Исследование G-пространств и их расширений методами равномерной топологии и обратных спектров

К. Л. Козлов

Москва 2013

Оглавление

0.1 Введение

В Эрлангенской программе Феликсом Клейном в основу изучения геометрии положено учение об "автоморфизмах" — преобразованиях, сохраняющих все рассматриваемые в этой геометрии свойства фигур. Формирование данного взгляда были в первую очередь связано с исследованиями Б. Римана и Г. Гемгольца по основаниям геометрии. Софус Ли — первый, кто всецело посвятил свое творчество систематическому изучению групп непрерывных преобразований и их инвариантов, выявлению их значения: в классификации геометрий, в механике, в теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными.

В топологии роль преобразований отводится гомеоморфизмам. Если, дополнительно, группу гомеоморфизмов пространства наделить топологией, в которой ее действие становится непрерывным, то как сама топология группы преобразований, так и топология ее действия становятся мощными исследовательскими инструментами в изучении взаимных связей между свойствами пространств, их групп преобразований и их действий. Например группа гомеоморфизмов компакта допускает топологию польского пространства, согласованную со структурой группы, в которой действие непрерывно. При непрерывном транзитивном действии компактной группы фазовое пространство диадично. Теорема Е. Эффроса [64], эффективно применяемая в теоремах о неподвижных точках, в исследованиях однородности [111], демонстрирует, что условие открытости транзитивного действия польской группы на метризуемом пространстве эквивалентно тому, что последнее является польским пространством. Приведенные примеры такого рода связей дают основания считать, что рассмотрение пространства вместе с дополнительной алгебраической структурой, согласованной с его топологией, налагает в ряде случаев весьма сильные ограничения на свойства самого пространства. Так еще в конце 50-х годов XX века Л. Н. Ивановский [12] и В. И. Кузьминов [20], отвечая на вопрос П. С. Александрова, установили, что пространство бикомпактной топологической группы является диадическим бикомпактом. Позже М. М. Чобан [41] доказал, что всякий G_δ-бикомпакт в произвольной топологической группе или факторпространстве почти метризуемой группы по ее замкнутой подгруппе является диадическим. Б. А. Пасынков [28] усилил результаты М. М. Чобана, установив, что бикомпакты, в рассмотренных случаях, являются бикомпактами Дугунджи.

Как эти, так и целая серия других фактов послужили основой для постановки А. В. Архангельским [4] следующей общей задачи. Пусть на топологическом пространстве непрерывно действует топологическая группа из некоторого класса. Как это сказывается на свойствах пространства?

Дальнейшие исследования В. В. Успенского показали, что любая топологическая группа или факторпространство $\aleph_0$-уравновешенной группы — od-пространства, т.е. обладают свойством типа Дугунджи [34]. В частности, если они бикомпактны, то являются бикомпактами Дугунджи [33], если псевдокомпактны, то их стоун-чеховские бикомпактификации — бикомпакты Дугунджи [61, 34]. Псевдокомпактное G-пространство с транзитивным действием $\aleph_0$-ограниченной группы — d-пространство, а его стоун-чеховская бикомпактификация — бикомпакт Дугунджи [34]. В частности, если оно бикомпактно, то является бикомпактом Дугунджи [33]. Бикомпактное G_δ-подмножество факторпространства группы по равномерной подгруппе — бикомпакт Дугунджи [73].

Все рассматриваемые транзитивные действия в приведенных выше результатах обладают тем свойством, что они фактически определяют топологию фазового пространства. Тем самым при рассмотрении действий групп на пространствах, которые определяют топологию последних, есть основания ожидать, что некоторые свойства групп перенесутся и на пространства.

Понятие d-открытого или слабо микро-транзитивного действия введено в работе Ф. Анцеля [47] при альтернативном доказательстве теоремы Эффроса. Отметим, что аналогичный подход к ее доказательству под названием принципа открытости отображений рассматривался Х. Торунчиком. Данное им название связано с фундаментальной теоремой функционального анализа об открытости отображения: непрерывное сюръективное линейное отображение пространств Фреше (которые полно метризуемы) открыто. Ее вариант для банаховых пространств принадлежит С. Банаху. Т. Бычковский и Р. Поль [58] доказали теорему открытости для почти открытого (т.е. d-открытого) уплотнения полного по Чеху пространства на хаусдорфово пространство. Л. Браун доказал теорему открытости для почти открытого гомоморфизма полной по Чеху топологической группы [56]. Для d-открытых действий полных по Чеху групп выполнена теорема открытости — Теорема 2.4.2. В эквивариантном случае d-открытость действий оказалось достаточно продуктивным в решении вопроса алгебраической однородности однородных пространств [47, 89]; успешно используется при исследовании G-бикомпактификаций [59, 17, 18]; позволяет строить информативную решетку d-открытых отображений на пространстве (свойства типа Дугунджи) [34, 18].

Другой особенностью исследований в приведенных выше результатах является использование метода обратных спектров, появившегося в результате введения П. С. Александровым понятия проекционного спектра. Его основными применениями в топологии явились как построения пространств с заданными свойствами, так и изучение сложных пространств, аппроксимируя их более простыми. Примером первого вида применения является созданный В. В. Федорчуком [36] метод развертываемых спектров и вполне замкнутых отображений. Важным примером второго вида применения является результат С. Мардешича [85] о том, что всякий бикомпакт является пределом обратного спектра из компактов, размерность которых не превосходит размерности исходного бикомпакта и его метризуемый аналог — теорема Фрейденталя [66]. Л. С. Понтрягиным [29] получено спектральное представление бикомпактных топологических групп — их разложение в ряд Ли. Его идея непрерывности трансфинитного спектра позволила Р. Хейдону [72] дать спектральную характеризацию бикомпактов Дугунджи, введенных А. Пелчинским [100]. Дальнейшее развитие метода обратных спектров в исследовании бикомпактов проведено Е. В. Щепиным [43, 44, 45]. Им получена спектральная теорема об изоморфности конфинальных подспектров несчетных спектров, пределы которых гомеоморфны, решается задача об адекватности классов бикомпактов классам отображений, вводится класс открытопорожденных или $\varkappa$-метризуемых бикомпактов.

Метод обратных спектров успешно применяется и в не бикомпактном случае (Е. Г. Скляренко, Б. А. Пасынков, А. В. Архангельский, А. Ч. Чигогидзе, М. Г. Ткаченко, Д. Б. Шахматов, В. Валов, В. Кульпа и др.). Анализ характеризации бикомпактов Дугунджи, предложенный Е. В. Щепиным, позволил В. В. Успенскому [34] определить $(od\text{-})d$-пространства — классы не бикомпактных пространств, соответствующих классу бикомпактов Дугунджи. Введенное понятие позволило рассматривать с единой точки зрения топологические группы, произведения пространств со счетной сетью и бикомпакты Дугунджи. Понятия $\varkappa$-метризуемости и d-пространства также позволили осмысленно распространить результаты, полученные методом обратных спектров для бикомпактов, на класс псевдокомпактных пространств.

Вложение объекта в объект с хорошими свойствами является действенным методом исследований и используется в различных областях математики. Р. Дедекинд и Г. Кантор использовали расширение рациональных чисел для построения действительных чисел. В результате добавления "бесконечно удаленной" точки к плоскости получается сфера, а расширение аффинной плоскости присоединением "бесконечно удаленных" точек приводит к проективной плоскости. Первый пример позволяет давать геометрические описания функций комплексного переменного, а второй позволяет ликвидировать различия между пересекающимися и параллельными прямыми и получить унифицированную геометрию.

В топологии под расширением пространства X понимаются пространства, в которые X вложено всюду плотным образом. Изучение бикомпактификаций (бикомпактных расширений) пространств было начато К. Каратеодори и получило свое развитие в работах П. С. Александрова, М. Стоуна, А. Н. Тихонова, Е. Чеха и других. Наиболее популярными являются максимальная бикомпактификация Стоуна–Чеха и одноточечная Александровская бикомпактификация. Большую роль играют и некомпактные расширения. Ф. Хаусдорф перенес метод Кантора на построения пополнений метрических пространств. Е. Хьюитт показал важность "вещественной компактификации" пространства X для изучения кольца $C(X)$ всех непрерывных вещественных функций на нем. Введенное А. Вейлем понятие равномерной структуры, и появившийся общий мощный метод построения пополнений равномерных пространств, дали возможность строить расширения тихоновских пространств, которые полны по Дьедонне.

Бикомпактные расширения пространств, пополнения равномерных пространств по Хьюитту и Дьедонне, пополнение метического пространства, пополнение топологической группы по Вейлю (по правой равномерности) и по Райкову (по двусторонней равномерности) позволяют вкладывать пространство в объемлющее пространство, обладающее как дополнительными внутренними (в частности, свойством сходимости широкого класса последовательностей, направленностей, центрированных систем), так и внешними свойствами. Бикомпактификации обладают свойством абсолютной замкнутости, пополнение пространства по Хьюитту замкнуто вложено в произведение действительных прямых, пополнение пространств по Дьедонне замкнуто вложено в произведение метризуемых пространств, группа, полная по Райкову, замкнута в любой содержащей ее топологической группе. Безусловно уже эти перечисленные преимущества пополнений предоставляют дополнительные возможности для исследования самих пространств.

Расширения топологического пространства, на которые может быть продолжено действие $\alpha : G \times X \to X$ с сохранением непрерывности, называются G-расширениями. Рассмотрение продолжений действий с сохранением непрерывности началось с бикомпактификационной проблемы Я. де Гроота: любое ли G-пространство G-тихоновское (т.е. имеет бикомпактное G-расширение)? Данная проблема удовлетворительно решена. Р. Пале [99] первым установил G-тихоновость пространства с действием компактной группы Ли, Я. де Врис охарактеризовал G-тихоновские пространства, используя равномерные структуры и понятие ограниченного действия [116]. Я. де Врис [115] и Ю. М. Смирнов в работе [2] привели характеризацию G-тихоновских пространств через разделяющие кольца G-равномерных функций, М. Мегрелишвили получил характеризацию с использованием квазиограниченных действий [22]. Достаточное условие (квазиограниченность действия) возможности продолжения действия с сохранением непрерывности предложено М. Мегрелишвили. Квазиограниченные действия обобщают ограниченные и равномерно равностепенно непрерывные действия [7]. Кроме того, квазиограниченность действия гарантирует возможность продолжения действия пополненной по двусторонней равномерности группы. Им также построен первый пример G-пространства, не являющегося G-тихоновским [24]. А. М. Соколовской построен пример псевдокомпактного G-пространства, не являющегося G-тихоновским [106].

Вопросы о максимальных элементах в полурешетке G-бикомпактификаций G-тихоновских пространств рассматривались Р. Бруком [55] (им найдена максимальная G-бикомпактификация группы, на которой она сама действует левыми сдвигами), Ю. М. Смирновым [30, 31]. Э. ван Дауэн [63] установил, что Стоун–Чеховская бикомпактификация h-однородного пространства X — единственная бикомпактификация, на которую продолжаются все его гомеоморфизмы. Я. ван Милл [94] показал, что если X — однородный компакт такой, что $X \setminus \{x\}$ — CDH пространство для любой точки $x \in X$, то тогда существует польская группа G, которая на любом счетном всюду плотном подмножестве A компакта X допускает транзитивное действие, при котором X является единственным полным по Чеху G-расширением A (тем самым X — единственная G-бикомпактификация A).

С. Антонян [1] установил взаимно однозначное соответствие между G-бикомпактификациями G-пространства с действием бикомпактной группы и кольцами эквивариантных отображений. Ю. М. Смирнов в работе [2] установил взаимно однозначное соответствие между G-бикомпактификациями (бикомпактными G-расширениями) и инвариантными близостями, согласованными с действием. Я. де Врис [117] и Ю. М. Смирнов в работе [2] установили, что при биекции Гельфанда–Шилова G-бикомпактификациям соответствуют замкнутые кольца G-равномерных функций, содержащие постоянные функции. М. Мегрелишвили установил взаимно однозначное соответствие между G-бикомпактификациями и вполне ограниченными эквиравномерностями [22].

Вопрос о существовании наименьших и минимальных G-бикомпактификаций в полурешетках бикомпактификаций G-тихоновских пространств рассматривались Ю. М. Смирновым и Л. Стояновым [107]. А. М. Соколовской [32] установлено существование минимальных, но не наименьшей G-бикомпактификации.

М. М. Чобан применил редукционный подход [40, 41], заменив открытое действие полной по Чеху группы на открытое действие $\aleph_0$-ограниченной группы, что было использовано В. В. Успенским в работах [33, 34]. Для SLH пространств Я. ван Милл показал, что сеперабельное метризуемое (соответственно польское) SLH пространство является пространством левых смежных классов сепарабельной метризуемой [92] (соответственно польской [93]) группы. Класс SLH пространств введен Л. Фордом [65] и важен сам по себе, так как он содержит однородные нульмерные пространства и топологические многообразия. Любое SLH пространство является алгебраически однородным.

В диссертации проводится исследование пространств с дополнительной алгебраической структурой — их группами преобразований. Решаются следующие задачи: о свойствах пространств с действием подгрупп произведения полных по Чеху групп; об условиях алгебраической однородности G-пространств; о редукции действий; о роли структуры произведения $G \times X$ в продолжении действий; о строении полурешеток G-бикомпактификаций.

Основными результатами диссертации являются следующие.

- Получены спектральные представления пространств с d-открытым действием, порожденные спектральными представлениями действующих групп. Установлена открытопорожденность в смысле Е. В. Щепина бикомпакта, являющегося факторпространством подгруппы произведения полных по Чеху групп. Глава 4.

- Построение теории d-открытых действий. В частности доказан эквивариантный аналог принципа открытости отображений С. Банаха: непрерывное d-открытое действие полной по Чеху группы открыто. Дан критерий, когда d-открытость действия сохраняется при его продолжении на максимальную G-бикомпактифиацию. Глава 2.

- Получена теорема о редукции d-открытого действия $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве до аналогичного действия $\aleph_0$-ограниченной группы. Глава 4.

- Приведены достаточные условия возможности непрерывного продолжения действия на пополнения пространства X, использующие условия "прямоугольности"произведения $G\times X$ (в смысле З. Фролика, А. Ч. Чигогидзе, Б. А. Пасынкова, Дж. Исбелла). Установлено, что любое сепарабельное метризуемое SLH пространство обладает польским SLH пополнением, которое реализуется согласовано с пополнением действующей группы. Главы 3, 5.

- Описано инвариантное подмножество максимальной G-бикомпактификации пространства, содержащееся в его любой G-бикомпактификации. Доказано, что любой однородный CDH компакт является единственной G-бикомпактификацией пространства рациональных чисел с транзитивным действием некоторой польской группы. Главы 3, 5.

Первая глава носит вспомогательный характер.

В § 1.1 даны предварительные сведения о (псевдо)равномерных структурах. Для бесконечного кардинала $\mathfrak{m}$ обозначим через $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ семейство метризуемых пространств веса $\leq \mathfrak{m}$, $\mathcal{M}_0$ — семейство компактов, $\mathcal{M}_\infty$ — семейство всех метризуемых пространств. Считаем равномерности на пространствах из $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$, максимальными. Для пространства X пусть $\mathcal{U}_\mathfrak{m}$ — инициальная равномерность на X относительно отображений $f : X \to M$, где $M \in \mathcal{M}_\mathfrak{m}$. Обозначая $\mathcal{U}_0$ через $\mathcal{U}_\beta$, $\mathcal{U}_{\aleph_0}$ через $\mathcal{U}_\nu$, и $\mathcal{U}_\infty$ через $\mathcal{U}_\mu$, имеем $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta} = \beta X$, $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\nu} = \nu X$ и $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\mu} = \mu X$.
Если $\mathcal{U}$ — псевдоравномерность на X, то подмножества $[x]_\mathcal{U} = \bigcap\{\mathrm{St}(x, v) : v \in \mathcal{U}\}$ образуют разбиение $E(\mathcal{U})$ пространства X. На элементах этого разбиения $X/E(\mathcal{U})$ определена *фактор равномерность* $\bar{\mathcal{U}}$ — сильнейшая из равномерностей на фактормножестве $X/E(\mathcal{U})$, в которой факторотображение множеств $p : X \to X/E(\mathcal{U})$ является равномерно непрерывным. В этом случае отображение p называется *равномерно факторным отображением. Равномерное факторпространство* $X/\mathcal{U}$ — множество $X/E(\mathcal{U})$ в топологии, индуцированной фактор равномерностью $\bar{\mathcal{U}}$. Факторпространство X по $E(\mathcal{U})$ обозначим через $X/E(\mathcal{U})$.

В § 1.2 рассматриваются пополнения ограниченных прямоугольных подмножеств произведений.

В § 1.3, обобщая понятие полуравномерного произведения Дж. Исбелла [76], вводится понятие кусочно полуравномерного произведения.

Определение 1.3.1. Отображение f на произведении равномерных пространств $(A, \mathcal{U})$ и $(B, \mathcal{V})$ в равномерное пространство $(Z, \mathcal{W})$ *кусочно полуравномерно*, если для любого $w \in \mathcal{W}$ существует система равномерных покрытий $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V, U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющая условию:

$$\text{для любого } U' \in U \wedge u(U, V), \text{ где } V \in v(U), U \in u,$$

$$\text{выполнено } f(U' \times V) \subset W \text{ для некоторого } W \in w.$$

Кусочно полуравномерное произведение $A *_p B$ это произведение $A \times B$ со слабой равномерностью, индуцированной всеми кусочно полуравномерными отображениями в метрические пространства и топологией, порожденной этой равномерностью.

В *Предложении 1.3.3* показано, что пополнение кусочно полуравномерного произведения совпадает, как и в случае полуравномерного произведения, с произведением пополнений сомножителей.

В § 1.4 даны предварительные сведения о топологических группах и указан способ усиления топологии действующей группы.
Пусть $\mathcal{G}$ — семейство подгрупп топологической группы G с топологией τ, *насыщенное относительно сопряжения*, т.е.

$$g^{-1}Tg \in \mathcal{G} \text{ для любых подгруппы } T \in \mathcal{G} \text{ и элемента } g \in G.$$

Предбазу новой топологии $\tau_{\mathcal{G}}$ на G составляют множества τ и элементы gT, Tg, $T \in \mathcal{G}$, $g \in G$. Топология $\tau_{\mathcal{G}}$, которую назовем *усилением топологии* τ *семейством* $\mathcal{G}$, определяет топологическую группу $G_{\mathcal{G}} = (G, \tau_{\mathcal{G}})$.
Дается переформулировка "Критерия польскости" Я. ван Милла [93] в вводимых терминах.

В §§ 1.5, 1.6 даны предварительные сведения о топологических группах преобразований и спектральных представлениях пространств соответственно.
Для пространства X система $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$, состоящая из направленного множества A, непрерывных сюръективных отображений f_α пространства X, $\alpha \in A$, и отображений $f_{\beta\alpha} : f_\beta(X) \to f_\alpha(X)$, $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$, называется *согласованной системой отображений* на X, если

(1) диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L\} : X \to \Pi\{f_\alpha(X) : \alpha \in A\}$ является вложением;

(2) $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$, $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$.

Согласованная система отображений L называется:

- *(d-)открытой*, если все отображения f_α, $\alpha \in A$, (d-)открыты;

- *эквивариантной*, если X — G-пространство, и все отображения f_α, $\alpha \in A$, эквивариантны;

- *мультипликативной* (*слабо мультипликативной*) , если для любого $B \subset A$ существует $\beta = \sup B$ в A такой, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (инъективно);

- *$\mathcal{P}$-системой*, если диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L : f_\alpha(X)$ — обладает свойством $\mathcal{P}\}$ является вложением;

- *τ-полной* (*слабо τ-полной*), если для любой цепи B в A мощности $\tau \geq \aleph_0$ существует $\beta = \sup B$ в A такой, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (инъективно);

- *(слабо) $\tau_{\mathcal{P}}$-системой*, если в (слабо) τ-полной согласованной системе отображений все образы пространства X обладают свойством $\mathcal{P}$.

Согласованные (τ-полные) системы отображений находятся в естественном соответствии с (τ-почти непрерывными) обратными спектрами.

Во второй главе строится теория d-открытых действий.

В § 2.1 вводятся понятия открытых, d-открытых и слабо d-открытых действий и доказываются их свойства.

Определение 2.1.1 Действие $\alpha : G \times X \to X$ назовем

открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \mathrm{int}(Ox)$;

d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$;

слабо d-открытым, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ существует точка $y \in X$ такая, что $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oy))$.

К числу интересных и технически важных результатов относятся:

- *Предложение 2.1.1 (о разложении G-пространства с d-открытым действием на открыто-замкнутые компоненты действия).*

  (a) При открытом действии фазовое пространство является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно факторпространству действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе.

  (b) Если действие слабо d-открыто или d-открыто, то фазовое пространство X является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых является замыканием орбиты некоторой точки в первом и произвольной точки во втором случае (т.е. непрерывный взаимно однозначный образ факторпространства действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе всюду плотен в каждом из подмножеств).

- *Предложение 2.1.5 (критерий d-открытости действия на эквивариантном образе G-пространства с d-открытым действием).* Пусть $f : X \to Y$ — эквивариантное отображение G-пространства X с (d-)открытым действием, на пространство Y с действием группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:

  (a) действие на Y (d-)открыто;

  (b) отображение f (d-)открыто.

  Если действие на X открыто, то условия (a) и (b) в формулировке с открытостью также эквивалентны следующему условию:

  (c) f — факторотображение.

- *Предложение 2.1.6 (достаточное условие сохранения d-открытости действия при усилении топологии d-открыто действующей группы).*

Пусть X — G-пространство, $\mathcal{G}$ — насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп группы G такие, что для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ *d-открыто действует в точке* $x \in X$. Тогда группа $G_{\mathcal{G}}$ d-открыто действует в точке x.

В § 2.2 строятся псевдоравномерности, индуцированные d-открытыми действиями на пространствах.

Предложение 2.2.1 (о базе индуцируемой псевдоравномерности на пространстве со слабо d-открытым действием). Пусть действие на X слабо d-открыто и семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ удовлетворяет условиям

(1) для любых $O, U \in \mathcal{O}$ существует $V \in \mathcal{O}$ такой, что $V \subset O \cap U$;

(2) для любого $O \in \mathcal{O}$ существует $U \in \mathcal{O}$ такой, что $U^2 \subset O$ и $U^{-1} \subset O$.

Тогда семейство покрытий $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\}$, $O \in \mathcal{O}$, является базой псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ на множестве X. При этом вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$, а топология $\tau_{\mathcal{O}}$, индуцируемая псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, слабее топологии пространства X.
Если семейство $\mathcal{O}$ дополнительно к условиям (1) и (2) удовлетворяет условию

(3) для любых $O \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ существует $V \in \mathcal{O}$ такой, что $gVg^{-1} \subset O$,

то псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ инвариантна, и X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ — G-пространство.
Если дополнительно к условиям (1) и (2) действие удовлетворяет условию

для любых двух различных точек x, y пространства X существует элемент $O \in \mathcal{O}$ такой, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия γ_O,

то $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ — равномерность на X.

Для G-пространства X через $\mathcal{U}_G$ обозначается равномерность, построенная по семейству $N_G(e)$ — открытых окрестностей единицы $e \in G$, удовлетворяющему условиям (1) – (3). Псевдоравномерность $\mathcal{U}_H$ строится по семейству

$N_G(H) = \{OH : O \in N_G(e)\}$, где H — равномерная подгруппа [101, 40, 103], удовлетворяющему условиям (1) – (2).

Теорема 2.2.1 (о факторизации действия по равномерной подгруппе). Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — равномерная подгруппа G. Тогда для псевдоравномерности $\mathcal{U}_H$ на X имеем:

(a) $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$;

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_H)$ открыто.

Если, дополнительно, $[x]_{\mathcal{U}_H}$ бикомпактно, $x \in X$, то равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_H$ открыто и совершенно (тем самым, пространства $X/E(\mathcal{U}_H)$ и $X/\mathcal{U}_H$ естественно гомеоморфны).

В § 2.3 вводятся понятия вполне ограниченного и равномерно локально G-равномерного действий.

Определения 2.3.1 и 2.3.2. Действие на пространстве X назовем *вполне ограниченным*, если для любого непустого открытого множества $W \subset X$ семейство $\{gW : g \in G\}$ является покрытием пространства X, из которого можно выбрать конечное подпокрытие.
d-Открытое действие назовем *равномерно локально G-равномерным*, если для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такое, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux принадлежит семейству $\mathcal{U}_G|_{Ux}$.

Доказываются их свойства.

Предложение 2.3.1 (о сохранении d-открытости и вполне ограниченности действия при переходе к эквивариантному образу). Пусть X — G-пространство с вполне ограниченным d-открытым действием группы G и $f : X \to Y$ — эквивариантное отображение на пространство Y с действием группы G. Тогда отображение f — d-открыто, и действие G на Y d-открыто и вполне ограничено.

