показать, что метрика корректно определена. Указать в ℓ_2 счетное подмножество точек, попарные расстояния между которыми равны 1.

9. Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}$ – произвольное инъективное отображение на множестве X. Докажите, что отображение $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$, $\rho(x,y) = |f(x)-f(y)|$, является метрикой на X.

III. **Про аксиомы отделимости.**

10. Доказать, что среди всех T_1-топологий на некотором множестве есть наименьшая.

11. Доказать, что X является T_1-пространством тогда и только тогда, когда все одноточечные подмножества X замкнуты.

12. Доказать, что в хаусдорфовом пространстве ни одна последовательность точек не может иметь более одного предела.

13. Привести пример T_1-пространства и последовательность точек в нём, имеющей ровно n пределов, где $n \in \mathbb{N}$ или бесконечно.

14. Докажите, что всякое подпространство T_0-(соответственно, T_1-, хаусдорфова, регулярного) пространства является T_0-(соответственно, T_1-, хаусдорфовым, регулярным) пространством. Докажите, что всякое замкнутое подмножество нормального пространства является нормальным пространством.

15. Будет ли прямая Зоргенфрея (соответственно, прямая в топологии Зарисского) нормальным пространством? Будет ли прямая в топологии Зарисского регулярным пространством?

16. Докажите, что сепарабельное метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности. Тем самым метрическое пространство удовлетворяет второй аксиоме счетности в том и только том случае, если оно сепарабельно.

17. Существует ли не сепарабельное метрическое пространство?

18. Докажите, что пространство, удовлетворяющее первой аксиоме счётности, хаусдорфово в том и только том случае, если любая последовательность точек в нём имеет не более одного предела.

19. Метризуема ли прямая Зоргенфрея (соответственно, прямая в топологии Зарисского)?

20. Метрическое пространство нормально.

IV. **Про непрерывные и факторные отображения.**

21. Докажите, что непрерывное биективное открытое (соответственно, замкнутое) отображение является гомеоморфизмом.

22. Докажите, что непрерывное сюръективное открытое (соответственно, замкнутое) отображение является факторотображением.

23. Пусть $f\colon X \to Y$ – замкнутое отображение, $A \subseteq Y$, U – открытая окрестность $f^{-1}(A)$ в X. Докажите, что существует открытая окрестность V множества A в Y такая, что $f^{-1}(V) \subseteq U$.

24. Какие из аксиом отделимости сохраняются в сторону образа при непрерывных отображениях?

25. Верно ли, что: (a) непрерывный образ всюду плотного множества всюду плотен? (b) непрерывный образ нигде не плотного множества нигде не плотен?

26. Доказать, что для непрерывных отображений $f, g\colon X \to Y$ в хаусдорфово пространство Y множество точек совпадения $\{x \in X\colon f(x) = g(x)\}$ замкнуто.

27. Сохраняются ли первая (вторая) аксиома счетности, сепарабельность пространства в сторону образа при непрерывных отображениях?

28. Будет ли факторпространство пространства, удовлетворяющего первой (второй) аксиоме счетности, удовлетворять первой (второй) аксиоме счетности?

29. Будет ли факторпространство нормального пространства удовлетворять аксиоме T_0?