Лемма 2.3.1 (о равномерной локальной G-равномерности d-открытого действия $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном пространстве). Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием $\aleph_0$-уравновешенной группы. Тогда действие равномерно локально G-равномерно.

В § 2.4 построены примеры, показывающие различие типов "d-открытости" транзитивных действий (*Пример 2.4.1, Предложение 2.4.1*). В [93, Следствие 4.3] Я. ван Миллом построен пример однородного польского пространства Z, не являющимся алгебраически однородным. В *Предложении 2.4.1* показано, что возможно транзитивное слабо d-открытое, но не d-открытое действие польской группы на подмножестве первой категории пространства Z.
В *Теореме 2.4.1* даны достаточные условия открытости d-открытых действий. В частности, доказана *Теорема 2.4.2 (открытости действия)*, которая фактически показывает, что транзитивность действия полной по Чеху группы реализуется его d-открытостью. Этот результат обобщает соответствующее утверждение Ф. Анцеля [47] для польских групп.

Теорема 2.4.2 (открытости действия). Непрерывное d-открытое действие полной по Чеху группы открыто.

В третьей главе изучаются G-расширения G-пространств.

В § 3.1 доказана *Теорема 3.1.1 (общий критерий продолжения действий).*

В § 3.2 использованы условия "прямоугольности" произведения для продолжения действия на пополнения пространства. В частности, свойства прямоугольности, сильной прямоугольности и условие прямоугольности произведения, введенные Б. А. Пасынковым [27], А. Ч. Чигогидзе [60] и З. Фроликом [67] соответственно, являются достаточными для непрерывного продолжения действий на пополнения пространств по Дьедонне, по Хьюитту и на Стоун–Чеховскую бикомпактификацию соответственно (*Следствие 3.2.1*).

Определение 3.2.1 Открытое подмножество $U \times V$ произведения $X \times Y$ называется *функционально открытым прямоугольником*, если U и V являются функционально открытыми подмножествами X и Y соответственно.

Произведение $X \times Y$ называется $\mathfrak{m}$-*прямоугольным*, если для любого покрытия $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(X \times Y)$ (покрытия из равномерности $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ пространства $X \times Y$) существует σ-локально конечное покрытие $v \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}} \times \tilde{Y}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}})$ мощности $\leq \mathfrak{m}$, состоящее из функционально открытых прямоугольников такое, что $v \wedge (X \times Y) \succ u$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$ (под мощностью ≤ 0 подразумеваем "конечное" , и $\leq \infty$ означает, что ограничение на мощность отсутствует).

Теорема 3.2.1. Если произведение $G \times X$ — $\mathfrak{m}$-прямоугольно, то тогда любое непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ имеет непрерывное продолжение на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}}$.

Этот естественный подход в исследовании существования G-расширений связан с изучением равномерных структур на произведении $G \times X$, дающих возможность продолжать действие $\alpha : G \times X \to X$, используя равномерную непрерывность. В *Следствии 3.2.4* продемонстрировано, что результаты о непрерывном продолжении действий:

- локально бикомпактных групп (М. Мегрелишвили [87]);
- локально псевдокомпактных групп на b_f-пространствах (С. Антонян и М. Санчис [51]);
- псевдокомпактных групп на псевдокомпактных пространствах (Н. Антонян [50] и Е. А. Резниченко [104]);
- псевдокомпактных групп на метризуемых пространствах (С. Антонян [3]);
- полуограниченной b_f-группы G на полуограниченном b_f-пространстве X

являются следствием той или иной прямоугольности произведения $G \times X$.

Теорема 3.2.2. Пример А. М. Соколовской [106] — пример G-пространства, не имеющего полных по Дьедонне G-расширений.

В §3.3 даны характеризации ограниченных [116] и равномерно равностепенно непрерывных действий [7], с использованием введенного Дж. Исбеллом понятия полуравномерного произведения пространств [76].

Теоремы 3.3.1 и 3.3.3. Непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$

- полуравномерно относительно правой равномерности $\mathcal{R}$ на G и насыщенной равномерности $\mathcal{U}$ на X в том и только том случае, если действие ограничено на X с равномерностью $\mathcal{U}$;

- полуравномерно на произведении $X \times G$ (где X — первый и G — второй сомножители полуравномерного произведения) относительно левой равномерности $\mathcal{L}$ на G и насыщенной равномерности $\mathcal{U}$ на X в том и только том случае, если действие равномерно равностепенно непрерывно на X с равномерностью $\mathcal{U}$.

Из полученных характеризаций следует, что действие псевдокомпактной группы на G-пространстве X, являющимся b_f-пространством, является равномерно равностепенно непрерывным (*Следствие 3.3.6*). Тем самым уточняются свойства действий в результатах из [50, 104, 3].
Для характеризации квазиограниченных действий используется понятие кусочно полуравномерного произведения.

Теорема 3.3.4. Непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$

- кусочно полуравномерно относительно двусторонней равномерности $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}$ на G и насыщенной равномерности $\mathcal{U}$ на X в том и только том случае, если действие квазиограничено на X с равномерностью $\mathcal{U}$.

Из полученной характеризации следует, что непрерывное действие локально бикомпактной группы на пространстве X (соответственно локально псевдокомпактной группы на b_f-пространстве) квазиограниченно на X с максимальной равномерностью (*Следствие 3.3.8*). Тем самым уточняется свойство действий в результате из [51].

В § 3.4, при изучении семейства G-бикомпактификаций G-тихоновского пространства, устанавливается, что оно является верхней полурешеткой $K_G(X)$ с естественным порядком (подрешетка полурешетки всех бикомпактификаций) (*Предложение 3.4.1*).

Через X_G обозначается множество точек d-открытости действия группы G (*Определение 2.1.2*). Положим $\hat{X} = \hat{G}X \cup (\beta_G X)_{\hat{G}}$. Оно содержит "пополнение" каждой орбиты $\hat{G}x$, $x \in X$ (за счет возможности пополнения действующей группы G по двусторонней равномерности) и орбиты, состоящие из точек d-открытости действия. При этом получающееся таким образом расширение исходного пространства является его G-расширением.

Теорема 3.4.1. Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда $K_G(X) = K_G(\hat{X})$. Более того, любое бикомпактное G-расширение X является бикомпактным G-расширением $\hat{X}$.

Пусть топологии τ, τ', $\tau' \geq \tau$ на группе G такие, что групповые операции непрерывны. Топологические группы (G, τ') и (G, τ) будем обозначать G' и G соответственно.

Теорема 3.4.2. Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда $K_G(X)$ является подрешеткой полурешетки $K_{G'}(X)$. Кроме того, $K_G(X) = K_{G'}(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_G X = \beta_{G'} X$.

Данные способы сравнения полурешеток G-бикомпактификаций дают возможность устанавливать когда полурешетка G-бикомпактификаций становится решеткой (т.е. существует наименьшая G-бикомпактификация) или имеет минимальные элементы (*Следствия 3.4.2, 3.4.3 и Теорема 3.4.3*). В частности.

Следствия 3.4.2, 3.5.5, 3.5.6, 3.5.7 и 3.5.8.

Если $\hat{X}$ локально бикомпактно, то у X существует наименьшее бикомпактное G-расширение.

Если $|\beta_G X \setminus \hat{X}| \leq 1$, то у X существует единственное бикомпактное

G-расширение.

Если (локально) вполне ограниченная группы действует левыми сдвигами на себе, то существует ее (наименьшая) единственное бикомпактное G-расширение.

Если для пространства G/H левых смежных классов топологической группы G по замкнутой подгруппе H пространство $\hat{G}/\mathrm{cl}_{\hat{G}}H$ (локально) бикомпактно, то у G-пространства G/H с естественным действием группы G существует (наименьшая) единственное бикомпактное G-расширение.

В § 3.5 предъявлена максимальная эквиравномерность на G-пространстве со слабо d-открытым действием и описана его максимальная G-бикомпактификация.

Теорема 3.5.1. Пусть X — G-пространство с слабо d-открытым действием. Тогда семейство покрытий

$$\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\}, O \in N_G(e),$$

является базой максимальной эквиравномерности $\mathcal{U}_G$ на X.

Следствие 3.5.1. Пусть X — G-пространство с слабо d-открытым действием. Тогда $\beta_G X$ — бикомпактификация Самюэля пространства X относительно эквиравномерности $\mathcal{U}_G$.

Показано, что d-открытое действие на G-пространстве X продолжается до слабо d-открытого действия на его пополнении по максимальной эквиравномерности.

Предложении 3.5.1. Если действие на пространстве X d-открыто, то тогда оно продолжается до слабо d-открытого действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$, d-открытого в точках подмножества X.

Для равномерно локально G-равномерных действий данный результат может быть усилен и позволяет дать критерий, когда d-открытость действия сохраняется при его продолжении на максимальную G-бикомпактифиацию. В этом случае G-бикомпактификация единствена (*Следствие 3.4.2*).

Теорема 3.5.2. Действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно в том и только том случае, если действие на его пополнении $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ по максимальной эквиравномерности равномерно локально G-равномерно.

Следствие 3.5.2. Действие на максимальном бикомпактном G-расширении $\beta_G X$ d-открыто в том и только том случае, если

(a) действие на X равномерно локально G-равномерно;

(b) максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена.

Теорема 3.5.3 обобщает результат о единственности G-бикомпактификации на G-пространство с d-открытым действием "по модулю бикомпактных подмножеств".

Теорема 3.5.3. Пусть X — всюду плотное инвариантное подмножество бикомпакта Y с d-открытым действием группы G, и $\mathcal{G}$ — насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп таких, что для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ d-открыто действует в точках $x \in Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$, где $K(\mathcal{G}_{Fin})$ — бикомпактное подмножество X. Тогда Y — единственная $G_{\mathcal{G}}$-бикомпактификация X.

При рассмотрении d-открытых и равномерно локально G-равномерных действий инфраметризуемых групп (подгрупп полных по Чеху групп) установлена единственность существования полного по Чеху (по Дьедонне) расширения, на котором продолжение действия пополнения группы по двусторонней равномерности открыто.

Предложение 3.5.4. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой группы. Тогда существует единственное полное по Чеху G-расширение X, на котором продолжение действия $\hat{G}$ открыто, а действие G d-открыто. В частности, если G — полная по Чеху группа, то X является факторпространством группы G и полно по Чеху.

Следствие 3.5.9. Пусть X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы. Тогда существует единственное полное по Дьедонне G-расширение X, являющееся факторпространством $\hat{G}$. Если, дополнительно, максимальная эквиравномерность вполне ограничена, то единственная бикомпактификация $\beta_G X$ является факторпространством полной по Чеху группы. В частности, если X — псевдокомпактное пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы, то ее единственная бикомпактификация $\beta_G X$ является факторпространством полной по Чеху группы.

В четвертой главе исследуются спектральные представления пространств, порожденные спектральными представлениями действующих на них групп. Данный подход дает возможность унификации исследований G-пространств с d-открытыми действиями групп, обладающих удобными спектральными представлениями. В частности, полных по Чеху групп, их произведений и подгрупп ($\aleph_0$-ограниченных, $\aleph_0$-уравновешенных).

В § 4.1 рассматриваются действия инфраметризуемых групп.

Следствие 4.1.1, Теорема 4.1.2. G-пространство с d-открытым действием (почти) метризуемой группы (почти) метризуемо.

В *Теореме 4.1.3* дано спектральное представление G-пространств с d-открытым действием инфраметризуемых групп, из которого следует.

Следствии 4.1.2.

- Псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой группы является $\varkappa$-метризуемым, и его Стоун–Чеховская бикомпактификация открытопорожденным бикомпактом.

- G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы и вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью является d-пространством, и его максимальная G-бикомпактификация — бикомпакт Дугунджи.

В частности, псевдокомпактное факторпространство инфраметризуемой группы является $\varkappa$-метризуемым; псевдокомпактное пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы является d-пространством и его Стоун–Чеховская бикомпактификация, совпадающая с максимальной G-бикомпактификацией, является бикомпактом Дугунджи.

В доказательстве приведенных выше утверждений использованы Теорема 2.2.1 (о факторизации действия по равномерной подгруппе) и Теорема 2.4.2 (открытости действия). Данные результаты обобщают абсолютный аналог теорем М. М. Чобана [41] и Б. А. Пасынкова [28] о G_δ-бикомпактах в факторпространствах почти метризуемых групп.

В § 4.2 приведена схема факторизации пространства по гомоморфизму на действующей группе.

Теорема 4.2.1. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — ядро сюръективного гомоморфизма $\varphi : G \to G'$. Тогда для псевдоравномерности $\mathcal{U}_{G'}$ на X, базу которой образуют покрытия $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{G'}(e)$, имеем:

I если действие на X открыто, то

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;

(c) действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;

(d) равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с открытым действием.

II если действие вполне ограничено, то

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто;

(b+) равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто;

(c) действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ вполне ограничено и d-открыто;

(d) равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с вполне ограниченным d-открытым действием.

III если гомоморфизм φ — d-открыт, то

(a) $[x]_{\mathcal{U}_{G'}} = \mathrm{cl}(Hx)$;

(b) факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;

(b+) равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто;

(c) действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто;

(d) равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с d-открытым действием.

Следствие 4.2.1. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G и пусть гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ — открыт. Тогда факторпространство $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ гомеоморфны. Тем самым, равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ является G'-пространством с открытым действием и равномерное факторотображение открыто.

В § 4.3 излагается общая схема переноса согласованного семейства гомоморфизмов с действующей группы на пространство, с помощью которой осуществляется перенос согласованных семейств отображений на группах, являющихся подгруппами произведений полных по Чеху групп, на G-пространства с их d-открытыми действиями.

Предложение 4.3.1. Пусть X — G-пространство со слабо d-открытым действием группы G, и на группе G существует согласованная система $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$, в которой отображения $\varphi_\alpha : G \to G_\alpha$, $\alpha \in A$, (тем самым, и $\varphi_{\beta\alpha} : G_\beta \to G_\alpha$, $\alpha, \beta \in A$) являются гомоморфизмами.

Тогда системы

$L_p = \{p_\alpha, p_{\beta\alpha}; A\}$, где $p_\alpha : X \to X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$ — равномерно факторное отображение, $\alpha \in A$, $p_{\beta\alpha} : X/\mathcal{U}_{G_\beta} \to X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$ и

$L_q = \{q_\alpha, q_{\beta\alpha}; A\}$, где $q_\alpha : X \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$ — факторотображение, $\alpha \in A$, $q_{\beta\alpha} : X/E(\mathcal{U}_{G_\beta}) \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$
являются согласованными и эквивариантными.

Если $\mathcal{P}$ — свойство топологических пространств, то будем обозначать через $cb\mathcal{P}$ свойство пространств иметь уплотнения (непрерывные биективные отображения) на пространства со свойством $\mathcal{P}$. Если для произвольного открытого (соответственно d-открытого, слабо d-открытого) непрерывного действия на пространстве X группы G с топологическим свойством $\mathcal{P}$ пространство X обладает свойством $\mathcal{Q}$, то будем говорить, что *свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны* (соответственно *d-открыто G-связаны, слабо d-открыто G-связаны*).

Теорема 4.3.1. Пусть G — подгруппа произведения $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ групп G_α, $\alpha \in A$, с конечно мультипликативным (соответственно с τ-мультипликативным) и наследственным по подгруппам свойством $\mathcal{P}$. Если X — G-пространство

случай I

(A) с открытым действием и

(B) свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны, то

тогда на X существует согласованная слабо мультипликативная открытая, эквивариантная $cb\mathcal{Q}$-система (соответственно открытая, эквивариантная слабая $\tau_{cb\mathcal{Q}}$-система).

случай II

(A) с d-открытым, вполне ограниченным действием и

(B) свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны, то

тогда на X существует согласованная d-открытая мультипликативная эквивариантная $\mathcal{Q}$-система (соответственно d-открытая, эквивариантная $\tau_{\mathcal{Q}}$-система).

Теорема 4.3.2. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, на которой существует $\tau_{\mathcal{P}}$-система гомоморфизмов $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}; A\}$.

Случай (III)

(B) Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны;

(C) система L — d-открыта, то

тогда система L_q (соответственно система L_p) отображений на X является открытой, эквивариантной слабо $\tau_{cb\mathcal{Q}}$-системой (соответственно d-открытой, эквивариантной $\tau_{\mathcal{Q}}$-системой).

Случай (IV)

(B) Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны;

(C) система L — открыта, то

тогда система $L_q = L_p$ отображений на X является открытой, эквивариантной $\tau_{\mathcal{Q}}$-системой.

Следствие 4.3.2. Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым, вполне ограниченным действием группы G, являющейся подгруппой произведения полных по Чеху групп. Тогда X — $\varkappa$-метризуемое пространство, βX — открытопорожденный бикомпакт. В частности, бикомпактное факторпространство подгруппы произведения полных по Чеху групп является открытопорожденным бикомпактом.

Если X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием группы G, являющейся подгруппой произведения полных по Чеху групп, и максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена, то X — $\varkappa$-метризуемо, и $\beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт с d-открытым действием замкнутой подгруппы произведения полных по Чеху групп. В частности, если X — псевдокомпактное G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием группы G, являющейся подгруппой произведения полных по Чеху групп, то X — $\varkappa$-метризуемо, и $\beta X = \beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт.

В § 4.4 показано как переходить от равномерно локально G-равномерного действия на пространстве с вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью $\aleph_0$-уравновешенной группы к аналогичному действию $\aleph_0$-ограниченной группы.

Теорема 4.4.1. Пусть X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием $\aleph_0$-уравновешенной группы и вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью. Тогда на группе G/H, где H — ядро действия, существует более слабая топология, в которой группа G/H — $\aleph_0$-ограничена, и естественно определенное действие G/H на X непрерывно и равномерно локально G-равномерно.

Так как d-открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве равномерно локально G-равномерно (*Лемма 2.3.1*), то получаем.

Следствие 4.4.2. d-Открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве заменяется на аналогичное действие $\aleph_0$-ограниченной группы.

В *Замечании 4.3.2* показано, что при d-открытом действии $\aleph_0$-уравновешенной группы на псевдокомпактном G-пространстве последнее является d-пространством, и его Стоун–Чеховская бикомпактификация, совпадающая с максимальной G-бикомпактификацией, является бикомпактом Дугунджи. Оно обобщает соответствующий результат В. В. Успенского [34] для транзитивного действия $\aleph_0$-ограниченной группы.

В пятой главе проведены исследования однородных пространств с использованием топологии действий.

В § 5.1 опереляется класс локально плотно однородных пространств (LDH пространств), содержащий сильно локально однородные (SLH) пространства и h-однородные пространства [25, 90].

Определение 5.1.1. Пространство X назовем *локально плотно однородным* (сокращенно LDH), если существует его открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $\mathrm{Hom}(X)_{X\setminus B}x$ всюду плотно в B.

Показано, что на любом LDH пространстве возможно d-открытое действие топологической группы, и в классе польских пространств свойства быть LDH и SLH пространством эквивалентны.

Теорема 5.1.1. Пусть X – LDH пространство, H — LDH группа X, и bX — произвольная бикомпактификация X, на которую продолжаются гомеоморфизмы из H. Тогда для топологической группы H, рассматриваемой как подгруппы $\mathrm{Hom}_{co}(bX)$ (группы гомеоморфизмов bX в компактно-открытой топологии), и для любой LDH(H) базы $\mathcal{B}$ на X имеем

(T1) для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_H(e)$ существует элемент $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $H_{X\setminus B} \subset O$,

(T2) действие $\alpha : H \times X \to X$ непрерывно и d-открыто (действие H на bX непрерывно и d-открыто в точках X),

(T3) для любого элемента $B \in \mathcal{B}$ ограничение действия $\alpha_B : H_{X\setminus B} \times B \to B$ d-открыто,

(T4) LDH(H) компоненты X совпадают с компонентами действия α.

Теорема 5.1.2. Пусть X – польское LDH пространство. Тогда

(1) на X непрерывно и открыто действует польская группа,

(2) если X однородно, то оно является пространством левых смежных классов польской группы,

(3) X — SLH пространство.

Показано, что любое сепарабельное метризуемое LDH (SLH) пространство обладает расширением, которое является польским SLH пространством. При этом пополнение реализуется согласованно с пополнением действующей группы по двусторонней равномерности. Отметим, что в [93, Замечание 6.7] показано, что не всякую SLH группу X можно использовать для получения польского SLH пополнения.

Теорема 5.1.3. Пусть X — сепарабельное метризуемое LDH пространство, T — его произвольная счетная LDH группа. Тогда существуют:

(A) польское SLH пространство Y, являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X : X \to Y$,

(B) польская группа G, являющаяся SLH группой Y, в которой подгруппа T всюду плотна (тем самым G – пополнение T по двусторонней равномерности) и соответствующее вложение $i_T : T \to G$

такие, что

(1) действие α группы G на Y непрерывно и открыто,

(2) действие α' топологической группы T (рассматриваемой как подгруппы G) на X непрерывно и d-открыто,

(3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \overset{i_T \times i_X}{\hookrightarrow} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

коммутативна.

Теорема 5.1.4. Пусть X — сепарабельное метризуемое SLH пространство. Тогда существуют:

(A) польское SLH пространство Y, являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X : X \to Y$,

(B) польская группа G, являющаяся SLH группой Y, в которой всюду плотна подгруппа H, являющаяся SLH группой X (тем самым G — пополнение H по двусторонней равномерности) и соответствующее вложение $i_H : H \to G$

такие, что

(1) действие α группы G на Y непрерывно и открыто,

(2) действие α' группы H на X непрерывно и открыто,

(3) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H \times X & \overset{i_T \times i_X}{\hookrightarrow} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

коммутативна,

(4) диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G = \hat{H} \\ \downarrow q_x & & \downarrow q'_x \\ X_x = H/H_x & \hookrightarrow & Y_x = G/G_x \end{array}$$

коммутативны, где X_x, Y_x — SLH(H) и SLH(G) компоненты содержащие точку x, q_x, q'_x — факторотображения, $x \in X$.

В § 5.2 получено обобщение результата Я. ван Милла [94].

Теоремы 5.2.2. Пусть X — однородный CDH компакт. Тогда существует польская группа G такая, что она она допускает транзитивное действие на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{Q}$, при котором компакт X является единственной G-бикомпактификацией $\mathbb{Q}$.

Приведен пример группы G и ее действия на пространстве рациональных чисел, которое не продолжается ни на какую его бикомпактификацию (*Пример 5.2.1*).

В § 5.3 показано, что *Пример 5.3.1* [38], построенный с использованием резольвент В. В. Федорчука [121], является примером однородного бикомпакта, который "очень далек" от алгебраически однородного — действие группы гомеоморфизмов в любой допустимой топологии не слабо d-открыто.

Первый пример однородного бикомпакта, не являющегося алгебраически однородным, построил В. В. Федорчук [35]. Используя его метод, в [54] построен пример однородного бикомпакта, для которого показано, что действие группы гомеоморфизмов в любой допустимой топологии не d-открыто.

Бикомпакт X называется *сильно однородным*, если существует отображение X^2 в $\mathrm{Hom}_{co}(X)$ $((x,y) \to h_{xy})$ такое, что $h_{xy}(x) = y$ для любых $x, y \in X$. Топологическое пространство X называется *пространством с выпрямляемой диагональю*, если существует гомеоморфизм $\varphi : X \times X \to X \times X$ такой, что $\varphi(\{x\} \times X) = \{x\} \times X$ для любых $x \in X$ и $\varphi(\Delta) = X \times \{a\}$ для некоторой точки $a \in X$, где $\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$. В. В. Успенский [34] доказал, что бикомпакты с выпрямляемой диагональю совпадают с сильно однородными бикомпактами и являются бикомпактами Дугунджи.

Предложение 5.3.2. Сильно однородный бикомпакт является факторпространством σ-бикомпактной группы.

Глава 1

Предварительные сведения

Все пространства, если противное не оговорено, предполагаются тихоновскими, отображения непрерывными. Придерживаемся обозначений из [46]. Под окрестностью понимается открытая окрестность, $\mathrm{cl}_X A$, $\mathrm{int}_X A$ — замыкание и внутренность множества A в пространстве X соответственно.

Лемма 1.0.1. *Для всюду плотного подмножества X пространства Y и любого подмножества Z в X выполнено следующее тождество*

$$X \cap \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Z)) = \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Z)).$$

Доказательство. Заметим, что $X \cap \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Z)) \subset X \cap \mathrm{cl}_Y(Z) = \mathrm{cl}_X(Z)$. Поэтому $X \cap \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Z)) \subset \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Z))$.

Для произвольной точки $y \in \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Z))$ существует ее окрестность W в X такая, что $W \subset \mathrm{cl}_X(Z)$. Следовательно, $y \in W' \subset \mathrm{cl}_Y(W) \subset \mathrm{cl}_Y(Z)$ для окрестности W' точки y в Y такой, что W всюду плотно в W'. Тем самым $\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Z)) \subset \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Z))$, что доказывает выполнение обратного включения. □

Отображение $f : X \to Y$ называется *d-открытым* [108] (отметим, что дополнительно требуется непрерывность действия) или *почти открытым* [58], если для любого открытого подмножества O в X выполнено $f(O) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(O)))$.

Предложение 1.0.1. *Пусть $f : X \to Y$ – d-открытое отображение. Тогда для всюду плотного подмножества A в X сужение $f|_A : A \to f(A)$ отображения f на A и $f(A)$ является d-открытым.*

Доказательство. Для произвольного открытого подмножества $V \subset A$ возьмем открытое подмножество $V' \in X$ такое, что $V' \cap A = V$. Легко видеть, что

$f(V) \subset f(V') \subset \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(f(V'))) = \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(f(V)))$. По лемме 1.0.1 (где $X = f(A)$, $Y = \mathrm{cl}_Y(f(X)))$ имеем $f(A) \cap \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(f(V))) = \mathrm{int}_{f(A)}(\mathrm{cl}_{f(A)}(f(V)))$. Тем самым предложение доказано. $\square$

Если на множестве даны две топологии $\tau_2 \subset \tau_1$, то будем говорить, что топология τ_1 сильнее τ_2 ($\tau_1 \geq \tau_2$). Топологическое пространство X с топологией τ при необходимости будем обозначать (X, τ).

Положим $I = [0, 1]$, S – окружность, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ – натуральные, рациональные и вещественные числа соответственно. Обозначим через $C(X, I)$ — семейство непрерывных отображений (функций) пространства X в I, $C(X)$ — семейство непрерывных отображений (функций) пространства X в $\mathbb{R}$ и $C^*(X)$ — семейство непрерывных ограниченных отображений (функций) пространства X в $\mathbb{R}$. Для функции $f \in C(X)$ через $\mathrm{osc}_A f$ обозначается колебание функции f на множестве $A \subset X$. Отображение $f : X \to Y$ называется z-замкнутым, если образ $f(F)$ любого функционально замкнутого подмножества F в X замкнут в Y.

Компакт — метризуемый бикомпакт. Через βX обозначается Стоун-чеховская бикомпактификация пространства X, через αX — одноточечная Александровская бикомпактификация локально бикомпактного пространства X. Метрика на пространстве согласована с топологией. Пространство называется польским, если оно сепарабельно и на нем существует полная метрика.

Всю необходимую информацию о решетках можно найти, например, в [6].

Пусть $\omega_1 = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ и $\omega_2 = \{V_\beta : \beta \in B\}$ — покрытия пространства X. Обозначение $\omega_1 \succ \omega_2$ означает, что покрытие ω_1 вписано в ω_2. Звезду точки x (подмножества A) относительно покрытия ω обозначим $\mathrm{St}(x, \omega)$ ($\mathrm{St}(A, \omega)$). Покрытие ω_1 (сильно) звездно вписано в покрытие ω_2, если покрытие $\{\mathrm{St}(x, \omega_1) : x \in X\}$ ($\{\mathrm{St}(V, \omega_1) : V \in \omega_1\}$), вписано в ω_2. Положим $\omega_1 \wedge \omega_2 = \{U_\alpha \cap V_\beta : \alpha \in A, \beta \in B\}$, $\omega_1 \wedge M = \{U_\alpha \cap M : \alpha \in A\}$, где $M \subset X$, $\mathrm{cl} u = \{\mathrm{cl} U_\alpha : \alpha \in A\}$, и $\cup u = \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\}$. Для сюръективного отображения $f : X \to Y$, покрытий $u = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ пространства X и

$v = \{V_\beta : \beta \in B\}$ пространства Y обозначим $f(u) = \{f(U_\alpha) : \alpha \in A\}$ и $f^{-1}(v) = \{f^{-1}(V_\beta) : \beta \in B\}$.

1.1 Равномерные структуры

Равномерные структуры на множестве вводятся через семейства покрытий. Необходимые сведения о равномерностях и близостях можно найти в [8], [46], [77].

Равномерность (близость), заданная на топологическом пространстве, называется согласованной с его топологией, если она индуцирует исходную топологию пространства. Ниже, если ничего дополнительно не сказано, то термин равномерность (близость) на топологическом пространстве означает согласованность равномерности (близости) с топологией пространства. Семейство всех равномерностей (близостей) на пространстве X является полной верхней полурешеткой с частичным порядком $\mathcal{U}_1 \geq \mathcal{U}_2$, если $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ ($\delta_1 \geq \delta_2$ если из $A\delta_1 B$ следует $A\delta_2 B$).

Для равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ через $\tilde{X}$ или $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ обозначим пополнение пространства X относительно равномерности $\mathcal{U}$, и через $\tilde{\mathcal{U}}$ продолжение равномерности $\mathcal{U}$ на пополнение $\tilde{X}$. Через μX, νX и βX обозначаются пополнения по Дьедонне, Хьюитту и Стоун-чеховская бикомпактификация X соответственно. Для равномерности $\mathcal{U}$ на X через $\mathcal{U}_s$ обозначается ее *предкомпактная рефлексия* [77, Гл. 2, Теорема 31], т.е. равномерность, базой которой являются все конечные покрытия из $\mathcal{U}$. Для $Y \subset X$ ограничение равномерности $\mathcal{U}$ на Y обозначается через $\mathcal{U}|_Y$. Для пространства X и его полного по Дьедонне расширения $\tilde{X}$ обозначим через $\mathcal{U}(\tilde{X})$ частично упорядоченное множество равномерностей на X, пополнениями относительно которых является $\tilde{X}$. Очевидно, что оно совпадает со множеством сужений на X полных равномерностей на $\tilde{X}$. Обозначим через $\mathcal{U}_{max}(\tilde{X})$ максимальный элемент $\mathcal{U}(\tilde{X})$.

Для бесконечного кардинала $\mathfrak{m}$ обозначим через $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$ семейство метризуемых пространств веса $\le \mathfrak{m}$, $\mathcal{M}_0$ — семейство компактов, $\mathcal{M}_\infty$ — семейство всех метризуемых пространств. Считаем равномерности на пространствах из $\mathcal{M}_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$, максимальными. Для пространства X пусть $\mathcal{U}_\mathfrak{m}$ — инициальная равномерность на X относительно отображений $f : X \to M$, где $M \in \mathcal{M}_\mathfrak{m}$ [8, Гл. 2, §2, Предложение 4].

Обозначаем $\mathcal{U}_0$ через $\mathcal{U}_\beta$, $\mathcal{U}_{\aleph_0}$ через $\mathcal{U}_\nu$, и $\mathcal{U}_\infty$ через $\mathcal{U}_\mu$. Тем самым имеем: $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta} = \beta X$, $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\nu} = \nu X$ и $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\mu} = \mu X$.

Определение 1.1.1. Для $X \subset Y$ равномерности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на Y *(слабо) равны относительно* X, если ($\tilde{X}^{\mathcal{U}|_X} = \tilde{X}^{\mathcal{V}|_X}$) $\mathcal{U}|_X = \mathcal{V}|_X$.

Замечание 1.1.1.

(a) Отношение (слабого) равенства относительно подмножества является отношением эквивалентности на равномерностях.

(b) Относительное равенство равномерностей влечет их слабое относительное равенство.

(c) Для любой равномерности $\mathcal{U}$ на Y выполнено $\mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{U}}} X = \tilde{X}^{\mathcal{U}|_X}$ (см., например, [8, Гл.2, §3]), и, следовательно, $\mathrm{cl}_Y X \subset \tilde{X}^{\mathcal{U}|_X}$.

Следствие 1.1.1. *Равномерности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на Y слабо равны относительно X в том и только том случае, если $\mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{U}}} X = \mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{V}}} X$.*

Замечание 1.1.2. Элементы $\mathcal{U}(\nu Y)$ ($\mathcal{U}(\mu Y)$) слабо равны относительно любого подмножества X пространства Y и $\mathcal{U}(\beta Y) = \{\mathcal{U}_\beta\}$.

Предложение 1.1.1. *Если равномерности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на Y (слабо) равны относительно X, то тогда они (слабо) равны относительно любого подмножества $Z \subset \mathrm{cl}_Y X$.*

Доказательство. Во-первых, покажем, что равномерности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (слабо) равны относительно $\mathrm{cl}_Y X$. Так как $\mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{U}}}(\mathrm{cl}_Y X) = \mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{U}}} X$, то из замечания 1.1.1 (c) следует, что $\widetilde{\mathrm{cl}_Y X}^{\mathcal{U}|_{\mathrm{cl}_Y X}} = \mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{U}}}(\mathrm{cl}_Y X) = \mathrm{cl}_{\tilde{Y}^{\mathcal{U}}} X = \tilde{X}^{\mathcal{U}|_X}$. Тем самым, если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ слабо равны относительно X, то тогда они слабо равны относительно $\mathrm{cl}_Y X$.

Если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ равны относительно X, то тогда $\widetilde{\mathcal{U}|_X} = \widetilde{\mathcal{V}|_X}$ и их ограничения на $\mathrm{cl}_Y X \subset \tilde{X}^{\mathcal{U}|_X} = \mathrm{cl}_{\tilde{Y}}(\mathrm{cl}_Y X)$ равны.

Для $Z \subset \mathrm{cl}_Y X \subset Y$ и равномерности $\mathcal{U}$ на Y пополнение $\tilde{Z}^{\mathcal{U}|_Z}$ является замкнутым подмножеством $\widetilde{\mathrm{cl}_Y X}^{\mathcal{U}|_{\mathrm{cl}_Y X}}$. Если $\tilde{X}^{\mathcal{U}|_X} = \tilde{X}^{\mathcal{V}|_X}$, то тогда $\widetilde{\mathrm{cl}_Y X}^{\mathcal{U}|_{\mathrm{cl}_Y X}} = \widetilde{\mathrm{cl}_Y X}^{\mathcal{V}|_{\mathrm{cl}_Y X}}$ и, тем самым, $\tilde{Z}^{\mathcal{U}|_Z} = \tilde{Z}^{\mathcal{V}|_Z}$. Случай относительного равенства очевиден. $\square$

Предложение 1.1.2. *Если для равномерностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на Y или $\mathcal{U}|_X$, или $\mathcal{V}|_X$ — вполне ограниченная равномерность на $X \subset Y$, то тогда их слабое относительное равенство эквивалентно равенству относительно X.*

Доказательство. Если $\mathcal{U}|_X$ вполне ограниченная равномерность на X, то тогда $\tilde{X}^{\mathcal{U}|_X}$ бикомпактно. Так как $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ слабо равны относительно X, и существует биекция между вполне ограниченными равномерностями на пространстве и его бикомпактификациями, то имеем $\mathcal{U}|_X = \mathcal{V}|_X$. Значит $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ равны относительно X. Обратная импликация очевидна по замечанию 1.1.1 (b). $\square$

Из предложений 1.1.1 и 1.1.2 следует.

Следствие 1.1.2. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — равномерности на Y, ограничение одной из которых на $X \subset Y$ вполне ограничено. Они слабо равны относительно X в том и только том случае, если $\mathcal{U}|_{\mathrm{cl}_Y X} = \mathcal{V}|_{\mathrm{cl}_Y X}$. В частности, если X плотное подмножество Y, то тогда $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ слабо равны относительно X в том и только том случае, если $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.*

Через $\mathcal{F}(Y)$ обозначим полную верхнюю полурешетку равномерностей на Y (равные равномерности отождествляются) и для $X \subset Y$ через $\mathcal{F}(Y)|_X$ обозначим полурешетку ограничений равномерностей из $\mathcal{F}(Y)$ на X (относительно равные равномерности отождествляются). Для $\mathcal{U} \in \mathcal{F}(Y)$ через $[\mathcal{U}]_X$ обозначены элементы $\mathcal{F}(Y)|_X$, содержащие $\mathcal{U}|_X$. Очевидно $\mathcal{F}(Y)|_X \subset \mathcal{F}(X)$.

Говоря о *псевдоравномерности* $\mathcal{U}$ на пространстве X (для псевдоравномерности выполены все свойства равномерности за исключением свойства отделимости точек), имеем в виду, что ее базу образуют открытые покрытия, или, что эквивалентно, топология $\tau_{\mathcal{U}}$ (не тихоновская), порождаемая псевдоравномерностью $\mathcal{U}$, слабее исходной топологии.

Если $\mathcal{U}$ — псевдоравномерность на X, то подмножества $[x]_{\mathcal{U}} = \bigcap\{\mathrm{St}(x, \upsilon) : \upsilon \in \mathcal{U}\}$ образуют разбиение $E(\mathcal{U})$ пространства X. На элементах этого разбиения $X/E(\mathcal{U})$ определена *фактор равномерность* $\bar{\mathcal{U}}$ — сильнейшая из равномерностей на фактормножестве $X/E(\mathcal{U})$, в которой факторотображение множеств $p : X \to X/E(\mathcal{U})$ является равномерно непрерывным (см., например, [84]). В этом случае отображение p называется *равномерно факторным отображением* [77]. *Равномерное факторпространство* $X/\mathcal{U}$ — множество $X/E(\mathcal{U})$ в топологии, индуцированной фактор равномерностью $\bar{\mathcal{U}}$. Факторпространство X по $E(\mathcal{U})$ обозначим через $X/E(\mathcal{U})$, а естественное факторотображение через q. Таким образом коммутативна диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & X/\mathcal{U} \\
& X/E(\mathcal{U}). \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\tag{1.1*}
$$

Предложение 1.1.3. *Если подмножество A открыто (замкнуто) в топологии $\tau_{\mathcal{U}}$ на X, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{U}$, то $p^{-1}p(A) = A$, и его образ $p(A)$ открыт (замкнут) в равномерном факторпространстве $X/\mathcal{U}$.*

Если множество A открыто (замкнуто) в $X/\mathcal{U}$, то его прообраз $p^{-1}A$ открыт (замкнут) в топологии $\tau_{\mathcal{U}}$, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{U}$.

Доказательство. Проведем доказательство для открытого множества O. Доказательство для замкнутых множеств можно провести переходя к дополнениям.

Для любой точки $x \in O$ существует $u(x) \in \mathcal{U}$ такой, что $\mathrm{St}(x, u(x)) \subset O$. Покрытия $\bar{u}(x) = \{X/\mathcal{U} \setminus p(X \setminus U) : U \in u(x)\}$, $x \in p^{-1}O$, являются элементами равномерности $\bar{\mathcal{U}}$ [84]. Тем самым, $p(x) \in \mathrm{St}(p(x), \bar{u}(x)) \subset p(O)$ для любой точки $x \in O$. Значит множество $p(O)$ открыто в топологии $\bar{\mathcal{U}}$ на $X/\mathcal{U}$.

Пусть множество O открыто в $X/\mathcal{U}$, и $x \in p^{-1}O$, $p(x) = y$. Существуют $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}$ и $v \in \mathcal{U}$ такие, что $\mathrm{St}(y, \bar{u}) \subset O$ и $v \succ p^{-1}\bar{u}$. Тогда $\mathrm{St}(x, v) \subset p^{-1}O$. Значит прообраз $p^{-1}O$ открыт в топологии $\tau_{\mathcal{U}}$ на X. $\square$

Замечание 1.1.3. Пусть E такое разбиение пространства X, что факторпространство X/E тихоновское. Тогда факторпространство X/E есть равномерное факторпространство по псевдоравномерности, являющейся прообразом при факторотображении максимальной равномерности на факторпространстве X/E. Эту псевдоравномерность $\mathcal{U}$ можно также определить как максимальную псевдоравномерность на X, базу которой составляют открытые покрытия, и определяемое ею разбиение $E(\mathcal{U})$ совпадает с разбиением E.

Замечание 1.1.4. Пусть ρ — непрерывная псевдометрика на пространстве X. Тогда (см., например, [46, Задача 4.2.I]) определено отношение эквивалентности $E(\rho)$ на X: $xE(\rho)y$ в том и только том случае, если $\rho(x, y) = 0$; на множестве классов эквивалентности $X/E(\rho)$ пространства X по отношению $E(\rho)$ определена метрика $\bar{\rho}([x]_{E(\rho)}, [y]_{E(\rho)}) = \rho(x, y)$ (будем обозначать это метрическое пространство через X/ρ); и определено равномерно непрерывное отображение X в X/ρ. Легко проверить, что пространство X/ρ является равномерным факторпространством X с псевдоравномерностью, соответствующей псевдометрике ρ.

Лемма 1.1.1. *Пусть ρ — псевдометрика на пространстве X; семейство окрестностей $O_n(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, образует базу множества $[x]_{E(\rho)}$ в X, $x \in X$. Тогда факторпространство $X/E(\rho)$ (с фактортопологией τ) и равномерное факторпространство X/ρ (с топологией $\tau_{\bar{\rho}}$, индуцируемой метрикой $\bar{\rho}$) гомеоморфны.*

Доказательство. Так как фактортопология τ на фактормножестве $X/E(\rho)$ сильнее топологии $\tau_{\bar{\rho}}$, индуцируемой метрикой $\bar{\rho}$, то требуется лишь показать, что любое открытое в топологии τ множество $O \subset X/E(\rho)$ открыто и в топологии $\tau_{\bar{\rho}}$.

Пусть точке $[x]_{E(\rho)} \in O$ соответствует класс эквивалентности $[x]_{E(\rho)} \subset X$, $q : X \to X/E(\rho)$ — факторотображение. Тогда $[x]_{E(\rho)} \subset q^{-1}(O)$. По условию существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $[x]_{E(\rho)} \subset O_n \subset q^{-1}(O)$. Значит $[x]_{E(\rho)} \in \{[y]_{E(\rho)} \in X/E(\rho) : \bar{\rho}(x, y) < 1/n\} \subset O$. □

1.2 Ограниченные подмножества произведений

Подмножество X пространства Y называется относительно псевдокомпактным [97] или ограниченным [110], если $f|_X \in C^*(X)$ для любой функции $f \in C(Y)$, т.е. сужение f на X — ограниченная функция.

Замечание 1.2.1. Следующие условия для подмножества $X \subset Y$ эквивалентны:

(a) X — ограниченное подмножество;

(b) любое бесконечное семейство открытых подмножеств Y, каждое из которых пересекается с X, имеет предельную точку;

(c) любой элемент $[\mathcal{U}]_X \in \mathcal{F}(Y)|_X$ вполне ограничен;

(d) пополнение $\tilde{X}^{[\mathcal{U}]_X}$ бикомпактно для любого элемента $[\mathcal{U}]_X \in \mathcal{F}(Y)|_X$.

Предложение 1.2.1. *Если подмножество X ограничено в Y, то тогда любая равномерность $\mathcal{U}$ на Y равна предкомпактной рефлексии $\mathcal{U}_s$ относительно X. Если максимальный элемент $\mathcal{F}(Y)|_X$ вполне ограничен, то тогда X — ограниченное подмножество Y.*

Доказательство. По [46, Задача 8.5.7.(a)] имеем $\tilde{Y}^{\mathcal{U}} \subset sY$, где sY — бикомпактификация Самюэля пространства Y относительно $\mathcal{U}$, и $sY = \tilde{Y}^{\mathcal{U}_s}$ [46, Задача 8.5.7.(b)]. Так как замыкание X в $\tilde{Y}^{\mathcal{U}}$ бикомпактно по замечанию 1.2.1

(d), то оно является замыканием X в sY. Из следствия 1.1.1 и предложения 1.1.2 следует равенство $\mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_s$ относительно X.

Произвольная функция $f \in C(Y)$ является равномерно непрерывной относительно максимальной равномерности $\mathcal{U}_\mu$. Максимальным элементом $\mathcal{F}(Y)|_X$ является $[\mathcal{U}_\mu]_X$. Поэтому по замечанию 1.2.1 (c) $f|_X$ непрерывно относительно вполне ограниченной равномерности $[\mathcal{U}_\mu]_X$ и, тем самым, $f|_X$ ограничена на X. □

Положим $\mathcal{F}_s(Y) = \{\mathcal{U}_s : \mathcal{U} \in \mathcal{F}(Y)\}$.

Следствие 1.2.1. *Для ограниченного подмножества X пространства Y имеем $\mathcal{F}(Y)|_X = \mathcal{F}_s(Y)|_X$. В частности, $[\mathcal{U}_\beta]_X = [\mathcal{U}_\nu]_X = [\mathcal{U}_\mu]_X = [\mathcal{U}_\mathfrak{m}]_X$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots$.*

Лемма 1.2.1. *Пусть $X = X_1 \times X_2$ — подпроизведение $Y = Y_1 \times Y_2$, и множества X_j бесконечны, $j = 1, 2$. Если $\mathrm{cl}_{\beta Y} X = \mathrm{cl}_{\beta Y_1} X_1 \times \mathrm{cl}_{\beta Y_2} X_2$, то тогда X ограничено в Y.*

Доказательство. Предположим противное. Сперва покажем, что существует локально конечная последовательность $\{U_n \times V_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых подмножеств Y, каждый элемент которой пересекается с X и элементы последовательностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ попарно дизъюнктны.

Если одно из подмножеств X_j, $j = 1, 2$, не ограничено, например X_1, то тогда существует локально конечная последовательность $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$, чьи элементы попарно дизъюнктны и пересекаются с X_1. Так как X_2 бесконечно, в Y_2 можно выбрать последовательность $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$, чьи элементы попарно дизъюнктны и пересекаются с X_2. Тогда последовательность $\{U_n \times V_n : n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет требуемым свойствам.

Пусть теперь оба подмножества X_j, $j = 1, 2$, ограничены, но X не ограничено. Тогда существует локально конечная последовательность $\{U'_n \times V'_n : n \in \mathbb{N}\}$, чьи элементы попарно дизъюнктны и пересекаются с X.

Пусть $\{U'_n \times V'_n : n \in \mathbb{N}'\}$ — ее подпоследовательность. Тогда для любого $x \in X_1$ существует окрестность U такая, что $|\{n \in \mathbb{N}' : U \cap U'_n = \emptyset\}| = \aleph_0$.

Доказательство этого факта проведем от противного. Тогда для любой предельной точки y подпоследовательности $\{V'_n : n \in \mathbb{N}'\}$ точка (x, y) будет предельной точкой подпоследовательности $\{U'_n \times V'_n : n \in \mathbb{N}'\}$. Полученное противоречие с предположенной локальной конечностью подпоследовательности заканчивает доказательство данного факта.

Используя доказанный факт, по индукции выбираем последовательность $n_1, n_2, \ldots$ натуральных чисел и открытые множества $U_{n_i} \subset U'_{n_i}$ такие, что $U_{n_i} \cap X_1 \neq \emptyset$ и элементы последовательности $\{U_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$ попарно дизъюнктны. Применяя аналогичные доводы к последовательности $\{U_{n_i} \times V'_{n_i} : i \in \mathbb{N}\}$, мы получаем последовательность $\{U_{n_{i_k}} \times V_{n_{i_k}} : k \in \mathbb{N}\}$ с требуемыми свойствами.

Пусть $\{W_n = U_n \times V_n : n \in \mathbb{N}\}$ — локально конечная последовательность подмножеств Y, чьи элементы попарно дизъюнктны и пересекаются с X и элементы последовательностей $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ и $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ попарно дизъюнктны. Выберем точки $z_n \in W_n \cap X$ и непрерывные функции $f_n : Y \to [0, 1]$ такие, что $f_n(z_n) = 1$ и $Y \setminus W_n \subset f_n^{-1}(0)$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $f = \sum\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ — ограниченная непрерывная функция на Y и, если $A = A_1 \times A_2 \subset Y$ содержит точки z_n и z_k с $n \neq k$, то тогда $\operatorname{osc}_A f \geq 1$. Тем самым равномерности $\mathcal{U}_\beta$ на Y и произведение равномерностей $\mathcal{U}_\beta$ на Y_1 и $\mathcal{U}_\beta$ на Y_2 не равны относительно X. Полученное противоречие с равенством $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta|_X} = \mathrm{cl}_{\beta Y} X = \mathrm{cl}_{\beta Y_1} X_1 \times \mathrm{cl}_{\beta Y_2} X_2 = \tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta|_{X_1}} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta|_{X_2}}$ завершает доказательство. □

Пусть $X = X_1 \times X_2$ — подпроизведение $Y = Y_1 \times Y_2$. Если $j = 1$ или 2, то обозначим $\hat{\jmath} = 2$ или 1 соответственно. Для $f \in C(Y)$ отображение $\lambda_j : X_j \to C(X_{\hat{\jmath}})$ — экспоненциальное отображение соответствующее функции $f|_X$ (см., например, [46, Гл. 2. §2.6.]).

Принимая во внимание что: проекция произведения z-замкнута в том и только том случае, если экспоненциальное отображение, соответствующее ограниченной непрерывной функции на произведении, непрерывно (см., например, [120, Теорема 8.6]); любое непрерывное отображение равномерно непрерывно относительно максимальной равномерности; и теорему Гликсберга [69], следующую теорему можно рассматривать как относительный аналог теоремы Тамано, характеризующей псевдокомпактность произведений (см., например, [120, Теорема 8.8]).

Теорема 1.2.1. *Пусть* $X = X_1 \times X_2$ *— подпроизведение* $Y = Y_1 \times Y_2$ *и множества* X_j *бесконечны,* $j = 1, 2$*. Тогда* $\mathrm{cl}_{\beta Y} X = \mathrm{cl}_{\beta Y_1} X_1 \times \mathrm{cl}_{\beta Y_2} X_2$ *в том и только том случае, если* X_j *ограничено в* Y_j*,* $j = 1, 2$*, и для любой функции* $f \in C(Y)$ *одно из экспоненциальных отображений* $\lambda_j : X_j \to C^*(X_{\hat{j}})$*,* $j = 1, 2$*, равномерно непрерывно относительно равномерности* $[\mathcal{U}_\mu]_{X_j}$ *и равномерности равномерной сходимости на* $C^*(X_{\hat{j}})$ *(она корректно определена, так как* X_j *— ограниченное подмножество* Y_j*,* $j = 1, 2$*).*

Доказательство. Необходимость. По лемме 1.2.1 подмножество X ограничено в Y. Каждое подмножество X_j ограничено в Y_j, $j = 1, 2$, будучи непрерывным образом ограниченного множества X. Так как $\mathrm{cl}_{\beta Y} X = \mathrm{cl}_{\beta Y_1} X_1 \times \mathrm{cl}_{\beta Y_2} X_2$, то для любой $f \in C(Y)$ продолжение каждого экспоненциального отображения $\tilde{\lambda}'_j : \mathrm{cl}_{\beta Y_j} X_j \to C^*(\mathrm{cl}_{\beta Y_{\hat{j}}} X_{\hat{j}})$, $j = 1, 2$, определенное ограничением на $\mathrm{cl}_{\nu Y} X$ продолжения на νY функции f — непрерывно (см., например, [120]) и, следовательно, равномерно непрерывно на бикомпакте $\mathrm{cl}_{\beta Y_j} X_j$. Поэтому каждое экспоненциальное отображение $\lambda_j : X_j \to C^*(X_{\hat{j}})$, $j = 1, 2$, равномерно непрерывно относительно равномерности $[\mathcal{U}_\mu]_{X_j}$ по следствию 1.2.1.

Достаточность. Пусть для любого $f \in C(Y)$ экспоненциальное отображение $\lambda_1 : X_1 \to C^*(X_2)$ равномерно непрерывно. Тогда для любого $\epsilon > 0$ существует конечное покрытие $u \in [\mathcal{U}_\beta]_{X_1} = [\mathcal{U}_\mu]_{X_1}$ такое, что $\rho(\lambda_1(x_1), \lambda_2(x_2)) < \epsilon/2$ для любых $x_1, x_2 \in U \in u$. Для любого $U \in u$ возьмем точку $x_U \in U$ и $f_U = \lambda_1(x_U) \in C^*(X_2)$. По следствию 1.2.1 существует $v(U) \in [\mathcal{U}_\beta]_{X_2}$, $U \in u$, такое, что $\mathrm{osc}_{U \times V} f < \epsilon/2$, где $V \in v(U)$, $U \in u$. Тем самым равномерности $\mathcal{U}_\beta$ на Y и произведение равномерностей $\mathcal{U}_\beta$ на Y_1 и $\mathcal{U}_\beta$ на Y_2 равны относительно X (см., например, [46, Пример 8.3.18.]). Окончание доказательства очевидно. $\square$

С учетом следствия 1.2.1 имеем.

Следствие 1.2.2. *Пусть $X = X_1 \times X_2$ — ограниченное подмножество $Y = Y_1 \times Y_2$, и для любой функции $f \in C(Y)$ существует $j = 1$ или 2 такое, что экспоненциальное отображение λ_j равномерно непрерывно относительно равномерности $[\mathcal{U}_\mu]_{X_j}$. Тогда $\mathrm{cl}_{\tilde{Y}} X = \mathrm{cl}_{\tilde{Y}_1} X_1 \times \mathrm{cl}_{\tilde{Y}_2} X_2$, где пополнения берутся относительно равномерностей, чьи ограничения из $[\mathcal{U}_\beta]_X$, $[\mathcal{U}_\beta]_{X_j}$, $j = 1, 2$, соответственно. В частности, $\mathrm{cl}_{\mu Y} X = \mathrm{cl}_{\nu Y} X = \mathrm{cl}_{\beta Y} X = \mathrm{cl}_{Z_1} X_1 \times \mathrm{cl}_{Z_2} X_2$, где Z_j или μY_j, или νY_j, или βY_j, $j = 1, 2$.*

С учетом теорем 1.2 и 4.7 из [74], в которых доказана ограниченность произведения ограниченных подмножеств и формула $\mathrm{cl}_{\nu(G\times Y)}(A \times B) = \mathrm{cl}_{\nu G} A \times \mathrm{cl}_{\nu Y} B$ для ограниченных подмножеств A и B группы G и пространства Y соответственно, и следствия 1.2.1 имеем.

Следствие 1.2.3. *Пусть A и B — ограниченные подмножества группы G и пространства Y соответственно. Тогда*

$$\mathrm{cl}_{\widetilde{(G\times Y)}}(A \times B) = \mathrm{cl}_{\tilde{G}} A \times \mathrm{cl}_{\tilde{Y}} B,$$

где пополнения взяты относительно любой равномерности, чье ограничение из $[\mathcal{U}_\beta]_{A\times B}$, $[\mathcal{U}_\beta]_A$ и $[\mathcal{U}_\beta]_B$ соответственно.

Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется *b_f-непрерывной*, если ее сужение на любое ограниченное подмножество пространства X имеет непрерывное продолжение на X. Пространство X называется *b_f-пространством*, если любая b_f-непрерывная функция непрерывна. Локально псевдокомпактные пространства (в частности, локально бикомпактные пространства), пространства с первой аксиомой счетности (тем самым метризуемые пространства), k_R-пространства (пространства, в которых функция непрерывна, если ее сужение на любое бикомпактное подмножество непрерывно), и k-пространства являются b_f-пространствами.

1.3 (Кусочно) полуравномерные произведения

Для равномерных пространств X и Y обозначим через $U(X,Y)$ множество всех равномерно непрерывных отображений из X в Y с равномерностью (и топологией) равномерной сходимости. Отображение f на произведении равномерных пространств A и B в равномерное пространство Z называется *полуравномерным*, если формула $f^*(a)(b) = f(a,b)$ определяет равномерно непрерывное отображение $f^* : A \to U(B,Z)$. *Полуравномерное произведение* $A * B$ — это пространство $A \times B$ в слабой равномерности, индуцированной полуравномерными отображениями в метрические пространства [76, Ч. 2] и [77, Гл. III]. Покрытия из равномерности на пространстве $A * B$ это в точности те покрытия, в которые можно вписать нормальные покрытия, в каждое из которых в свою очередь можно вписать покрытия вида $\{\{U_\alpha \times V^\alpha_\beta : \beta \in B_\alpha\} : \alpha \in D\}$, где $\{U_\alpha : \alpha \in D\}$ — равномерное покрытие A и для любого $\alpha \in D$, $\{V^\alpha_\beta : \beta \in B_\alpha\}$ является элементом равномерности пространства B [77, Гл. III, 23]. Обозначим через $\mathcal{U} * \mathcal{V}$ равномерность на полуравномерном произведении $A * B$.

Предложение 1.3.1. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ равномерности на A и B соответственно. Тогда*

$$\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \text{ гомеоморфно } \widetilde{A \times B}^{\mathcal{U}*\mathcal{V}}.$$

Доказательство. Для полного пространства Z любое полуравномерное отображение $f : A*B \to Z$ можно продолжить до полуравномерного отображения $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$. В самом деле, пространство $U(B,Z)$ полно [77, Гл. III, Теорема 31]. Кроме того, пространства $U(B,Z)$ и $U(\tilde{B}^{\mathcal{V}},Z)$ изоморфны. Так как отображение $f^* : A \to U(B,Z)$ равномерно непрерывно, то оно может быть продолжено до равномерно непрерывного отображения $\tilde{f}^* : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \to U(\tilde{B}^{\mathcal{V}},Z)$. Тем самым отображение $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$, $\tilde{f}(a,b) = \tilde{f}^*(a)(b)$, полуравномерно.

Очевидно, что любое равномерно непрерывное отображение на полном произведении $\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ равномерно непрерывно. Поэтому полуравномерное произведение $\tilde{A}^{\mathcal{U}} * \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ полно, является пополнением полуравномерного произведения $A * B$ (см., например, [46, Теорема 8.3.12]), и $\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ гомеоморфно $\tilde{A}^{\mathcal{U}} * \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ [77, Гл. III, Теорема 22]. $\square$

Следствие 1.3.1. *Каждое полуравномерное отображение $f : A \times B \to Z$ продолжается до полуравномерного отображения $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to \tilde{Z}$.*

Определение 1.3.1. Отображение f на произведении равномерных пространств $(A,\mathcal{U})$ и $(B,\mathcal{V})$ в равномерное пространство $(Z,\mathcal{W})$ *кусочно полуравномерно*, если для любого $w \in \mathcal{W}$ существует система покрытий из соответствующих равномерностей $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V,U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющая условию:

(1.3*) для любого $U' \in U \wedge u(U,V)$, где $V \in v(U)$, $U \in u$, выполнено $f(U' \times V) \subset W$ для некоторого $W \in w$.

Кусочно полуравномерное произведение $A *_p B$ это произведение $A \times B$ со слабой равномерностью, индуцированной всеми кусочно полуравномерными отображениями в метрические пространства и топологией, порожденной этой равномерностью.

Замечание 1.3.1. Очевидно, что любое полуравномерное отображение является кусочно полуравномерным.

Сужение кусочно полуравномерного отображения $f : A \times B \to Z$ на слой $\{x\} \times B$, $x \in A$, равномерно непрерывно относительно равномерностей $\mathcal{V}$ на B и $\mathcal{W}$ на Z.

Напомним, что для равномерного пространства $(A,\mathcal{U})$ покрытие u' называется *равномерно локально равномерным* [77, Гл. VII], если существуют покрытие $u \in \mathcal{U}$ и семейство покрытий $\{u(U) \in \mathcal{U} : U \in u\}$ такие, что любое $U' \in u'$ имеет вид $U \cap U(U)$, $U \in u$, $U(U) \in u(U)$. Для сужения кусочно полуравномерного отображения $f : A \times B \to Z$ на любой слой $A \times \{y\}$, $y \in B$, и любого $w \in \mathcal{W}$ существует равномерно локально равномерное покрытие u' множества A такое, что $f|_{A\times\{y\}}(u') \succ w$, где A и $A \times \{y\}$, $y \in B$, естественно отождествляются.

Предложение 1.3.2. *Для равномерных пространств $(A, \mathcal{U})$ и $(B, \mathcal{V})$ отображение $A *_p B$ в $(Z, \mathcal{W})$ равномерно непрерывно в том и только том случае, если оно кусочно полуравномерно. Кусочное полуравномерное произведение $A *_p B$ гомеоморфно произведению $A \times B$.*

Доказательство. Пусть $g : A *_p B \to Z$ — равномерно непрерывное отображение и $w \in \mathcal{W}$. Существует конечное число покрытий из равномерности вида $f_k^{-1}(w_k)$, где f_k кусочно полуравномерно, $k = 1, \ldots, n$, и $\wedge\{f_k^{-1}(w_k) : k = 1, \ldots, n\}$ вписано в $g^{-1}(w)$. Для каждого f_k существует семейство покрытий $\{u_k \in \mathcal{U}; v_k(U) \in \mathcal{V}, U \in u_k; u_k(V, U) \in \mathcal{U}, V \in v_k(U), U \in u_k\}$, удовлетворяющих условию (1.3^*), $k = 1, \ldots, n$.

Возьмем $u \succ \wedge\{u_k : k = 1, \ldots, n\}$; для $U \in u$, $U \subset \bigcap\{U_k \in u_k : k = 1, \ldots, n\}$, возьмем $v(U) \succ \wedge\{v_k(U_k) : k = 1, \ldots, n\}$; и для $V \in v(u)$, $V \subset \bigcap\{V_k \in v_k : k = 1, \ldots, n\}$ возьмем $u(V, U) \succ \wedge\{u_k(V_k, U_k) : k = 1, \ldots, n\}$. Легко проверить, что для $w \in \mathcal{W}$ семейство покрытий $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V, U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$ удовлетворяет условию (1.3^*) для g. Значит g кусочно полуравномерно. Обратное очевидно.

Равномерность на $A *_p B$ сильнее равномерности произведения. Следовательно открытые подмножества $A \times B$ открыты в $A *_p B$. Пусть O — открытое подмножество $A *_p B$ и $(x, y) \in O$. Существует кусочно полуравномерное отображение $f : A *_p B \to I$ такое, что $f(x, y) = 1$ и $f(X \setminus O) = 0$. Для покрытия $w = \{[0, 2/3), (1/3, 1]\}$ отрезка I существует семейство покрытий $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V, U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющих условию (1.3^*) для f. Все покрытия из равномерностей можно считать открытыми в A и B соответственно. Значит существует открытый прямоугольник в $A \times B$, содержащий точку (x, y), образ которого содержится в $(1/3, 1]$. Тем самым открытость O в $A \times B$ доказана. □

Лемма 1.3.1. *Пусть для отображения $f : A \to Z$ равномерных пространств $(A, \mathcal{U})$ и $(Z, \mathcal{W})$ для любого покрытия $w \in \mathcal{W}$ существует равномерно локально равномерное покрытие и такое, что $f(u) \succ w$. Тогда существует* *продолжение $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \to \tilde{Z}^{\mathcal{W}}$ отображения f.*

Доказательство. Достаточно показать, что образ фильтра Коши $\mathcal{F}$ в A является базой фильтра Коши в Z [8, Гл. II, §3, Предложение 11].

Возьмем любой $w \in \mathcal{W}$. Существует равномерно локально равномерное покрытие u' такое, что $f(u') \succ w$. Пусть покрытие $u \in \mathcal{U}$ и семейство покрытий $\{u(U) \in \mathcal{U} : U \in u\}$ таково, что любой $U' \in u'$ имеет вид $U \cap U(U)$, $U \in u$, $U(U) \in u(U)$. Так как $\mathcal{F}$ фильтр Коши, то существуют: $U \in u$ такой, что $U \in \mathcal{F}$ и $U(U) \in u(U)$ такой, что $U(U) \in \mathcal{F}$. Значит $U \cap U(U) \in \mathcal{F}$ и $f(U \cap U(U)) \subset W$ для некоторого $W \in \mathcal{W}$. Из этого следует, что $f(\mathcal{F})$ является базой фильтра Коши в Z. □

Предложение 1.3.3. *Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — равномерности на A и B соответственно, и $\mathcal{U} *_p \mathcal{V}$ равномерность на кусочно полуравномерном произведении $A *_p B$. Тогда*

$$\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \text{ гомеоморфно } \widetilde{A \times B}^{\mathcal{U} *_p \mathcal{V}}.$$

Доказательство. Чтобы показать, что для любого полного пространства Z и любого отображения $f : A *_p B \to Z$ существует продолжение f до кусочно полуравномерного отображения $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$ сделаем два шага.

Шаг первый. Существует продолжение отображения f до кусочно полуравномерного отображения $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times B \to Z$. В самом деле, для сужения $f|_{A \times \{y\}} : A \to Z$, $y \in B$, и любого $w \in \mathcal{W}$ существует равномерно локально равномерное покрытие u множества A такое, что $f|_{A \times \{y\}}(u) \succ w$, где A и $A \times \{y\}$, $y \in B$, естественно отождествляются. По замечанию 1.3.1 и лемме 1.3.1 для любого $y \in B$ существует непрерывное продолжение $\tilde{f}|_{A \times \{y\}} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \{y\} \to Z$. Поэтому отображение $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times B \to Z$ корректно определено (его непрерывность пока еще не доказана). Заметим, что по предложению 1.3.2 из условия кусочной полуравномерности отображения следует его непрерывность.

Для $w \in \mathcal{W}$ пусть w' звездно вписано в w. Для w' существует семейство покрытий $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V, U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющее условию (1.3*) для отображения f. Для равномерности $\tilde{\mathcal{U}}$ на $\tilde{A}^{\mathcal{U}}$ пусть семейство покрытий $\{\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}; v(\tilde{U}) \in \mathcal{V}, \tilde{U} \in \tilde{u}; \tilde{u}(V,\tilde{U}) \in \tilde{\mathcal{U}}, V \in v(\tilde{U}), \tilde{U} \in \tilde{u}\}$ таково, что $\tilde{u} \wedge A = u$, $\tilde{u}(V,\tilde{U}) \wedge A = u(V,U)$, $V \in v(\tilde{U})$, $\tilde{U} \in \tilde{u}$, $U = \tilde{U} \cap A$. Без ограничения общности рассуждений, можно предположить, что все покрытия открыты. Тогда для любого $\tilde{U}' \in \tilde{U} \wedge \tilde{u}(\tilde{U}, V)$, $V \in v(\tilde{U})$, $\tilde{U} \in \tilde{u}$, имеем $\tilde{f}(\tilde{U}' \times V) \subset \mathrm{St}(W', w')$ для некоторого фиксированного $W' \in w'$. В самом деле, так как $f(U' \times V) \subset W'$ для некоторого $W' \in w'$ и $U' \times \{y\}$ плотно в $\tilde{U}' \times \{y\}$ для любых $y \in V$, то имеем $\tilde{f}(\tilde{U}' \times V) = \bigcup\{\tilde{f}(\tilde{U}' \times \{y\}) : y \in V\} \subset \bigcup\{\mathrm{cl}_Z(f(U' \times \{y\})) : y \in V\} \subset \mathrm{cl}_Z W'$. Так как $\mathrm{cl}_Z W' \subset \mathrm{St}(W', w') \subset W$ для некоторого $W \in w$, то продолжение $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times B \to Z$ является кусочно полуравномерным отображением.

На втором шаге покажем, что кусочно полуравномерное отображение $g : A' \times B \to Z$ продолжается до кусочно полуравномерного отображения $\tilde{g} : A' \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$. По замечанию 1.3.1 для любого $x \in A'$ существует непрерывное продолжение $\tilde{g}|_{\{x\}\times B} : \{x\} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$. Поэтому отображение $\tilde{g} : A' \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$ корректно определено (его непрерывность пока еще не доказана). Докажем его кусочную полуравномерность.

Для $w \in \mathcal{W}$ пусть w' звездно вписано в w. Для w' существует семейство покрытий $\{u \in \mathcal{U}; v(U) \in \mathcal{V}, U \in u; u(V,U) \in \mathcal{U}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющих условию (1.3*) для g. Для равномерности $\tilde{\mathcal{V}}$ на $\tilde{B}^{\mathcal{V}}$ пусть семейство покрытий $\{u \in \mathcal{U}; \tilde{v}(U) \in \tilde{\mathcal{V}}, U \in u; \tilde{u}(\tilde{V}, U) \in \mathcal{U}, \tilde{V} \in \tilde{v}(U), U \in u\}$ таково, что $\tilde{V} \cap B = V$, $\tilde{v}(U) \wedge B = v(U)$, $U \in u$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что все покрытия открыты. Тогда для любых $U' \in U \wedge u(U, \tilde{V})$, $\tilde{V} \in \tilde{v}(U)$, $U \in u$, имеем $\tilde{g}(U' \times \tilde{V}) \subset \mathrm{St}(W', w')$ для некоторого $W' \in w'$. В самом деле, так как $g(U' \times V) \subset W'$ для некоторого фиксированного $W' \in w'$, и $\{x\} \times V$ всюду плотно в $\{x\} \times \tilde{V}$, $x \in U'$, то $\tilde{g}(U' \times \tilde{V}) = \bigcup\{\tilde{g}(\{x\} \times \tilde{V}) : x \in U'\} \subset \bigcup\{\mathrm{cl}_Z(g(\{x\} \times V)) : x \in U'\} \subset \mathrm{cl}_Z W'$. Так как $\mathrm{cl}_Z W' \subset \mathrm{St}(W', w') \subset W$ для некоторого $W \in w$, то продолжение $\tilde{g} : A' \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to Z$ является кусочно полуравномерным отображением.

Эти два шага доказывают возможность продолжения кусочно полуравномерного отображения до кусочно полуравномерного отображения на произведении $\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ полных пространств. Кусочно полуравномерное произведение $\tilde{A}^{\mathcal{U}} *_p \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ полно, так как равномерность на нем сильнее равномерности произведения. Значит

$$\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \text{ гомеоморфно } \widetilde{A \times B}^{\mathcal{U} *_p \mathcal{V}}.$$

$\square$

Следствие 1.3.2. *Каждое кусочно полуравномерное отображение $f : A \times B \to Z$ продолжается до кусочно полуравномерного отображения $\tilde{f} : \tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}} \to \tilde{Z}$.*

Равномерность произведения, полуравномерного произведения и кусочно полуравномерного произведения эквивалентны и пополнения относительно них гомеоморфны произведению $\tilde{A}^{\mathcal{U}} \times \tilde{B}^{\mathcal{V}}$ их пополнений.

1.4 Топологические группы

Для топологической группы G через $\mathcal{R}$, $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ обозначим правую, левую и двустороннюю равномерности на G. Через $\bar{G}^{\mathcal{R}}$ или $\bar{G}$; $\bar{G}^{\mathcal{L}}$; $\hat{G}$ будем обозначать пополнение группы по правой (пополнение по Вейлю), левой или двусторонней равномерности [103] (пополнение по Райкову). Отметим, что $\hat{G}$ естественно вложено в $\bar{G}^{\mathcal{R}}$ и $\bar{G}^{\mathcal{L}}$ [103, Гл. 10, Теорема вложения 10.9].

Через $N_G(g)$ обозначим множество всех открытых окрестностей $g \in G$. Тем самым $N_G(e)$ — семейство открытых окрестностей единицы $e \in G$. Для семейства $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ его подсемейство $\mathcal{B}$ назовем *базой*, если для любого $O \in \mathcal{O}$ существует $U \in \mathcal{B}$ такое, что $U \subset O$. *Весом* семейства $\mathcal{O}$ назовем $\min\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ — база семейства } \mathcal{O}\}$.

Через $H < G$ обозначаем подгруппу H группы G, через $\mathcal{H}\ (X)$ обозначим группу гомеоморфизмов пространства X (не топологическую), и через $\mathcal{H}_{\ co}(X)$ ее же в компактно-открытой топологии, когда X — бикомпакт.

Пусть $\mathcal{G}$ — семейство подгрупп топологической группы G с топологией τ, *насыщенное относительно сопряжения*, т.е.

$$g^{-1}Tg \in \mathcal{G} \text{ для любых подгруппы } T \in \mathcal{G} \text{ и элемента } g \in G.$$

Предбазу новой топологии $\tau_{\mathcal{G}}$ на G составляют множества τ и элементы gT, Tg, $T \in \mathcal{G}$, $g \in G$. Топология $\tau_{\mathcal{G}}$, которую назовем *усилением топологии τ семейством $\mathcal{G}$*, определяет (см., например, [21], где используется язык норм) топологическую группу $G_{\mathcal{G}} = (G, \tau_{\mathcal{G}})$.

Для элемента T насыщенного относительно сопряжения семейства $\mathcal{G}$ пусть $G/T = \{xT : x \in G\}$ (соответственно $G\backslash T = \{Tx : x \in G\}$) — множество левых (соответственно правых) смежных классов. Рассмотрим их с дискретной топологией. Естественные факторотображения (не непрерывные) обозначим $\lambda_T : G \to G/T$ (соответственно $\lambda'_T : G \to G\backslash T$), $T \in \mathcal{G}$. Определено отображение

$$b : G \to \Pi = \Pi\{G/T \times G\backslash T : T \in \mathcal{G}\}, \text{ где } b(x) = \{(\lambda_T(x), \lambda'_T(x)) : T \in \mathcal{G}\}.$$

Рассматривая Π в топологии тихоновского произведения, легко заметить, что отображение b группы $G_{\mathcal{G}}$ непрерывно. Это позволяет дать следующее описание топологии, усиленной семейством $\mathcal{G}$.

Предложение 1.4.1. *Топология подпространства на графике $\Gamma_b = \{(x, b(x)) : x \in G\}$ отображения b совпадает с топологией $\tau_{\mathcal{G}}$ (Γ_b и G естественно отождествляются).*

В [93, §6 (A)] Я. ван Миллом предложен *критерий возможности введения на метризуемой группе более сильной польской топологии* (для краткости "критерий польскости"). С учетом предложения 1.4.1 дадим его переформулировку в наших терминах и обозначениях.

Критерий польскости. Пусть G — польская группа, $H < G$, $\mathcal{G}$ — счетное семейство замкнутых подгрупп H, насыщенное относительно сопряжения в H. Если существует счетное подмножество A в H такое, что

$$H = \bigcap\{A\mathrm{cl}_G(T) : T \in \mathcal{G}\} \cap \bigcap\{\mathrm{cl}_G(T)A : T \in \mathcal{G}\},$$

то группа $H_{\mathcal{G}}$ является польской.

Топологическая группа G называется $\aleph_0$-*уравновешенной* [5] или группой с *квазинвариантным базисом* [13], если для каждого элемента $O \in N_G(e)$ существует такое счетное семейство $\mathcal{O}$ элементов $N_G(e)$, что для любого $g \in G$ найдется $V \in \mathcal{O}$, для которого $gVg^{-1} \subset O$. Группа $\aleph_0$-уравновешена в том и только том случае, если она является подгруппой произведения метризуемых групп.

Топологическая группа G называется $\aleph_0$-*ограниченной*, если для каждого элемента $O \in N_G(e)$ из покрытия $\{gO : g \in G\}$ группы G можно выделить счетное подпокрытие [11]. В [53] G названа "ω-narrow"(в [56] "weakly separable"). Группа $\aleph_0$-ограничена в том и только том случае, если она является подгруппой произведения сепарабельных метризуемых групп.

В [103], с использованием равномерных структур, введено понятие *инфраметризуемой группы*. С учетом Гл. 11 [103] и Теоремы 13.30 [103] можно определить инфраметризуемую группу как подгруппу полной по Чеху группы. Инфраметризуемость групп σ-мультипликативна и наследствена по подгруппам [103, Гл. 11]. *Почти метризуемые* [28] (группа почти метризуема, если в ней имеется бикомпакт счетного внешнего характера) и полные по Чеху группы являются инфраметризуемыми.

Замкнутую подгруппу H группы G J. Poncet назвал *presque invariant* [101], М. Чобан *равномерной* [40], а W. Roelcke, S. Dierolf *neutral* [103], если

$$\text{для любого } O \in N_G(e) \text{ существует } V \in N_G(e) \text{ такой, что } VH \subset HO.$$

Любые нормальная или бикомпактная подгруппа являются равномерными [40, Леммы 1, 8]. Равномерной также являются вполне ограниченные или предкомпактные подгруппы [103, Предложение 9.22].

Лемма 1.4.1. *Пусть H — равномерная подгруппа G. Тогда семейство $\mathcal{O} = N_G(H) = \{OH : O \in N_G(e)\}$ удовлетворяет условиям*

(1) *для любых $O, U \in \mathcal{O}$ существует $V \in \mathcal{O}$ такой, что $V \subset O \cap U$;*

(2) *для любого* $O \in \mathcal{O}$ *существует* $U \in \mathcal{O}$ *такой, что* $U^2 \subset O$ *и* $U^{-1} \subset O$.

Доказательство. Выполнение условия (1) вытекает из очевидного включения $(O \cap V)H \subset OH \cap VH$, верного для любых подмножеств группы G.

Для $O, U \in N_G(e)$ таких, что $U^2 \subset O$, пусть $V \in N_G(e)$ удовлетворяет условиям: $V \subset U$; $HV \subset UH$; $VH \subset HO^{-1}$. Тогда имеем $(VH)^2 \subset VUH \subset OH$ и $(VH)^{-1} = HV^{-1} \subset OH$. □

Для равномерной подгруппы H группы G через $\mathcal{R}_H$ (соответственно $\mathcal{L}_H$) обозначим псевдоравномерность на G, базу которой образуют покрытия $\{OHg : g \in G\}$ (соответственно $\{gOH : g \in G\}$), $O \in N_G(e)$ [40, Следствие 2] (для проверки корректности определений можно также применить предложение 3 [18] и лемму 1.4.1, рассматривая правое и левое действия группы G на себе).

Лемма 1.4.2. *Пусть* H *— равномерная подгруппа группы* G. *Тогда равномерное фактoропространство* $G/\mathcal{R}_H$ *(соответственно* $G/\mathcal{L}_H$*) естественно гомеоморфно факторпространству* $G\backslash H$ *(соответственно* G/H*).*

Доказательство. Приведем доказательство для равномерности $\mathcal{R}_H$. Для равномерности $\mathcal{L}_H$ доказательство аналогично. Легко проверить, что разбиение G состоит из множеств вида Hg, $g \in G$. Для доказательства леммы, в силу коммутативности диаграммы (1.1*) остается проверить открытость равномерно факторного отображения G на $G/\mathcal{R}_H$. Для любого открытого в G множества O его образ совпадает с образом его насыщения HO по разбиению, которое открыто в псевдоравномерности $\mathcal{R}_H$. Остается сослаться на предложение 1.1.3. □

Лемма 1.4.3. *Пусть* H *— ядро сюръективного гомоморфизма* $\varphi : G \to G'$, $\mathcal{O}'$ *— база в* $N_{G'}(e)$. *Тогда семейство* $\mathcal{O} = \{\varphi^{-1}(O) : O \in \mathcal{O}'\}$ *окрестностей* H *удовлетворяет условиям* (1) – (2) леммы 1.4.1 *и условию*

(3) *для любых* $O \in \mathcal{O}$ *и* $g \in G$ *существует* $V \in \mathcal{O}$ *такой, что* $gVg^{-1} \subset O$.

Доказательство. Выполнение условия (1) очевидно. Так как φ гомоморфизм, то выполнение условий (2) и (3) следует из равенств

$$\varphi((\varphi^{-1}U)(\varphi^{-1}U)) = U^2,$$

$$\varphi(g(\varphi^{-1}U)g^{-1}) = \varphi(g)U(\varphi(g))^{-1}$$

и из того, что база $\mathcal{O}'$ удовлетворяет условиям (1) – (3) в G'. $\square$

Пространство называется *алгебраически однородным*, если оно является факторпространством (пространством левых смежных классов) топологической группы.

1.5 Топологические группы преобразований

Под действием группы G на множестве X понимается отображение $\alpha : G \times X \to X$ такое, что $\alpha(e, x) = x$, $\alpha(g, \alpha(h, x)) = \alpha(gh, x)$ для любых $x \in X$, $g, h \in G$ (e — единица группы G). Через $\alpha_x : G \to X$, $x \in X$, и $\alpha^g : X \to X$, $g \in G$, обозначим отображения, определенные по правилам $\alpha_x(g) = \alpha(g, x) = \alpha^g(x)$. Если ясно о каком действии идет речь, то будем писать $\alpha(g, x) := gx$. Для $S \subset G$ и $Y \subset X$ считаем $SY = \{gx : g \in S, x \in Y\}$. Подмножество A пространства X с действием группы G называется *инвариантным*, если $GA = A$, т.е. *насыщение* GA подмножества A совпадает с ним самим.

Для семейства подмножеств $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ и $g \in G$ положим $g\gamma = \{gO_\alpha : \alpha \in A\}$. Семейство подмножеств u *инвариантно* или *насыщено*, если $gU \in u$ для любых $U \in u$, $g \in G$. Насыщением семейства u является семейство $\{gU : U \in u, g \in G\}$. Покрытие $\gamma = \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ инвариантно, если $g\gamma = \gamma$. Семейство покрытий $\Gamma = \{\gamma_s : s \in S\}$ называется инвариантным или насыщенным, если $g\gamma_s \in \Gamma$ для любых $s \in S$, $g \in G$.

Действием группы G на пространстве X называем действие группы G на множестве X, при котором отображение $\alpha^g : X \to X$ непрерывно (гомеоморфизм) при любом $g \in G$. Действие не зависит от топологии на группе.

Под (раздельно) непрерывным действием топологической группы G на пространстве X понимается (раздельно) непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ топологической группы G на пространстве X. Пространство X с фиксированным непрерывным действием $\alpha : G \times X \to X$ топологической группы G называется *G-пространством*.

Для пространства X с действием группы G подгруппа $H = \{g \in G : gx = x, x \in X\}$ называется *ядром* действия. Для точки $x \in X$ подгруппа $G_x = \{g \in G : gx = x\}$ называется *стабилизатором точки* x, а множество $Gx = \bigcup\{gx : g \in G\}$ называется *орбитой точки* x.

Для всюду плотного инвариантного подмножества X G-пространства Y пространство Y является *G-расширением* G-пространства X. В частности, если Y — бикомпакт, то Y — *G-бикомпактификация* X. G-пространство X, имеющее G-бикомпактификацию, называется *G-тихоновским* [2, 99, 113, 116]. *Максимальная G-бикомпактификация* G-тихоновского пространства X обозначается через $\beta_G X$. Отображение $f : X \to Y$ пространств X, Y с действием группы G называется *эквивариантным*, если $f(gx) = gf(x)$ для любых $x \in X$, $g \in G$ (тем самым эквивариантность определена не только для отображений G-пространств).

Лемма 1.5.1. *Для действия $\alpha : G \times X \to X$ и любых множеств $S \subset G$ и $Y \subset X$ выполнено:*

$$S\ \mathrm{cl}Y \subset \mathrm{cl}(SY),\ \ S\ \mathrm{int}Y \subset \mathrm{int}(SY)$$

Доказательство. Пусть $x \in S\ \mathrm{cl}Y$. Тогда $x = ht$, где $h \in S, t \in \mathrm{cl}Y$. Так как отображение $\alpha^h : X \to X$ непрерывно, то для любой окрестности V_x точки x существует окрестность V_t точки t такая, что $\alpha^h(V_t) \subset V_x$. Поэтому существует точка $t' \in V_t \cap Y$ такая, что $ht' \in V_x$. Значит $x \in \mathrm{cl}(SY)$. Первое включение доказано. Второе включение очевидно, так как $S\ \mathrm{int}Y \subset SY$ и $S\ \mathrm{int}Y$ — открытое подмножество X. $\square$

Пусть $f : X \to Y$ — эквивариантное сюръективное отображение пространств с действием группы G. Действие на Y обозначим через α_Y. Рассмотрим отношение эквивалентности $E(f)$ на X, определенное его разложением на множества $f^{-1}(y)$, $y \in Y$.

Лемма 1.5.2. *На факторпространстве $X/E(f)$ определено действие группы G, при котором естественные фактороотображение $q : X \to X/E(f)$ и уплотнение $h : X/E(f) \to Y$ эквивариантны.*

Доказательство. Определим отображение $\alpha_E : G \times X/E(f) \to X/E(f)$ по правилу $\alpha_E(g, x) = h^{-1}\alpha_Y(g, h(x))$. В силу биективности h его задание корректно, и выполняются условия действия группы на множестве. Так как отображение f эквивариантно, то из определения действия на множестве $X/E(f)$ вытекает эквивариантность отображений q и h, как отображений множеств с действием группы.

Легко проверить, что отображение q удовлетворяет свойству $gq^{-1}(Z) = q^{-1}(gZ)$ для любых $g \in G$, $Z \subset X/E(f)$ ($x \in gq^{-1}(Z) \Longleftrightarrow g^{-1}x \in q^{-1}(Z) \Longleftrightarrow q(g^{-1}x) \in Z \Longleftrightarrow q(x) \in gZ \Longleftrightarrow x \in q^{-1}(gZ)$). Поэтому для любых $g \in G$ и открытого множества $O \subset X/E(f)$ множество gO открыто, что эквивалентно непрерывности отображений α_E^g, $g \in G$. $\square$

Замечание 1.5.1. Если эквивариантное отображение f G-пространства X открыто и бикомпактно (прообраз каждой точки бикомпактен) или совершенно, то, легко показать, что действие на факторпространстве $X/E(f) = f(X)$ непрерывно (см. [17, Лемма 6] в случае совершенности f). Тем самым факторпространство бикомпактного G-пространства по отношению эквивалентности, определенным его разложением на прообразы точек при произвольном эквивариантном отображении, является G-пространством.

Псевдоравномерность $\mathcal{U}$ на пространстве X с действием группы G называется *насыщенной* или *инвариантной*, если отображение $\alpha^g : X \to X$ равномерно непрерывно [22] для любых $g \in G$.

Предложение 1.5.1. *Если $\mathcal{U}$ — инвариантная псевдоравномерность на пространстве X с действием группы G, то*

(1) *на равномерном факторпространстве $X/\mathcal{U}$ и факторпространстве* $X/$ *определены действия группы G;*

(2) *равномерно факторное отображение $p : X \to X/\mathcal{U}$ и факторотображение $q : X \to X/E(\mathcal{U})$ эквивариантны.*

Доказательство. Пусть $[x]_{\mathcal{U}} = \bigcap\{\mathrm{St}(x, \upsilon) : \upsilon \in \mathcal{U}\}$ — точка множества $X/E(\mathcal{U})$, $g \in G$. Положим $g[x]_{\mathcal{U}} = [gx]_{\mathcal{U}}$. Проверим корректность определенного действия (т.е., если $[x]_{\mathcal{U}} = [y]_{\mathcal{U}}$, то и $[gx]_{\mathcal{U}} = [gy]_{\mathcal{U}}$, при $g \in G$). Для этого достаточно показать, что если $y \in \mathrm{St}(x, \upsilon)$ для любого $\upsilon \in \mathcal{U}$, то и $gy \in \mathrm{St}(gx, \upsilon)$ для любого $\upsilon \in \mathcal{U}$. Предположим, что существует $\omega \in \mathcal{U}$ такое, что $gy \notin \mathrm{St}(gx, \omega)$. Так как псевдоравномерность $\mathcal{U}$ инвариантна, то $g^{-1}\omega \in \mathcal{U}$. Тогда $y \notin \mathrm{St}(x, g^{-1}\omega)$. Тем самым корректность определения действия на множестве $X/E(\mathcal{U})$ проверена. Эквивариантность факторотображения множества X на $X/E(\mathcal{U})$ вытекает из определения действия на $X/E(\mathcal{U})$.

Так как равномерность $\bar{\mathcal{U}}$ — сильнейшая из равномерностей на множестве $X/E(\mathcal{U})$, в которой естественное отображение $p : X \to X/E(\mathcal{U})$ является равномерно непрерывным, то она инвариантна. Непрерывность отображений $\alpha^g : X \to X$, $g \in G$, выше определенного действия на пространстве $X/\mathcal{U}$ следует из их равномерной непрерывности.

Доказательство оставшихся утверждений следует из леммы 1.5.2. □

Легко проверить, что семейство U_G — покрытий на G-пространстве X, в которые можно вписать покрытия вида $\gamma_O = \{Ox : x \in X\}, O \in N_G(e)$ является равномерностью на X (не обязательно согласованную с топологией X).

В [23] на G-пространстве X определена близость δ_G (не обязательно согласованная с топологией X):

$$A\delta_G B \text{ тогда и только тогда, когда } OA \cap OB \neq \emptyset \text{ для любого } O \in N_G(e).$$

Лемма 1.5.3. *Пусть X — G-пространство. Тогда δ_G — близость, индуцированная* [46] *равномерностью U_G.*

Доказательство. Пусть δ' — близость, индуцированная равномерностью U_G. Она определяется следующим образом: $A\delta' B$ тогда и только тогда, когда для любого $O \in N_G(e)$ существует $x \in X$ такая, что $A \cap Ox \neq \emptyset, B \cap Ox \neq \emptyset$. Покажем, что $\delta_G \geq \delta'$. Для любого $O \in N_G(e)$ возьмем $V \in N_G(e)$ такое, что $V = V^{-1}$ и $V \subset O$. Если $A\delta_G B$, то существует $x \in X$ такая, что $x \in VA \cap VB$. Тогда очевидно, что $Vx \cap A \neq \emptyset$ и $Vx \cap B \neq \emptyset$, а значит и $A\delta' B$. Соотношение $\delta' \geq \delta_G$ доказывается столь же несложно. □

Обозначим через $\bar{U}_G$ семейство покрытий на G-пространстве X, состоящее из всех покрытий, в которые можно вписать покрытия вида $\mathrm{cl}\gamma_O = \{\mathrm{cl}(Ox) : x \in X\}, O \in N_G(e)$.

Лемма 1.5.4. *Пусть $\mathcal{U}$ — согласованная с топологией равномерность на G-пространстве. Если $\bar{U}_G$ — равномерность на X, то тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) $U_G \geq \mathcal{U}$;

(2) $\bar{U}_G \geq \mathcal{U}$.

Более того, если равномерность U_G согласована с топологией пространства X, то тогда равномерности U_G и $\bar{U}_G$ совпадают.

Доказательство. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Для произвольного элемента $v \in U$ возьмем элемент $v' \in U$ такой, что v' сильно звездно вписан в v. Тогда покрытие $\mathrm{cl}v' \in U$ вписано в v. Возьмем элемент $\gamma_O \in U_G$ такой, что γ_O вписано в v'. Тогда элемент $\mathrm{cl}\gamma_O \in \bar{U}_G$ вписан в $\mathrm{cl}v'$. Тем самым $\mathrm{cl}\gamma_O$ вписано в v, и $\bar{U}_G \geq \mathcal{U}$.

Выполнение импликации (2) $\Rightarrow$ (1) очевидно.

Если равномерность U_G согласована с топологией пространства X, то тогда в качестве равномерности $\mathcal{U}$ можно взять равномерность U_G. Тогда имеем $\bar{U}_G \geq U_G$. Значит равномерности U_G и $\bar{U}_G$ совпадают. □

Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{I} = [0,1]$, определенная на G-пространстве X, называется *G-равномерной* (см., например, [2]), если для любого $\epsilon > 0$ существует $O \in N_G(e)$ такая, что $|f(x) - f(gx)| < \epsilon$ для любых $x \in X$, $g \in O$.

Замечание 1.5.2. Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{I} = [0,1]$, определенная на G-пространстве X, — G-равномерна, если она равномерно непрерывна относительно равномерности U_G.

Пусть $f : X \to \mathbb{I}$ — G-равномерная функция и $O_n \in N_G(e)$ такая, что $|f(x) - f(gx)| < 1/n$ для любых $x \in X$, $g \in O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Можно считать, что $O_n = O_n^{-1}$ и $O_{n+1}^2 \subset O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $H = \bigcap\{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ является замкнутой типа G_δ подгруппой, и $f(x) = f(gx)$ для любых $x \in X$, $g \in H$. Т.е. любая G-равномерная функция имеет счетный тип в смысле Е. В. Щепина [42].

На множестве $M(X)$ — функций на G-пространстве X в отрезок I (не обязательно непрерывных) определено естественное действие $\alpha' : G \times M(X) \to M(X)$ правилом $\alpha'(g, f(x)) = f(g^{-1}x)$. Легко проверить (см., например, [2]), что если f — G-равномерная функция, то для любого $g \in G$ функция gf также G-равномерна, и ограничение действия α' на подмножество G-равномерных функций в топологии равномерной сходимости является непрерывным.

Для любой функции $f : X \to I$ выполнено $g(f^{-1}(0,1]) = (gf)^{-1}(0,1]$ $(x \in g(f^{-1}(0,1]) \iff g^{-1}x \in f^{-1}(0,1] \iff f(g^{-1}x) > 0 \iff (gf)(x) > 0 \iff x \in (gf)^{-1}(0,1])$.

Лемма 1.5.5. *Пусть X — G-пространство, и действующая группа G — $\aleph_0$-уравновешена. Тогда для любой G-равномерной функции существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям* (1) – (2) леммы 1.4.1 *и* (3) леммы 1.4.3*, такое, что для любых $\epsilon > 0$ и $g \in G$ существует $O \in \mathcal{O}$, для которого $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < \epsilon$ для любых $h \in O$, $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $U_n \in N_G(e)$ такое, что $|f(x) - f(hx)| < 1/n$ для любых $h \in U_n$, $x \in X$, $n \in \mathbb{N}$.

Так как группа $\aleph_0$-уравновешена, то для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует счетное семейство U_i^n, $i \in \mathbb{N}$ такое, что $U_1^n \subset U_n$, $U_{i+1}^n \subset U_i^n$, $i \in \mathbb{N}$, и для любого $g \in G$ существует $i(g) \in \mathbb{N}$, для которого $g^{-1}U^n_{i(g)}g \subset U_n$. Заметим, что для $h \in U^n_{i(g)}$ имеем $f(g^{-1}hx) = f(tg^{-1}x)$ для некоторого $t \in U_n$. Но $|f(y) - f(ty)| < 1/n$ для любых $t \in U_n$, $y \in X$, в частности для $y = g^{-1}x$. Значит $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < 1/n$ для любых $x \in X$, $h \in U^n_{i(g)}$.

Положим $O_1 = U_1$. Последовательно построим множества O_n такие, что $O_n^2 \subset O_{n-1}$, $O_n^{-1} \subset O_{n-1}$, $O_n \subset \bigcap\{U^j_k : j = 1, \dots n-1, j+k = n\}$.

Тогда несложно проверить, что счетное семейство $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условиям (1) – (2) леммы 1.4.1 и (3) леммы 1.4.3, и, тем самым, для любых $\epsilon > 0$ и $g \in G$ существует $O \in \mathcal{O}$, для которого $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < \epsilon$ для любых $h \in O$, $x \in X$. □

Пусть топологии τ, τ', $\tau' \geq \tau$ на группе G такие, что групповые операции непрерывны. Топологические группы (G, τ') и (G, τ) будем обозначать G' и G соответственно. Заметим, что при данных предположениях любое G-пространство является и G'-пространством.

Лемма 1.5.6. *Пусть $f : X \to Y$ — совершенное сюръективное эквивариантное отображение G'-пространств. Если X является также и G-пространством, то и Y — G-пространство.*

Доказательство. Возьмем произвольные точку $y \in Y$ и ее окрестность O_y. Отображение f — совершенно, поэтому $f^{-1}y$ — бикомпакт и $f^{-1}y \subset f^{-1}(O_y)$. Так как X является G-пространством, то для любой точки $x \in f^{-1}y$ существует пара открытых множеств U_x, $x \in U_x$ и $O_x \in N_G(e)$ таких, что $O_xU_x \subset f^{-1}(O_y)$. Из покрытия $\{U_x : x \in f^{-1}y\}$ бикомпакта $f^{-1}y$ выберем конечное подпокрытие, тело объединения которого обозначим U, а пересечение соответствующих этому подпокрытию окрестностей единицы группы обозначим O. Тогда $OU \subset f^{-1}(O_y)$. Из эквивариантности отображения f вытекает, что $Of(U) = f(OU) \subset O_y$. Так как f — замкнуто, то $y \in \mathrm{int} f(U)$ и $O\ \mathrm{int} f(U) \subset O_y$. Значит Y является G-пространством. □

1.6 Спектральные представления пространств

Для пространства X система $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$, состоящая из направленного множества A, непрерывных сюръективных отображений f_α пространства X, $\alpha \in A$, и отображений $f_{\beta\alpha} : f_\beta(X) \to f_\alpha(X)$, $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$, называется *согласованной системой отображений* на X, если

(1) диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L\} : X \to \Pi\{f_\alpha(X) : \alpha \in A\}$ является вложением;

(2) $f_\alpha = f_{\beta\alpha} \circ f_\beta$, $\alpha, \beta \in A, \alpha < \beta$.

Согласованная система отображений L называется:

- *(d-)открытой*, если все отображения f_α, $\alpha \in A$, (d-)открыты;

- *эквивариантной*, если X — G-пространство, и все отображения f_α, $\alpha \in A$, эквивариантны;

- *мультипликативной* (*слабо мультипликативной*) , если для любого $B \subset A$ существует $\beta = \sup B$ в A такой, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (инъективно);

- $\mathcal{P}$*-системой*, если диагональное произведение $\Delta\{f_\alpha \in L : f_\alpha(X)$ — обладает свойством $\mathcal{P}\}$ является вложением;

- τ*-полной* (*слабо* τ*-полной*), если для любой цепи B в A мощности $\tau \geq \aleph_0$ существует $\beta = \sup B$ в A такой, что диагональное произведение $\Delta\{f_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (инъективно);

- *(слабо)* $\tau_{\mathcal{P}}$*-системой*, если в (слабо) τ-полной согласованной системе отображений все образы пространства X обладают свойством $\mathcal{P}$.

Замечание 1.6.1. Обратный спектр $S = \{X_\alpha, p_{\beta\alpha} : A\}$ назовем τ-почти непрерывным, если направленное множество A τ-полно (любая цепь B в A мощности τ имеет точную верхнюю грань β) и диагональное отображение $\Delta\{p_{\beta\alpha} : \alpha \in B\}$ является вложением (см., например, [108] или [83]).

Согласованные τ-полные системы отображений находятся в естественном соответствии с τ-почти непрерывными обратными спектрами. А именно, по согласованной τ-полной системе $L = \{f_\alpha, f_{\beta\alpha}; A\}$ на пространстве X строится обратный спектр $S = \{f_\alpha(X), f_{\beta\alpha}; A\}$, который будет τ-почти непрерывным. При этом X всюду плотно в пределе спектра $\varprojlim S$. По обратному τ-почти непрерывному спектру $S = \{X_\alpha, p_{\beta\alpha}; A\}$ (не ограничивая общности рассуждений, считаем, что все проекции сюръективны) строится согласованная система $L = \{p_\alpha, p_{\beta\alpha}; A\}$, являющаяся τ-полной следующим образом. В качестве пространства X можно взять произвольное подмножество $\varprojlim S$, чьи проекции сюръективны (оно будет всюду плотно в пределе). Отображения p_α, $\alpha \in A$, — предельные проекции, $p_{\beta\alpha}$, $\beta > \alpha$, $\beta, \alpha \in A$, — короткие проекции спектра.

Замечание 1.6.2. Пространство, на котором задана согласованная $\mathcal{P}$-система (в частности, $\tau_{\mathcal{P}}$-система) является подмножеством произведения пространств, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

Пусть свойство $\mathcal{P}$ топологических пространств — τ-мультипликативно и наследствено по подмножествам. Если пространство X является подмножеством произведения пространств, обладающих свойством $\mathcal{P}$, то его проекции на τ-грани (естественный порядок на τ-гранях определяет направленное множество) определяют $\tau_{\mathcal{P}}$-систему на X. При этом, если X замкнуто в произведении, то предел соответствующего τ-почти непрерывного спектра совпадает с X. В частности, на пространстве с согласованной $\mathcal{P}$-системой отображений определена и $\tau_{\mathcal{P}}$-система отображений. Если, дополнительно, согласованная $\mathcal{P}$-система отображений мультипликативна, то $\tau_{\mathcal{P}}$-систему можно считать ее подсистемой.

Для топологического свойства $\mathcal{P}$ свойство пространств уплотняться на пространства со свойством $\mathcal{P}$ обозначим $cb\mathcal{P}$.

Свойства сепарабельной метризуемости ($\mathcal{SM}$) и метризуемости ($\mathcal{M}$) σ-мультипликативны (т.е. счетно-мультипликативны) и наследствены по подмножествам. Свойство пространств иметь полную метрику обозначаем $\mathcal{CM}$.

Пространство X называется *od-пространством* (соответственно *d-пространством*) [34], если на X существует согласованная открытая (соответственно d-открытая) слабо мультипликативная $cb\mathcal{M}$-система отображений.

Бикомпакт X называется *открытопорожденным* (или *$\varkappa$-метризуемым*) [45], если он гомеоморфен предельному пространству σ-спектра (т.е. σ-полного спектра (непрерывного спектра над σ-полным множеством) из компактов) с открытыми проекциями. В терминах систем отображений получаем переформулировку: на X существует открытая $\sigma_{\mathcal{SM}}$-система (или, что то же самое, $\sigma_{\mathcal{M}}$-система) отображений.

В не бикомпактном случае имеется следующее обобщение этого понятия. Пространство X называется *d-открыто порожденным* [83], [112], если оно является всюду плотным подмножеством предельного пространства σ-почти непрерывного спектра из сепарабельных метрических пространств с d-открытыми проекциями. На пространстве существует d-открытая $\sigma_{\mathcal{SM}}$-система отображений в том и только том случае, если пространство является d-открыто порожденным [83, Теорема 2.1].

Так как пересечение (нормальных) подгрупп является (нормальной) подгруппой, то семейство подгрупп, упорядоченное по включению, позволяет рассматривать соответствующее упорядочение на семействе факторпространств (факторгрупп) и использовать метод обратных спектров для описания классов групп и исследования их действий.

Любая топологическая группа является od-пространством [34]. У $\aleph_0$-уравновешенной (соответственно $\aleph_0$-ограниченной) группы свойство быть od-пространс реализуется с помощью гомоморфизмов. Более того, для них по замечанию 1.6.2 существует $\sigma_{\mathcal{M}}$-система (соответственно $\sigma_{\mathcal{SM}}$-система) гомоморфизмов.

Предложение 1.6.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) *группа G инфраметризуема* (*соответственно почти метризуема; полна по Чеху*)*;*

(b) *на G существует согласованная открытая, эквивариантная мультипликативная $\mathcal{M}$-система из отображений в факторпространства группы по вполне ограниченным подгруппам (соответственно согласованная открытая, совершенная, эквивариантная и мультипликативная $\mathcal{M}$-система из отображений в факторпространства группы по бикомпактным подгруппам; согласованная открытая, совершенная, эквивариантная и мультипликативная $\mathcal{CM}$-система из отображений в факторпространства группы по бикомпактным подгруппам);*

(c) *на G существует открытая и эквивариантная $\sigma_{\mathcal{M}}$-система из отображений в факторпространства группы по вполне ограниченным подгруппам (соответственно открытая, совершенная и эквивариантная $\sigma_{\mathcal{M}}$-система из отображений в факторпространства группы по бикомпактным подгруппам; открытая, совершенная и эквивариантная $\sigma_{\mathcal{CM}}$-система из отображений в факторпространства группы по бикомпактным подгруппам).*

Доказательство. (a) $\Longrightarrow$ (b). Пополнение $\hat{G}$ инфраметризуемой группы G по двусторонней равномерности является полной по Чеху группой [103, Гл. 11] и [103, Теорема 13.30]. Рассмотрим семейство отображений в факторпространства по бикомпактным подгруппам. По [26, Следствию 3], принимая во внимание, например, [46, Теоремы 3.9.10, 4.3.26], они образуют согласованную открытую, совершенную и эквивариантную мультипликативную $\mathcal{CM}$-систему (мультипликативность следует из очевидной слабой мультипликативности и совершенности диагонального произведения совершенных пространств). Аналогичные рассуждения с использованием [26, Теорема 1] применимы в случае почти метризуемой группы.

Ограничение отображений согласованных систем отображений, полученных для полной по Чеху группы, на всюду плотную подгруппу G будут открытыми, эквивариантными и мультипликативными $\mathcal{M}$-системами из отображений в факторпространства группы G по вполне ограниченным подгруппам.

Импликация (b) $\Longrightarrow$ (c) следует из замечания 1.6.2.

(c) $\Longrightarrow$ (a). Если на группе существует совершенное факторотображение в полно метризуемое пространство, то она полна по Чеху (см., например, [46, Теоремы 3.9.10, 4.3.26]).

В случае наличия на группе G совершенного факторотображения в метризуемое пространство ее почти метризуемость следует из определения.

Если на группе G определено факторотображение по подгруппе H в метрическое пространство, то вес семейства OH, $O \in N_G(e)$, счетен. Т.е. существует счетная система $O_k \in N_G(e)$, $k \in \mathbb{N}$, такая, что множества O_kH, $k \in \mathbb{N}$, образуют базу семейства OH, $O \in N_G(e)$. Так как H вполне ограничена, то $\mathrm{cl}_{\hat{G}} H = \hat{H}$ — бикомпактная подгруппа $\hat{G}$. Для произвольной окрестности W подгруппы $\hat{H}$ в $\hat{G}$ пусть W' (без ограничения общности считаем, что $W' = U\hat{H}$, $U \in N_{\hat{G}}(e)$) окрестность $\hat{H}$, с замыканием содержащаяся в W. Существует $k \in \mathbb{N}$ такой, что $O_kH \in (U \cap G)H$. Тогда $\hat{H} \subset O_k\hat{H} \subset \mathrm{cl}_{\hat{G}}(O_k)\hat{H} \subset \mathrm{cl}_{\hat{G}}(O_kH) \subset \mathrm{cl}_{\hat{G}} W' \subset W$. Тем самым показано, что открытые множества $\tilde{O}_k \in N_{\hat{G}}(e)$, где $O_k \subset \tilde{O}_k \subset \mathrm{cl}_{\hat{G}}(O_k)$, $k \in \mathbb{N}$, образуют счетную базу $\hat{H}$ в $\hat{G}$. Значит $\hat{G}$ — полная по Чеху группа, а G — инфраметризуема. $\square$

Глава 2

d-открытые действия

2.1 Элементарные свойства d-открытых действий

Определение 2.1.1. Действие $\alpha : G \times X \to X$ назовем

> *открытым*, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \mathrm{int}(Ox)$;
>
> *d-открытым*, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$;
>
> *слабо d-открытым*, если для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ существует точка $y \in X$ такая, что $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oy))$.

Лемма 2.1.1. *(d-)Открытость действия $\alpha : G \times X \to X$ эквивалентна (d-)открытости (не непрерывных) отображений $\alpha_x : G \to X$, $x \in X$.*

Доказательство. Пусть действие (d-)открыто, $x \in X$, O открыто в G. Для любого $g \in O$ имеем $Og^{-1}gx = Ox$, и $Og^{-1} \in N_G(e)$. Поэтому

$$(gx \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Og^{-1}gx)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))) \ \ gx \in \mathrm{int}(Og^{-1}gx) = \mathrm{int}(Ox),$$

и тем самым

$$(\alpha_x(O) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\alpha_x(O)))) \ \ \alpha_x(O) \subset \mathrm{int}(\alpha_x(O)).$$

Если отображение α_x (d-)открыто, то для любого $O \in N_G(e)$ имеем $(\alpha_x(O) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(\alpha_x(O))))$ $\alpha_x(O) = \mathrm{int}(\alpha_x(O))$. Поэтому $(x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)))$ $x \in \mathrm{int}(Ox)$. □

Замечание 2.1.1. Ф. Анцель [47] называл непрерывные, открытые действия микро-транзитивными и непрерывные, d-открытые действия слабо микро-транзитивными.

Термины открыто (d-открыто) связаны с тем, что действие "открыто"("d-открыто") в том и толко том случае, если отображения $\alpha_x : G \to X$, где $\alpha_x(g) = \alpha(g, x)$, $x \in X$, открыты (d-открыты) по лемме 2.1.1. Тем самым для d-открытого действия имеем $Ox \subset \text{int}(\text{cl}(Ox))$ для любых элемента $O \in N_G(e)$ и точки $x \in X$.

Очевидно, что (непрерывные) открытые действия являются (непрерывными) d-открытыми, являющимися в свою очередь (непрерывными) слабо d-открытыми.

Лемма 2.1.1 показывает, что Успенским в [33, 34] рассматривались непрерывные, d-открытые действия.

Определение 2.1.2. Действие $\alpha : G \times X \to X$ *d-открыто в точке* $x \in X$, если для любой $O \in N_G(e)$ имеем $x \in \text{int}(\text{cl}(Ox))$.

Замечание 2.1.2. Если x — точка d-открытости действия, то и любая точка ее орбиты Gx является точкой d-открытости. Действительно, пусть $y = gx$. Покажем, что для любой окрестности $O \in N_G(e)$ имеем $y \in \text{int}(\text{cl}(Oy))$. Возьмем $V = g^{-1}Og$. Очевидно, что $V \in N_G(e)$. Тогда $y = gx \in g(\text{int}(\text{cl}(Vx))) \subset$ (по лемме 1.5.1) $\subset \text{int}(\text{cl}(gVx)) = \text{int}(\text{cl}(Ogx)) = \text{int}(\text{cl}(Oy))$.

Отсюда следует, что множество X_G точек d-открытости действия группы G является инвариантным подмножеством X.

В [17, Определение 1] точки d-открытости непрерывного действия названы *точками почти открытости действия.*

Следующее утверждение показывает, что нет необходимости специально рассматривать (d-)открытые раздельно непрерывные действия.

Лемма 2.1.2. *d-Открытое раздельно непрерывное действие непрерывно.*

Доказательство. Напомним, что действие α непрерывно в том и только том случае, если оно непрерывно в точках $(e, x) \subset G \times X$, $x \in X$, и непрерывны отображения α^g, $g \in G$. Поэтому требуется проверить лишь непрерывность действия в точках $(e, x) \subset G \times X$, $x \in X$.

Так как отображения $\alpha_x : G \to X$, $x \in X$, непрерывны, то для любой окрестности O произвольной точки $x \in X$ существует $V \in N_G(e)$ такая, что $\mathrm{cl}(Vx) \subset O$. Из d-открытости раздельно непрерывного действия α имеем $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$. Пусть $W \in N_G(e)$ такая, что $W^{-1} = W$ и $W^2 \subset V$. Тогда $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$ является окрестностью точки x, и, используя лемму 1.5.1, имеем

$$W\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(W^2x)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) \subset O.$$

Тем самым непрерывность действия доказана. $\square$

Лемма 2.1.3. *Для слабо d-открытого действия $\alpha : G \times X \to X$ и точек $x, y \in X$ выполнено или*

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gy)), \ \textit{или} \ \ \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gy)) = \emptyset.$$

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно показать, что если $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gy)) \neq \emptyset$, то тогда $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gy))$.

Пусть $z \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx))$ и O_z — произвольная окрестность z. Возьмем $z' \in O_z \cap Gx$, $z'' \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gy)) \cap Gx$ и $g \in G$ такие, что $gz'' = z'$. Так как отображение $\alpha^g : X \to X$ непрерывно, то существует окрестность $O_{z''} \subset O_z$. Для точки $y' \in O_{z''} \cap G_y$ имеем $gy' \in O_z$, и значит $Gy \cap O_z \neq \emptyset$. В силу произвольности выбора окрестности O_z имеем $z \in \mathrm{cl}(Gy)$, и поэтому $\mathrm{cl}(Gx) \subset \mathrm{cl}(Gy)$. $\square$

Предложение 2.1.1. (a) *При открытом действии фазовое пространство является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых гомеоморфно факторпространству действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе.*

(b) *Если действие слабо d-открыто или d-открыто, то фазовое пространство X является прямой суммой открыто-замкнутых подмножеств, каждое из которых является замыканием орбиты некоторой точки в первом и произвольной точки во втором случае (т.е. непрерывный взаимно однозначный образ факторпространства действующей группы по некоторой замкнутой подгруппе всюду плотен в каждом из подмножеств).*

Доказательство. Так как в случае слабо ((d-)открытого) действия пространство X является объединением открытых множеств $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx))$, $x \in X$, которые попарно или совпадают, или дизъюнктны, то X является дизъюнктным объединением открыто-замкнутых подмножеств вида $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx))$, где $x \in X$.

Очевидно, что в случае (a) $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Gx)) = Gx$, $x \in X$, и значит Gx является факторпространством группы G по некоторой замкнутой подгруппе (см., например, [93]). Утверждение (b) очевидно. Пример слабо d-открытого действия группы $\mathcal{H}_{co}(I)$ на I показывает, что в случае (b) орбиты точек $\{0\}, \{1\}$ нигде не плотны. Что и доказывает уточнение в пункте (b). $\square$

Разложения, определенные в предложении 2.1.1, назовем *компонентами действия.*

Дадим характеризацию d-открытых действий.

Замечание 2.1.3. Если орбита любой точки пространства X с действием группы G всюду плотна (в частности, если действие d-открыто и имеет одну компоненту), то семейство $\varphi_W = \{gW : g \in G\}$, где W — открытое подмножество X, является инвариантным покрытием X.

Легко видеть, что действие d-открыто в точке x, если выполнено одно из эквивалентных условий:

- для любого $O \in N_G(e)$ существует окрестность U точки x такая, что множество $Ox \cap U$ всюду плотно в U;

- для любого $O \in N_G(e)$ существует окрестность U точки x такая, что для любого непустого открытого подмножества $W \subset U$ существует $g \in O$, для которого $x \in gW$.

Лемма 2.1.4. *Пусть действие на X (соответственно слабо) d-открыто; $V, O \in N_G(e)$, $VV^{-1}V \subset O$. Тогда для любого $x \in X$ имеем $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$ (соответственно существует $z \in X$ такая, что $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oz))$).*

Доказательство. Приведем доказательство в случае слабо d-открытого действия (его очевидная модификация пригодна для случая d-открытого действия). Пусть $z \in X$ такая, что $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vz))$. Если $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$, то $Vy \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vz)) \neq \emptyset$ (так как Vy плотно в $\mathrm{cl}(Vy)$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vz))$ — окрестность x и $x \in \mathrm{cl}(Vy)$). По лемме 1.5.1

$$Vy \subset VV^{-1}\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vz)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(VV^{-1}Vz)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oz))$$

и, тем самым, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oz))$. Значит $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oz))$. □

Следствие 2.1.1. *Если действие на X слабо d-открыто, то для любого $O \in N_G(e)$ семейство $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\}$ является покрытием X.*

Предложение 2.1.2. *Действие на пространстве X d-открыто тогда и только тогда, когда для любых $O \in N_G(e)$ и $x \in X$ существует окрестность U точки x такая, что $U \subset \{gW : g \in O\}$ для любого непустого открытого подмножества $W \subset U$.*

Доказательство. Достаточность следует из замечания 2.1.3.

Если $O \in N_G(e)$, $O^{-1} = O$ и $V \in N_G(e)$ такая, что $V^{-1} = V$ и $V^3 \subset O$, то по лемме 2.1.4 имеем $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$ для любой точки $x \in X$. Для $O \in N_G(e)$ и $x \in X$ положим $U = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$. Пусть W открытое подмножество U и $y \in U$. Так как $U \subset \mathrm{St}(y, \gamma_V) \subset \mathrm{cl}(Oy)$, то существует $g \in O$ такой, что $gy \in W$. Т.е. для любой точки $y \in U$ существует $g \in O$ такой, что $y \in gW$. □

Лемма 2.1.5. *Пусть действие на пространстве X d-открыто. Тогда для любых $O, V \in N_G(e)$ и $x \in X$, если $U \in N_G(e)$ такая, что $U^{-1} = U$, $U^2 \subset O$, то имеем $\mathrm{cl}(Ux) \subset \bigcup\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\}$.*

Доказательство. Очевидно, что $Ux \subset \bigcup\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in U\}$. Пусть $y \in \mathrm{cl}(Ux)$. Тогда $Uy \cap \bigcup\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in U\} \neq \emptyset$ (в противном случае окрестность $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Uy))$ точки y не пересекалась бы с Ux), и существуют $h, g \in U$ такие, что $hy \in g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$. Тем самым $y \in h^{-1}g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$. □

Предложение 2.1.3. *Пусть X является инвариантным подмножеством G-пространства Y.*

(a) *Если действие на Y d-открыто в точках подмножества X, то тогда ограничение действия на X d-открыто.*

(b) *Если ограничение действия на подмножество X d-открыто, то тогда его ограничение на $\mathrm{cl}_Y(X)$ d-открыто в точках X.*

Доказательство. (a) Так как инвариантное подмножество X всюду плотно в инвариантном подмножестве $\mathrm{cl}_Y(X)$, то не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что X – инвариантное всюду плотное подмножество Y. По лемме 1.0.1 для любых точки $x \in X$ и окрестности $O \in N_G(e)$ выполнено тождество

$$X \cap \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox)) = \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Ox)).$$

Тем самым $Ox \subset \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Ox))$ для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$, что и доказывает d-открытость ограничения действия.

(b) Так как X всюду плотное инвариантное подмножество $\mathrm{cl}_Y(X)$, то второе утверждение тривиальным образом следует из леммы 1.0.1. □

Лемма 2.1.6. *Пусть действие группы G на X (слабо) d-открыто и H всюду плотная подгруппа G. Тогда действие H на X (слабо) d-открыто.*

Доказательство. Для любого элемента $O \in N_G(e)$ множество $O' = (O \cap H) \in N_H(e)$ всюду плотно в O. Поэтому для любой точки $y \in X$ множество $O'y$ всюду плотно в Oy и $x \in \mathrm{cl}(Oy) = \mathrm{cl}(O'y)$. Тем самым, если $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oy))$, то $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(O'y))$. □

Предложение 2.1.4. *Пусть действие d-открыто в точках инвариантного подмножества X G-пространства Y. Тогда*

$$Z = \bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox)) : x \in X\} : O \in N_G(e)\}$$

является инвариантным подмножеством Y.

Доказательство. Пусть точка $y \in Z$ и элемент $g \in G$ – произвольные. Тогда

$$gy \in g\bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox)) : x \in X\} : O \in N_G(e)\} =$$

$$= \bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(gOx)) : x \in X\} : O \in N_G(e)\},$$

так как g – гомеоморфизм. Для $V = gOg^{-1}$ имеем

$$\bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(gOx)) : x \in X\} : O \in N_G(e)\} =$$

$$= \bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vgx)) : x \in X\} : O \in N_G(e)\}.$$

Так как операции в группе непрерывны и X инвариантно, то

$$\bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vgx)) : x \in X\} : O \in N_G(e)\} =$$

$$= \bigcap\{\bigcup\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vx)) : x \in X\} : V \in N_G(e)\} = Z.$$

Тем самым $gy \in Z$. □

Дадим характеризацию d-открытых эквивариантных отображений G-пространства с d-открытым действием.

Предложение 2.1.5. *Пусть $f : X \to Y$ — эквивариантное отображение G-пространства X с (d-)открытым действием, на пространство Y с действием группы G. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *действие на Y (d-)открыто;*

(b) *отображение f (d-)открыто.*

Если действие на X открыто, то условия (a) *и* (b) *в формулировке с открытостью также эквивалентны следующему условию:*

(c) *f — фактороотображение.*

Доказательство. Покажем выполнение импликации (a)$\Longrightarrow$(b). Пусть W — произвольное открытое подмножество X, $x \in W$, и $y = f(x)$. Для доказательства (d-)открытости отображения f достаточно показать, что ($y \in$

$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(W))))$ $y \in \mathrm{int}(f(W))$. В силу непрерывности действия на X существует $V \in N_G(e)$ такая, что $Vx \subset W$. Тогда из эквивариантности отображения f имеем $Vy \subset f(W)$ (и $\mathrm{cl}(Vy) \subset \mathrm{cl}(f(W))$). Поэтому из ($d$-)открытости действия на Y имеем

$$(y \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(W)))) \;\; y \in \mathrm{int}(Vy) \subset \mathrm{int}(f(W)).$$

Покажем выполнение импликации (b)$\Longrightarrow$(a). Пусть $y \in Y$, $V \in N_G(e)$, и $y = f(x)$. Тогда из (d-)открытости действия на X имеем ($x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$) $x \in \mathrm{int}(Vx)$. Поэтому из (d-)открытости и эквивариантности отображения f имеем

$$(y = f(x) \in f(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))))) \subset$$

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(Vx)))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(Vx))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy)))$$

$$y = f(x) \in f(\mathrm{int}(Vx)) \subset \mathrm{int}(f(Vx)) = \mathrm{int}(Vy).$$

Если действие на X открыто, то нужно лишь показать выполнение импликации (c)$\Longrightarrow$(b). Для этого достаточно доказать, что множество $f^{-1}f(W)$ открыто для произвольного открытого подмножества W пространства X. Пусть $x \in f^{-1}f(W)$. Тогда существуют $y \in W$ и $V \in N_G(e)$ такие, что $f(x) = f(y)$ и $Vy \subset W$. Из эквивариантности отображения f имеем $Vx \subset f^{-1}f(W)$. Действие на X открыто, поэтому $x \in \mathrm{int}(Vx) \subset f^{-1}f(W)$. Тем самым открытость множества $f^{-1}f(W)$ доказана. □

Предложение 2.1.6. *Пусть X — G-пространство, $\mathcal{G}$ — насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп группы G такие, что для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ d-открыто действует в точке $x \in X$. Тогда группа $G_{\mathcal{G}}$ d-открыто действует в точке x.*

Доказательство. Любая окрестность O единицы в $G_{\mathcal{G}}$ имеет вид

$$O = W \cap \bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}, \text{ где } W \in N_G(e),\ \mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}.$$

Так как действие подгруппы $G' = \bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ d-открыто в точке x, то для любого элемента $O' \in N_{G'}(e)$ (в частности для O) выполнено включение $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(O'x))$. Тем самым d-открытость действия группы $G_{\mathcal{G}}$ в точке x доказана. $\square$

Очевиден следующий факт.

Лемма 2.1.7. *Пусть действие группы G_α на пространстве X_α ((слабо) d-)открыто, $\alpha \in A$. Тогда действие группы $G = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ на пространстве $X = \oplus\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ (определение суммы $\oplus$ см., например, в* [46, Гл.2, §2.2]*), определенное формулой $gx = g_\alpha x$ для $g = \{g_\alpha\} \in G$ и $x \in X_\alpha$, $\alpha \in A$, является ((слабо) d-)открытым.*

2.2 Равномерные структуры, порождаемые d-открытыми действиями

Предложение 2.2.1. *Пусть действие на X слабо d-открыто и семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ удовлетворяет условиям* (1) — (2) леммы 1.4.1.

Тогда семейство покрытий $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\}$, $O \in \mathcal{O}$, является базой псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ на множестве X. При этом вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$, а топология $\tau_{\mathcal{O}}$ (не обязательно тихоновская), индуцируемая псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, слабее топологии пространства X.

Если семейство $\mathcal{O}$ дополнительно к условиям (1) *и* (2) *удовлетворяет условию* (3) леммы 1.4.3, *то псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ инвариантна, и X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ — G-пространство (не обязательно тихоновское).*

Если дополнительно к условиям (1) *и* (2) *действие удовлетворяет условию*

(2.2*) *для любых двух различных точек x, y пространства X существует элемент $O \in \mathcal{O}$ такой, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия γ_O,* *то* $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ *— равномерность на* X.

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — база семейства $\mathcal{O}$ той же мощности, что и вес $\mathcal{O}$. В доказательстве того, что семейство $\gamma_U = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ux)) : x \in X\}$, $U \in \mathcal{B}$, является базой псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ нетривиальным является лишь проверка того, что для любого $U \in \mathcal{B}$ существует $V \in \mathcal{B}$ такое, что γ_V сильно звездно вписано в γ_U.

Используя свойство (2) семейства $\mathcal{O}$ и определение его базы строятся: $W' \in \mathcal{B}$ такое, что $W'^2 \subset U$; $W'' \in \mathcal{B}$ такое, что $W''^2 \subset W'$; $W \in \mathcal{B}$ такое, что $W^2 \subset W''$ и $W^{-1} \subset W''$. Тогда $WW^{-1}W \subset W''W''W'' \subset W'W' \subset U$.

По лемме 2.1.4 покрытие γ_W звездно вписано в γ_U.

Аналогичным образом для покрытия γ_W можно найти звездно вписанное в него покрытие γ_V, $V \in \mathcal{B}$, которое (см., например, [46, Лемма 5.1.15]) сильно звездно вписано в γ_U. Очевидно, что вес $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ не превосходит веса семейства $\mathcal{O}$.

То, что топология $\tau_{\mathcal{O}}$ слабее исходной топологии на X вытекает из того, что база псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ состоит из открытых покрытий пространства X.

Если выполнено условие (3), то для $O \in \mathcal{O}$ и $g \in G$ пусть $V \in \mathcal{O}$ такая, что $Vg \subset gO$. Так как $\gamma_V = \gamma_{Vg}$ ($\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : x \in X\} = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vgx)) : x \in X\}$) и $g\gamma_O = \gamma_{gO}$ ($g\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\} = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(gOx)) : x \in X\}$), то из включения $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vgx)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(gOx))$, $x \in X$, следует, что γ_V вписано в покрытие $g\gamma_O$. Тем самым $g\gamma_O \in \mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, и псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ инвариантна.

Отметим, что действие группы G на множестве X с топологией $\tau_{\mathcal{O}}$ непрерывно в точках $(e,x) \subset G \times X$, $x \in X$. Действительно, из определения топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ имеем, что для любой окрестности O произвольной точки $x \in X$ существует $V \in \mathcal{O}$ такая, что $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset O$. Пусть $W \in \mathcal{O}$ такая, что $W^2 \subset V$. Тогда, по лемме 1.5.1 $W\mathrm{St}(x,\gamma_W) \subset \mathrm{St}(x,\gamma_V)$, т.е. для $W \in N_G(e)$ и U — внутренности в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ множества $\mathrm{St}(x,\gamma_W)$, имеем $x \in U$ и $WU \subset O$.

Поэтому, если выполнено условие (3), то остается проверить лишь непрерывность отображений $\alpha^g : X \to X$, $g \in G$, которая будет следовать из инвариантности псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$.

Если действие удовлетворяет условию (2.2*), то очевидно, что $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ — равномерность на X. $\square$

Так как на бикомпактном пространстве существует единственная согласованная с топологией равномерность, то из предложения 2.2.1 имеем.

Следствие 2.2.1. *Если X — бикомпактное пространство со слабо d-открытым действием, семейство $\mathcal{O}$ удовлетворяет условиям* (1) *и* (2) леммы 1.4.1, *а действие условию* (2.2*) предложения 2.2.1, *то X — бикомпактное G-пространство.*

Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — равномерная подгруппа G. Тогда определена псевдоравномерность $\mathcal{U}_H$ на X, базу которой образуют покрытия $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx)) : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$. Если $H = e$, то равномерность $\mathcal{U}_H$ на X будем обозначать $\mathcal{U}_G$.

Лемма 2.2.1. *Пусть X — G пространство с d-открытым действием группы G и H — равномерная подгруппа G. Тогда $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$.*

Доказательство. Покажем, что для любых $x \in X$ и $O \in N_G(H)$ имеем $Hx \subset \mathrm{St}(x, \gamma_O)$. Пусть $O = UH$, где $U \in N_G(e)$, и $V \in N_G(e)$ такое, что $HV \subset UH$. Отметим, что $VH \in N_G(H)$. Так как $x \in \mathrm{St}(x, \gamma_{VH})$, то, используя лемму 1.5.1, имеем $Hx \subset H\mathrm{St}(x, \gamma_{VH}) \subset \mathrm{St}(x, \gamma_{HVH}) \subset \mathrm{St}(x, \gamma_{UH}) \subset \mathrm{St}(x, \gamma_O)$. Тем самым $Hx \subset [x]_{\mathcal{U}_H} = \bigcap\{\mathrm{St}(x, v) : v \in \mathcal{F}\}$, а в силу замкнутости последнего множества имеем $\mathrm{cl}(Hx) \subset [x]_{\mathcal{U}_H}$.

Предположим, что существует $y \in [x]_{\mathcal{U}_H} \setminus \mathrm{cl}(Hx)$. Достаточно показать, что существует $U \in N_G(H)$ такая, что $y \notin \mathrm{cl}(Ux)$. Тогда из леммы 2.1.4 вытекает существование $W \in N_G(H)$ такой, что $\mathrm{St}(x, \gamma_W) \subset \mathrm{cl}(Ux)$, и тем самым $y \notin \mathrm{St}(x, \gamma_W)$.

Так как действие непрерывно и $y \notin \mathrm{cl}(Hx)$, то существует $O \in N_G(e)$ такая, что $O^{-1} = O$, и $\mathrm{cl}(O^2 y) \cap \mathrm{cl}(Hx) = \emptyset$. Так как действие d-открыто, то множество $H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(O^2y))$ открыто, содержит Hy, и $H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(O^2y))\cap\mathrm{cl}(Hx)=\emptyset$ (так как $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(O^2y))\cap\mathrm{cl}(Hx)=\emptyset$, а $H\mathrm{cl}(Hx)=\mathrm{cl}(Hx)$).

Пусть $V\in N_G(e)$ такая, что $VH\subset HO$, $V=V^{-1}$, $V\subset O$. Покажем, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))=\emptyset$. Пусть пересечение не пусто. Тогда, так как множество Vx плотно в $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$, а $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$ открыто в $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$, то существует $g\in V$ такой, что $gx\in H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$. Поэтому $x\in g^{-1}H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))\subset HO\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$. Имеем $HO\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))\subset H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OVy))\subset H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(O^2y))$. Но $H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(O^2y))\cap\mathrm{cl}(Hx)=\emptyset$. Полученное противоречие показывает, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))=\emptyset$.

Имеем $H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))=\emptyset$ (так как $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy)=\emptyset$, а $H^2\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))=H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$). Множество $H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$ открыто, поэтому $\mathrm{cl}(H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)))\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))=\emptyset$. Так как $Vx\subset\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$, то $\mathrm{cl}(HVx)\cap H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))=\emptyset$.

Пусть $U=V'H\in N_G(H)$, где $V'\in N_G(e)$ таково, что $V'H\subset HV$. Тогда $y\notin\mathrm{cl}(Ux)$. □

Лемма 2.2.2. *Пусть X — G пространство с d-открытым действием, H — равномерная подгруппа G, и $\mathrm{cl}(Hx)$ — бикомпакт для некоторой точки $x\in X$. Тогда для любой базы $\mathcal{B}$ семейства $N_G(H)$ множества $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$, $W\in\mathcal{B}$, образуют базу $\mathrm{cl}(Hx)$ в X, и характер $\mathrm{cl}(Hx)$ в X не превосходит веса семейства $N_G(H)$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ — база семейства $N_G(H)$. Так как по лемме 1.4.1 семейство $N_G(H)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), то им удовлетворяет и база $\mathcal{B}$.

Пусть O — произвольная окрестность множества $\mathrm{cl}(Hx)$. Для любой точки $y\in\mathrm{cl}(Hx)$ существуют ее окрестность V_y в X и $U_y\in N_G(e)$ такие, что $U_yV_y\subset O$. Из семейства $\{V_y : y\in\mathrm{cl}(Hx)\}$, покрывающего бикомпакт $\mathrm{cl}(Hx)$, выделим конечное подсемейство $\{V_i : i=1,\dots,k\}$, покрывающее $\mathrm{cl}(Hx)$. Тогда для $U=\bigcap\{U_i : i=1,\dots,k\}$ очевидно выполнено $U\mathrm{cl}(Hx)\subset O$. Так как $H\mathrm{cl}(Hx)=\mathrm{cl}(Hx)$, то $UH\mathrm{cl}(Hx)\subset O$. Также можно считать, что

$\mathrm{cl}(UH\mathrm{cl}(Hx)) \subset O$ (в силу того, что всегда вместо O можно взять окрестность O' множества $\mathrm{cl}(Hx)$ такую, что $\mathrm{cl}(Hx) \subset O' \subset \mathrm{cl}O' \subset O$). Тем самым $\mathrm{cl}(UH\mathrm{cl}(Hx)) = \mathrm{cl}(UHx) \subset O$. Так как $UH \in N_G(H)$, то существует $W \in \mathcal{B}$ такая, что $W \subset UH$. Имеем $\mathrm{cl}(Hx) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx)) \subset O$ (так как $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$ по лемме 2.2.1; $[x]_{\mathcal{U}_H} = \bigcap\{\mathrm{St}(x, \gamma_V) : V \in \mathcal{B}\}$; и из леммы 2.1.4 вытекает, что для $W \in \mathcal{B}$ существует $W' \in \mathcal{B}$ такое, что $\mathrm{St}(x, \gamma_{W'}) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$). Тем самым показано, что семейство $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$, $W \in \mathcal{B}$, образует базу $\mathrm{cl}(Hx)$ в X. □

Если H бикомпактная подгруппа G, то семейство $N_G(H)$ образует базу окрестностей H в G, и для G-пространства X множества $Hx \subset X$, $x \in X$, бикомпактны. Поэтому из леммы 2.2.2 имеем.

Следствие 2.2.2. *Пусть X — G пространство с d-открытым действием, H — бикомпактная подгруппа. Тогда для любой точки $x \in X$ характер множества Hx в X не превосходит характера H в G.*

Теорема 2.2.1. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — равномерная подгруппа G. Тогда для псевдоравномерности $\mathcal{U}_H$ на X имеем:*

(a) $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$*;*

(b) *факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_H)$ открыто.*

Если, дополнительно, $[x]_{\mathcal{U}_H}$ бикомпактно, $x \in X$, то равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_H$ открыто и совершенно (тем самым, пространства $X/E(\mathcal{U}_H)$ и $X/\mathcal{U}_H$ естественно гомеоморфны).

Доказательство. Выполнение условия (a) следует из леммы 2.2.1.

Для доказательства открытости факторотображения $p : X \to X/E(\mathcal{U}_H)$ достаточно проверить, что насыщение

$$\tilde{U} = \bigcup\{\mathrm{cl}(Hx) : \mathrm{cl}(Hx) \cap U \neq \emptyset, x \in X\}$$

любого открытого в X множества U относительно вводимого разбиения $E(\mathcal{U}_H)$ открыто. Легко видеть, что $\mathrm{cl}(Hx) \cap U \neq \emptyset$ в том и только том случае, если $Hx \cap U \neq \emptyset$. Поэтому, если $y \in \mathrm{cl}(Hx) \subset \tilde{U}$, то $\mathrm{cl}(Hy) \subset \tilde{U}$, и $Hy \cap U \neq \emptyset$. Тем самым, $y \in HU$, т.е. $\tilde{U} = HU$ открыто в X.

Для $x \in \tilde{U}$ имеем $\mathrm{cl}(Hx) \subset \tilde{U}$. Если $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$ бикомпактно, $x \in X$, то из непрерывности действия следует существование $O \in N_G(e)$ и окрестности W бикомпакта $\mathrm{cl}(Hx)$ таких, что $\mathrm{cl}(OW) \subset \tilde{U}$. Значит $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx)) \subset \tilde{U}$, где $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx)) \in \gamma_O$. По лемме 2.1.4 для VH такого, что $(VH)(VH)^{-1}(VH) \subset OH$ имеем $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx))$. Тем самым множество $\tilde{U}$ открыто в топологии, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{U}_H$. Остается сослаться на предложение 1.1.3.

Для доказательства замкнутости равномерно факторного отображения достаточно в случае, если $[x]_{\mathcal{U}_H} = \mathrm{cl}(Hx)$ бикомпактно, $x \in X$, в силу предложения 1.1.3, показать, что насыщение

$$\tilde{F} = \bigcup \{\mathrm{cl}(Hx) : \mathrm{cl}(Hx) \cap F \neq \emptyset, x \in X\}$$

любого замкнутого в X множества F относительно вводимого разбиения $E(\mathcal{U}_H)$ замкнуто в топологии, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{U}_H$. Для этого покажем, что замыкание $\bar{F}$ множества F в топологии, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{U}_H$, совпадает с $\tilde{F}$. Так как $x \in \bar{F}$ в том и только том случае, если для любого $u \in \mathcal{U}_H$ выполнено $\mathrm{St}(x, u) \cap F$, то $\tilde{F} \subset \bar{F}$. Пусть $x \in \bar{F}$, но $\mathrm{cl}(Hx) \cap F = \emptyset$. Из непрерывности действия следует существование $O \in N_G(e)$ и окрестности W бикомпакта $\mathrm{cl}(Hx)$ таких, что $\mathrm{cl}(OW) \cap F = \emptyset$. Значит $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx)) \cap F = \emptyset$, где $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx)) \in \gamma_O$. Тогда для VH такого, что $(VH)(VH)^{-1}(VH) \subset OH$ имеем $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \cap F = \emptyset$ (лемма 2.1.4), что означает $x \notin \bar{F}$. Полученное противоречие доказывает равенство $\tilde{F} = \bar{F}$.

Так как равномерно факторное отображение послойно бикомпактно, то оно совершенно. □

Следствие 2.2.3. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — бикомпактная подгруппа G. Тогда для псевдоравномерности*

$\mathcal{U}_H$ *на* X *факторпространство* $X/E(\mathcal{U}_H)$ *и равномерное факторпространство* $X/\mathcal{U}_H$ *естественно гомеоморфны и равномерно факторное отображение открыто и совершенно.*

Лемма 2.2.3. *Пусть* X *— пространство со слабо* d*-открытым действием группы* G*,* H *— ядро сюръективного гомоморфизма* $\varphi : G \to G'$*. Тогда для псевдоравномерности* $\mathcal{U}_{G'}$ *на* X*, базу которой образует семейство покрытий* $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(O)x)) : x \in X\}$*,* $O \in N_{G'}(e)$*, действие* G' *на равномерном факторпространстве* $X/\mathcal{U}_{G'}$ *непрерывно.*

Доказательство. По лемме 1.4.3 семейство $\varphi^{-1}(O)$, $O \in N_{G'}(e)$, удовлетворяет условиям (1) – (3) лемм 1.4.1 и 1.4.3. Поэтому на $X/\mathcal{U}_{G'}$ определено действие группы G и равномерно факторное отображение p эквивариантно по предложению 1.5.1. Легко видеть, что подгруппа H содержится в ядре действия G на $X/\mathcal{U}_{G'}$. Тем самым корректно определено действие факторгруппы G/H на $X/\mathcal{U}_{G'}$. Так как в определении действия группы на пространстве нет связи с топологией группы, то корректно определено действие группы G' на $X/\mathcal{U}_{G'}$.

Пусть W — открытое подмножество $X/\mathcal{U}_{G'}$, $x \in W$. По предложению 1.1.3 множество $p^{-1}W$ открыто в X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$, индуцированной псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{G'}$. Возьмем точку $y \in p^{-1}W$ такую, что $p(y) = x$. Существует $V \in N_{G'}(e)$ такой, что $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset p^{-1}W$, где $\gamma_V = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(V)x)) : x \in X\}$. Пусть $O \in N_{G'}(e)$ такой, что $(\varphi^{-1}O)^2 \subset \varphi^{-1}V$. Тогда $\varphi^{-1}(O)\mathrm{St}(x, \gamma_O) \subset \mathrm{St}(x, \gamma_V)$, т.е. для $O \in N_{G'}(e)$ и U — внутренности в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ множества $\mathrm{St}(x, \gamma_V)$, имеем $x \in U$ и $\varphi^{-1}(O)U \subset p^{-1}W$. Тем самым $Op(U) \subset W$ и $p(U)$ — окрестность x в $X/\mathcal{U}_{G'}$ по предложению 1.1.3. Доказано, что действие группы G' на $X/\mathcal{U}_{G'}$ непрерывно в точках $(e, x) \subset G' \times X/\mathcal{U}_{G'}$, $x \in X/\mathcal{U}_{G'}$. Значит оно непрерывно. □

Замечание 2.2.1. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ удовлетворяет условиям (1)—(3) лемм 1.4.1 и 1.4.3, и эквивариантное факторотображение $q : X \to X/E(\mathcal{U}_{\mathcal{O}})$ — d-открыто.

Действие G на $X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})$ d-открыто по предложению 2.1.5, и на $X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})$ определена псевдоравномерность $\mathcal{U}'_\mathcal{O}$, базу которой составляют покрытия

$$\{\mathrm{int}_{X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})}(\mathrm{cl}_{X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})}(Ox)) : x \in X\}, O \in \mathcal{O},$$

по предложению 2.2.1. Тогда равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_\mathcal{O}$ является равномерным факторпространством пространства $X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})$ по равномерности $\mathcal{U}'_\mathcal{O}$.

Действительно, пусть $O \in \mathcal{O}$, $x \in X$. Тогда

$$q(Ox) = Oq(x), q(\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Ox))) \subset \mathrm{cl}_{X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})}(Oq(x)).$$

Этого достаточно, чтобы отображение q было равномерно непрерывным. Значит псевдоравномерность $\mathcal{U}'_\mathcal{O}$ на факторможестве $X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})$ слабее фактор равномерности $\bar{\mathcal{U}_\mathcal{O}}$ на нем.

С другой стороны, для элемента $u \in \bar{\mathcal{U}_\mathcal{O}}$ пусть $v \in \bar{\mathcal{U}_\mathcal{O}}$ (покрытие равномерного факторпространства $X/\mathcal{U}_\mathcal{O}$) такой, что для любого $V \in v$ существует $U \in u$, для которого $\mathrm{cl}_{X/\mathcal{U}_\mathcal{O}} V \subset U$. Возьмем $O \in \mathcal{O}$ такое, что $p(\gamma_O) \succ v$. Тогда для любого $x \in X$ имеем $q(\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Ox)) \subset \mathrm{cl}_{X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})}(Oq(x)) \subset qp^{-1}(\mathrm{cl}_{X/\mathcal{U}_\mathcal{O}} V)$ для некоторого $V \in v$ (заметим, что множество $qp^{-1}(\mathrm{cl}_{X/\mathcal{U}_\mathcal{O}} V)$ замкнуто в $X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})$). Тем самым элемент $\{\mathrm{int}_{X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})}\mathrm{cl}_{X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})}(Oq(x)) : x \in X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})\} \in \mathcal{U}'_\mathcal{O}$ вписан в прообраз $qp^{-1}u$. Значит псевдоравномерость $\mathcal{U}'_\mathcal{O}$ совпадает с фактор равномерностью $\bar{\mathcal{U}_\mathcal{O}}$ на подмножестве $X/E(\mathcal{U}_\mathcal{O})$.

Замечание 2.2.2. Если X — G-пространство с d-открытым действием, то оригинальное определение инфраметризуемости равномерного пространства $(X,\mathcal{U}_G)$ (в терминах равномерностей) [103, Определение 11.13] следующее. Существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (1) и (2) леммы 1.4.1, такое, что для любого $V \in N_G(e)$ существует $O \in \mathcal{O}$ и для любой точки $x \in X$ существует конечное множество точек $t_i(x) \in X$, $i = 1,\dots,k(x)$, для которых выполнено условие $\bigcup\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vt_i(x))) : i = 1,\dots,k(x)\} \supset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$.

В случае топологических групп определение инфраметризуемости упрощается. Группа G — инфраметризуема, если существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (1) и (2) леммы 1.4.1, такое, что для любого $V \in N_G(e)$ существуют $O \in \mathcal{O}$ и конечное число элементов $g_i \in G$, $i = 1, \ldots, k$, для которых выполнено условие $\bigcup\{Vg_i : i = 1, \ldots, k\} \supset O$.

Легко показать, что для d-открытого действия инфраметризуемой группы на пространстве X равномерное пространство $(X, \mathcal{U}_G)$ инфраметризуемо. Доказательство следует из очевидного включения $\bigcup\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vt_i(x))) : i = 1, \ldots, k\} \supset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$, если $\bigcup\{Vg_i : i = 1, \ldots, k\} \supset O$, и $t_i(x) = g_i x$, $i = 1, \ldots, k$.

Лемма 2.2.4. *Пусть $f : X \to \mathbb{I}$ — G-равномерная функция на G-пространстве X со слабо d-открытым действием; счетное семейство $\mathcal{O} = \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ таково, что $|f(x) - f(gx)| < 1/n$ для любых $x \in X$, $g \in O_n$, $n \in \mathbb{N}$, причем $O_n = O_n^{-1}$ и $O_{n+1}^2 \subset O_n$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда f равномерно непрерывна относительно псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, определяемой в* предложении 2.2.1.

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $|f(x) - f(gx)| < 1/3n$ для любых $x \in X$, $g \in O_{3n}$. Поэтому, если $x, y \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(O_{3n}z))$ для некоторого $z \in X$, то $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| \leq 1/3n + 1/3n < 1/n$ (второе нестрогое неравенство следует из непрерывности f и всюду плотности $O_{3n}z$ в $\mathrm{cl}(O_{3n}z)$. Тем самым равномерная непрерывность доказана. □

Предложение 2.2.2. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием $\aleph_0$-уравновешенной группы. Тогда для любых $T \subset G$ и открытого подмножества $W \subset X$ существует открытое в X подмножество $\emptyset \neq W' \subset W$ такое, что семейство $\{gW' : g \in T\}$ является нормальным покрытием своего тела $\bigcup\{gW' : g \in T\}$.*

Доказательство. Так как из результатов § 3.5 будет следовать, что пространство X является G-тихоновским, то положим $\emptyset \neq W' = f^{-1}(0, 1] \subset W$, где f — G-равномерная функция. Для доказательства предложение достаточно найти метризуемое пространство M и отображения $\psi : X \to M$ и

$f_g : M \to I$ такие, что $f_g \circ \psi = gf$ (см., например, [46, Упражнение 5.4.H.(c)]), $g \in T$.

По лемме 1.5.5 существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям (1) — (3) лемм 1.4.1 и 1.4.3, такое, что для любых $\epsilon > 0$ и $g \in G$ существует $O \in \mathcal{O}$, для которого $|(gf)(x) - (gf)(hx)| < \epsilon$ для любых $h \in O$, $x \in X$. Вес семейства $\mathcal{O}$ счетен, поэтому вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$, определяемой в предложении 2.2.1, также счетен и можно считать, что она порождена псевдометрикой ρ. По замечанию 1.1.4 определено непрерывное отображение $\psi : X \to X/\rho$ в метрическое пространство с метрикой $\bar{\rho}$.

Легко проверить, что если $\rho(x, y) = 0$, то $gf(x) = gf(y)$ для любого $g \in G$. Поэтому для любого $g \in T$ определены функции $f_g : X/\rho \to I$ ($f_g([x]_{E(\rho)}) = f(x)$), и $f_g \circ \psi = gf$.

Из леммы 2.2.4 следует, что для любых $\epsilon > 0$ и $g \in G$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\rho(x, y) < \delta$, то $|gf(x) - gf(y)| < \epsilon$. Значит функции $f_g : X/\rho \to I$, $g \in T$, (равномерно) непрерывны. $\square$

2.3 Вполне ограниченные действий

Определение 2.3.1. Действие на пространстве X назовем *вполне ограниченным*, если для любого непустого открытого множества $W \subset X$ семейство $\{gW : g \in G\}$ является покрытием пространства X, из которого можно выбрать конечное подпокрытие.

Замечание 2.3.1. Если действие на пространстве X вполне ограничено, то орбита любой точки пространства X всюду плотна в нем.

Непрерывное d-открытое действие на бикомпактном пространстве, имеющее одну компоненту, вполне ограничено.

Действие на эквивариантном образе пространства с вполне ограниченным действием вполне ограничено.

Определение 2.3.2. d-Открытое действие назовем *равномерно локально G-равномерным*, если для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такое, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux принадлежит семейству $\mathcal{U}_G|_{Ux}$.

Замечание 2.3.2. Непрерывное d-открытое действие на бикомпактном пространстве является равномерно локально G-равномерным (в силу предложения 2.1.2 и единственной равномерности на бикомпакте).

Действие группы подобных отображений отрезка I в компактно-открытой топологии ($\equiv$топологии равномерной сходимости) на инвариантом подмножестве — интервале $(0,1)$ является открытым, но не равномерно локально G-равномерным действием по следствиям 3.5.2 и 3.5.3.

Действие абелевой не вполне ограниченной группы на себе левыми сдвигами является примером G-пространства с открытым действием, которое равномерно локально G-равномерно, но не вполне ограничено.

Предложение 2.3.1. *Пусть X — G-пространство с вполне ограниченным d-открытым действием группы G и $f : X \to Y$ — эквивариантное отображение на пространство Y с действием группы G. Тогда отображение f — d-открыто, и действие G на Y d-открыто и вполне ограничено.*

Доказательство. Согласно предложению 2.1.5 и замечанию 2.3.1 достаточно доказать, что действие на пространстве Y d-открыто.

Пусть $y \in Y$, $O \in N_G(e)$. Возьмем произвольную точку $x \in f^{-1}y$, и $V \in N_G(e)$ такую, что $V = V^{-1}$, $V^2 \subset O$. В силу полной ограниченности и d-открытости действия на X из покрытия $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in G\}$ пространства X можно выбрать конечное подпокрытие $\{g_i\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : i = 1, \ldots, n\}$. Тогда $\{f(g_i(\mathrm{cl}(Vx))) = g_i f(\mathrm{cl}(Vx)) : i = 1, \ldots, n\}$ — конечное покрытие пространства Y. Существует $j \leq n$ такое, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(g_j f(\mathrm{cl}(Vx)))) \neq \emptyset$ (иначе семейство множеств $g_i f(\mathrm{cl}(Vx)) : i = 1, \ldots, n\}$ не покрывало бы Y, т.к. каждое из них было бы нигде не плотно в Y). Так как g_j гомеоморфизм пространства Y (поэтому $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(g_j f(\mathrm{cl}(Vx)))) = g_j\mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(Vx))))$), то и

$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(f(\mathrm{cl}(Vx)))) \neq \emptyset$. В силу эквивариантности и непрерывности отображения f имеем $f(\mathrm{cl}(Vx)) \subset \mathrm{cl}(Vy)$. Поэтому $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy)) \neq \emptyset$. Так как Vy всюду плотно в $\mathrm{cl}(Vy)$, то существует $h \in V$ такой, что $hy \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy))$. Тогда $y \in h^{-1}\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vy)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(h^{-1}Vy)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(V^2y)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oy))$. Тем самым доказана d-открытость действия на Y. $\square$

Лемма 2.3.1. *Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием $\aleph_0$-уравновешенной группы. Тогда действие равномерно локально G-равномерно.*

Доказательство. В силу псевдокомпактности X у действия конечное число компонент. Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что она одна.

По лемме 2.1.5 для $U \in N_G(e)$ такого, что $U^{-1} = U$, $U^2 \subset O$ имеем $\mathrm{cl}(Ux) \subset \bigcup\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\}$ для любых $x \in X$, $V \in N_G(e)$. Так как из результатов § 3.5 будет следовать, что пространство X — G-тихоновское, то существуют $V' \in N_G(e)$ и G-равномерная функция f такие, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V'x)) \subset W = f^{-1}(1/2, 1] \subset f^{-1}(0, 1] \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx))$.

Из предложения 2.2.2 следует, что семейство $\{gW : g \in O\}$ является нормальным покрытием $\mathrm{cl}(Ux)$. Множество $\mathrm{cl}(Ux)$ является канонически замкнутым ($Ux \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ux)) \subset \mathrm{cl}(Ux)$) и, поэтому, псевдокомпактным. Значит из его покрытия $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V'x)) : g \in O\}$ можно выбрать конечное покрытие. Пусть элементы $g_i \in O$, $i = 1, \ldots, k$, таковы, что

$$Ux \subset \bigcup\{g_i\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V'x)) : i = 1, \ldots, k\} = \bigcup\{g_i(f^{-1}(1/2, 1]) : i = 1, \ldots, k\}.$$

Покажем, что оно является элементом $\mathcal{U}_{N_G(e)}$.

Так как $g(f^{-1}(1/2, 1]) = (gf)^{-1}(1/2, 1]$, для любых $g \in G$, и g_if – G-равномерные отображения, $i = 1, \ldots, k$, то существует элемент $V'' \in N_G(e)$ такой, что $|(g_if)(hx) - (g_if)(x)| < 1/3$ для любых точек $x \in X$, элементов $h \in V$ и индексов $i = 1, \ldots, k$. Тем самым покрытие $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(V''y)) : y \in X\} \wedge Ux$ вписано в покрытие $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$.

Очевидно, что $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ux)) : x \in X\} \in \mathcal{U}_{N_G(e)}$. $\square$

Следствие 2.3.1. *d-Открытое действие $\aleph_0$-уравновешенной группы, имеющее одну компоненту, на псевдокомпактном G-пространстве является вполне ограниченным.*

Замечание 2.3.3. В [18, Определение 2] введено понятие *равномерно локально вполне ограниченного действия.* Оно всегда d-открыто. Используя лемму 7 из [18], можно дать эквивалентное определение этого понятия.

Действие равномерно локально вполне ограничено, если оно d-открыто и для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует элемент $U \in N_G(e)$ такой, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ из покрытия $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux можно выбрать конечное подпокрытие.

Из доказательства леммы 2.3.1 следует, что равномерно локально вполне ограниченное действие равномерно локально G-равномерно.

2.4 Транзитивность и "d-открытость"действий

Пример 2.4.1. Пример транзитивного непрерывного, d-открытого, но не открытого действия на компакте.

Окружность S (комплексные числа вида $e^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbb{R}$, с естественными операцией умножения и топологией τ) является компактной абелевой топологической группой. Через Q обозначим ее счетную (не замкнутую) подгруппу $\{e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{Q}\}$. В § 1.4 отмечено, что на S корректно определена новая топология $\tau_{\{Q\}}$, чью предбазу составляют множества из τ и tQ, $t \in S$. Положим $S_{\{Q\}} = (S, \tau_{\{Q\}})$. Так как $\tau \subset \tau_{\{Q\}}$, то действие $S_{\{Q\}}$ на S непрерывно. Оно также d-открыто в силу того, что Q всюду плотно в S, и $\tau \wedge Q = \tau_{\{Q\}} \wedge Q$ (см. лемму 2.1.6). Определенное действие не открыто, так как $S_{\{Q\}}$ не гомеоморфно S.

В [93, Следствие 4.3] Я. ван Миллом построен пример однородного польского пространства Z, не являющегося алгебраически однородным. Напомним, что Z является подмножеством компакта $X = C \times I$, где C – канторово множество. Обозначим через $\mathcal{K}$ подгруппу $\mathcal{H}_{co}(X)$, для действия которой на X подмножество $C \times \{0\}$ инвариантно. Тогда действие группы $G = \{g \in \mathcal{K} : g(Z) = Z\}$ на Z имеет две орбиты: $Y = \bigcup\{\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d)) : d \in D\}$ (где D счетное всюду плотное подмножество C), являющуюся множеством первой категории, и $(C \setminus D) \times (0, 1)$, являющуюся польским пространством [93, Теорема 4.1]. Легко видеть, что счетное семейство $\mathcal{G}$ замкнутых подгрупп

$$G_d = \{g \in G : g(\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))) = \{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))\}, d \in D,$$

насыщено относительно сопряжения. Значит на G корректно определена топология $\tau_{\mathcal{G}}$. В [93, Теорема 6.8] доказано, что $G_{\mathcal{G}} = (G, \tau_{\mathcal{G}})$ является польской группой (см. критерий польскости), транзитивно действующей на Y.

Предложение 2.4.1. *Действие группы $G_{\mathcal{G}}$ на Y непрерывно, слабо d-открыто, но не d-открыто. Тем самым возможно транзитивное непрерывное, слабо d-открытое, но не d-открытое действие польской группы на метризуемом пространстве.*

Доказательство. Непрерывность действия очевидна. Легко заметить, что для любой точки $x = (d, t) \in Y$ имеем $\operatorname{int}(\operatorname{cl}(G_d x)) = \emptyset$. Поэтому действие $G_{\mathcal{G}}$ на Y не d-открыто. Для доказательства этого факта можно также использовать следствие 2.4.1 (где утверждается, что d-открытое действие польской группы открыто) и теорему Хаусдорфа [71] (о том, что метризуемый образ полного метрического пространства при открытом отображении полон).

Для доказательства слабой d-открытости возьмем произвольную окрестность $O' \in N_{G_{\mathcal{G}}}(e)$. Она имеет вид $O \cap \bigcap\{G_{d_i} : i = 1, \ldots, k\}$, где $O \in N_G(e)$. Так как G подгруппа $\mathcal{H}_{co}(X)$, то для метрики ρ на компакте X можно считать, что $O = \{g \in G : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \epsilon\}$ для некоторого $\epsilon > 0$.

Пространство $Y = \bigcup\{\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d)) : d \in D\}$ удовлетворяет следующему свойству [93, §3, свойство (4)]:

(4) для любых $\delta > 0$ и точек $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in X$, $x_1 = y_1$, $x_2 < y_2$,

существует точка $d \in \text{dom}\ \phi = \text{dom}\ \phi'$ такая, что

$$\rho(x, (d, \phi(d))) < \delta, \rho(y, (d, \phi'(d))) < \delta.$$

Приведенное свойство позволяет для любой точки $a \in Y$ и ее $\epsilon/4$ окрестности W найти точку $d \in D$ такую, что $\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d)) \subset W$.

Аналогично для любой точки $z \in W$ и любой ее окрестности $W' \subset W$ существует точка $d(z) \in D$ такая, что $\{d(z)\} \times (\phi(d(z)), \phi'(d(z))) \subset W'$. Для точек $x = (d, \phi(d)), y = (d, \phi'(d))$ и $x(z) = (d(z), \phi(d(z))), y(z) = (d(z), \phi'(d(z)))$ имеем $\rho(x, x(z)) < \epsilon/2$ и $\rho(y, y(z)) < \epsilon/2$. Можем считать, что $d, d(z) \notin \bigcup\{d_i : i = 1, \ldots, k\}$.

По лемме 3.1 из [93] существует гомеоморфизм $g_1 \in \mathcal{K}$ такой, что $g_1(x) = x(z)$, $g_1(y) = y(z)$, $g_1 \in \{g \in \mathcal{K} : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \epsilon/2\}$, и g_1 тождественен на дополнении до открыто-замкнутого подмножества C', которое не содержит множество $\bigcup\{d_i : i = 1, \ldots, k\}$. Так как C' гомеоморфно C и $Y \cap (C' \times I)$ удовлетворяет тем же свойствам (1)–(4) из [93, §3], что и Y, то, не ограничивая общности рассуждений, считаем $C' = C$, $Y = Y \cap (C' \times I)$. Тогда $O' = O \in N_G(e)$.

По утверждению (1) леммы 3.4 [93]

$$g_1(Y) = \bigcup\{\{d'\} \times (\mu(d'), \mu'(d')) : d' \in D'\},$$

где $D' = \text{dom}\ (\mu) = \text{dom}\ (\mu')$ – счетное всюду плотное подмножество C, и множество $g_1(Y)$ удовлетворяет свойствам (1)–(4) из [93, §3]. Положим $Y' = \bigcup\{\{d'\} \times (\mu(d'), \mu'(d')) : d' \in D' \setminus \{d(z)\}\}$. Оно также удовлетворяет свойствам (1)–(4) из [93, §3]. По предложению 3.3 из [93] существует гомеоморфизм $g_2 \in \mathcal{K}$ такой, что g_2 тождественен на $(\{d(z)\} \times I)$, $g_2(Y') = Y \setminus (\{d(z)\} \times I)$ (заметим, что $Y \setminus (\{d(z)\} \times I)$ удовлетворяет свойствам (1)–(4) из [93, §3]), и $g_2 \in \{g \in \mathcal{K} : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \epsilon/2\}$. Ясно, что

$$g = g_2 \circ g_1 \in O = G \cap \{g \in \mathcal{K} : \sup\{\rho(gx, x) : x \in X\} < \epsilon\},$$

$g(Z) = Z$ и

$$g(\{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))) = \{d(z)\} \times (\phi(d(z)), \phi'(d(z))).$$

Приведенное рассуждение показывает, что для любой точки $p \in \{d\} \times (\phi(d), \phi'(d))$ множество $Op \cap W$ всюду плотно в W. Тем самым $a \in W \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Op))$, что доказывает слабую d-открытость действия. $\square$

Замечание 2.4.1. При доказательстве предложения 2.4.1 усилено утверждение (3) леммы 3.4 из [93]: для "близких слоев" можно найти гомеоморфизм близкий к тождественному, отображающий один слой на другой.

Так как топология группы G в предложении 2.4.1 слабее топологии группы $G_{\mathcal{G}}$, то ее действие на пространстве Y также слабо d-открыто.

Несмотря на различие типов "d-открытости" транзитивных действий, в некоторых случаях d-открытость действия эквивалентна его открытости. Следующая теорема мотивированы леммой 4 из [47], [103, Гл. 3, Упражнение 17] и работой [89]. Несмотря на простоту, именно она является источником приводимых ниже следствий.

Теорема 2.4.1. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием и существует база $\mathcal{B}$ в единице группы такая, что для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in \mathcal{B}$ множество Ox является множеством второй категории, и множество* $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \setminus Ox$ *является множеством первой категории. Тогда действие открыто.*

Доказательство. Для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_G(e)$ возьмем элемент $W \in \mathcal{B}$ такой, что $W^{-1}W \subset O$. Очевидно, что $x \in W^{-1}\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$ и множество $W^{-1}\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$ открыто. Для завершения доказательства остается показать, что $W^{-1}\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx)) \subset Ox$.

Пусть $z \in W^{-1}\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$. Тогда $Wz \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx)) \neq \emptyset$ и существуют $z' \in Wz \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$ и $O' \in \mathcal{B}$ такие, что $O'z' \subset Wz \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$. Так как $O'z'$ является множеством второй категории, то множество $Wz \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Wx))$ также является множеством второй категории. Тем самым $Wz \cap Wx \neq \emptyset$ и $z \in W^{-1}Wx \subset Ox$. $\square$

Замечание 2.4.2. В теореме 2.4.1 условие того, что для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in \mathcal{B}$ множество Ox является множеством второй категории эквивалентно условию, что множество $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$ является множеством второй категории.

Напомним, что тихоновское пространство называется *почти полным по Чеху*, если оно содержит всюду плотное полное по Чеху подпространство.

Теорема 2.4.2. *Пусть у непрерывного, d-открытого действия $\alpha : G \times X \to X$ для любого $x \in X$ пространство левых смежных классов G/G_x почти полно по Чеху. Тогда действие открыто.*

В частности, непрерывное, d-открытое действие полной по Чеху группы открыто.

Доказательство. Для любых $x \in X$ и $O \in N_G(e)$ множество Ox является множеством второй категории. Действительно, в противном случае открытое множество $\pi(O) \in G/G_x$, где $\pi : G \to G/G_x$ факторотображение, было бы множеством первой категории в пространстве со свойством Бэра (как прообраз Ox при инъективном отображении), что невозможно.

Так как G/G_x почти полно по Чеху, то существует его всюду плотное полное по Чеху подмножество A. Отображение $h_x : G/G_x \to X$, определенное как $h_x(t) = \alpha_x(\pi^{-1}(t))$ является d-открытым и инъективным. Его сужение $h_x|_A$ на A и $h_x(A)$ взаимно однозначно и d-открыто по предложению 1.0.1. По [58, Следствие 1] отображение $h_x|_A$ является гомеоморфизмом. Тем самым $h_x(A)$ всюду плотное полное по Чеху подмножество $\mathrm{cl}_X(Gx)$, которое в свою очередь является открыто-замкнутым подмножеством X. Поэтому $h_x(A)$ всюду плотное G_δ-подмножество $\mathrm{cl}_X(Gx)$, и множество $\mathrm{cl}_X(Gx) \setminus h_x(A)$ является множеством первой категории.

Для любого элемента $O \in N_G(e)$ имеем $Ox \cap h_x(A) = (O \cap \pi^{-1}A)x$. Так как множество $(O \cap \pi^{-1}A)x$ гомеоморфно $\pi O \cap A$, то оно открыто в $h_x(A)$. Тем самым множество

$$\mathrm{int}_{h_x(A)}(\mathrm{cl}_{h_x(A)}((O \cap \pi^{-1}A)x)) \setminus (O \cap \pi^{-1}A)x$$

является множеством первой категории в $h_x(A)$ и, значит, в X.

Так как

$$\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \cap h_x(A) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}((O \cap \pi^{-1}A)x)) \cap h_x(A) =$$

(по лемме 1.0.1)

$$= \mathrm{int}_{h_x(A)}(\mathrm{cl}_{h_x(A)}((O \cap \pi^{-1}A)x))$$

и $Ox \cap h_x(A) = (O \cap \pi^{-1}A)x$ открыто в $h_x(A)$, то множество $(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \setminus Ox) \cap h_x(A)$ является множеством первой категории.

Из выше изложенного следует, что множество $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \setminus Ox$ является множеством первой категории. Для завершения доказательства остается сослаться на теорему 2.4.1.

Доказательство последнего утверждения следует из [56, Теорема 2], где доказано, что пространство левых смежных классов полной по Чеху группы полно по Чеху. $\square$

Так как польское пространство полно по Чеху, то из теоремы 2.4.2 вытекает следующий результат Ф. Анцеля.

Следствие 2.4.1 (см. [47])**.** *Любое непрерывное, d-открытое действие польской группы открыто.*

Замечание 2.4.3. В утверждении 2 теоремы 1.1 [89] фактически доказывается, что d-открытость действия эквивалентна более слабому условию в случае, когда для любого $x \in X$ пространство G/G_x почти полно по Чеху. Теорема 2.4.2 показывает, что условие транзитивности действия в теореме 1.1 из [89] необходимо лишь для наличия одной компоненты действия.

Напомним, что подмножество Z в пространстве X называется *приближаемым*, если существует открытое множество O такое, что каждое из множеств $O \cap (X \setminus Z)$ и $Z \cap (X \setminus O)$ является множеством первой категории в X [8, Гл. IX, §5, Упражнение 6].

Лемма 2.4.1. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием и существует база $\mathcal{B}$ в единице группы такая, что для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in \mathcal{B}$ множество Ox является множеством второй категории. Тогда для любых $x \in X$ и $O \in \mathcal{B}$ следующие условия эквивалентны:*

(a) множество $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \setminus Ox$ *является множеством первой категории;*

(b) множество Ox приближаемо.

Доказательство. Так как для любых $x \in X$ и $O \in \mathcal{B}$ выполнено включение $Ox \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$, то импликация (a)$\Longrightarrow$(b) очевидна.

Пусть $x \in X$ и $O \in \mathcal{B}$ произвольные. Если множество Ox приближаемо, то существует открытое множество W такое, что множества $W \setminus Ox$ и $Ox \setminus W$ являются множествами первой категории. Из условий леммы, учитывая непрерывность действия, имеем $\mathrm{cl}Ox = \mathrm{cl}W$. Тем самым $Ox \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}Ox) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}W)$. Так как множество $\mathrm{int}(\mathrm{cl}W) \setminus W$ является множеством первой категории, то и множество $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \setminus Ox$ является множеством первой категории. Импликация (b)$\Longrightarrow$(a) доказана. □

Замечание 2.4.4. Метод доказательства леммы 3 из [47] и лемма 2.4.1 позволяют сводить доказательство следствия 1.4 из [89] к следствию теоремы 2.4.2.

Глава 3

G-расширения

3.1 Общий (равномерный) критерий продолжения действий

Важными инструментами в вопросах продолжения действий на расширения пространств являются *Теорема о продолжении* [8, Гл. II] и *Принцип продолжения тождеств* [8, Гл. I, §8, Следствие 1].

Теорема о продолжении. Пусть X и Y всюду плотные подмножества полных пространств $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ соответственно. Непрерывное отображение $F : X \times Y \to Z$ в полное равномерное пространство Z продолжаемо до непрерывного отображения $\tilde{F} : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to Z$ в том и только том случае, если для любой точки $(x, y) \in \tilde{X} \times \tilde{Y}$ образ при F следа $N_x(\tilde{X})|_X \times N_y(\tilde{Y})|_Y$ на $X \times Y$ фильтра окрестностей $N_x(\tilde{X}) \times N_y(\tilde{Y})$ точки (x, y) в $\tilde{X} \times \tilde{Y}$ является базисом фильтра Коши в Z.

Принцип продолжения тождеств. Пусть $f, g : X \to Y$ — непрерывные отображения. Если подмножество $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ всюду плотно в X, то тогда $f = g$.

Из принципа продолжения тождеств следует, что если для действия $\alpha : G \times X \to X$ определено непрерывное продолжение $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$, где $\tilde{G}$ является топологической группой, то тогда $\tilde{\alpha}$ является действием. Действительно, для единицы группы $e \in G$ выполнение тождества $\tilde{\alpha}(e, x) = x$ для любой точки $x \in X$ является очевидным следствием сформулированного принципа. Пусть $g = h_1 h_2$ для $g, h_1, h_2 \in \tilde{G}$. Тогда отображения $F_j : \tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$,

$j = 1, 2$, где

$$F_1(h_1, h_2, x) = \tilde{\alpha}(h_1, \tilde{\alpha}(h_2, x)) \text{ и } F_2(h_1, h_2, x) = \tilde{\alpha}(g, x)$$

совпадают на всюду плотном подмножестве $G \times G \times X$ произведения $\tilde{G} \times \tilde{G} \times \tilde{X}$. Тем самым $F_1 = F_2$.

Теорема 3.1.1. *Пусть $\tilde{X}$ является полным по Дьедонне расширением G-пространства X.*

(A) *Пространство $\tilde{X}$ является G-расширением в том и только том случае, если для любой равномерности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(\tilde{X})$ выполнено условие:*

  (F) *для любого фильтра Коши $\mathcal{F}$ в X и любого элемента $g \in G$ семейство $\{OF : O \in N_G(g), F \in \mathcal{F}\}$ является базисом фильтра Коши в X.*

(B) *Если, дополнительно, $\mathcal{G}$ — равномерность на G, пополнение по которой является группой $\tilde{G}$, то тогда действие продолжается до действия $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ в том и только том случае, если*

  (FF) *для любых фильтров Коши $\mathcal{F}$ в X и $\mathcal{T}$ в G семейство $\{TF : T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}\}$ является базисом фильтра Коши в X.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\tilde{\mathcal{U}}$ — продолжение равномерности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(\tilde{X})$ на $\tilde{X}$. Каждый минимальный фильтр Коши в X (соответственно в G) является следом на X (соответственно на G) фильтра окрестностей в $\tilde{X}$ (соответственно в $\tilde{G}$).

Так как $\tilde{X}$ — G-расширение X (соответственно существует продолжение $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$), то из теоремы о продолжении следует, что для любого минимального фильтра Коши $\mathcal{F}$ в X и любого $g \in G$ (соответственно минимального фильтра Коши $\mathcal{T}$ в G) семейство $\{OF : O \in N_G(g), F \in \mathcal{F}\}$ (соответственно $\{TF : T \in \mathcal{T}, F \in \mathcal{F}\}$) является базисом фильтра Коши в X. Значит условие (F) (соответственно (FF)) выполнено.

Достаточность. То, что продолжение $\tilde{\alpha} : G \times \tilde{X} \to \tilde{X}$ (соответственно $\tilde{\alpha} : \tilde{G} \times \tilde{X} \to \tilde{X}$) корректно определено и непрерывно следует из теоремы о продолжении и принципа продолжения тождеств. □

Замечание 3.1.1. Если $\tilde{X}$ — полное по Дьедонне расширение G-пространства X, то тогда $\tilde{X}$ является G-пространством в том и только том случае, если для любой равномерности $\mathcal{U} \in \mathcal{U}(\tilde{X})$ на X выполнено условие:

(1) для любого фильтра Коши $\mathcal{F}$ в X и любого элемента $g \in G$ семейство $\{gF : F \in \mathcal{F}\}$ является базисом фильтра Коши в X;

(2) для любого фильтра Коши $\mathcal{F}$ в X семейство $\{OF : O \in N_G(e), F \in \mathcal{F}\}$ является базисом $\mathcal{F}$ в X.

Следствие 3.1.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между полными по Дьедонне G-расширениями $\tilde{X}$ пространства X и классами равномерностей $\mathcal{U}(\tilde{X})$, каждый представитель которого удовлетворяет условию* (F). *Кроме того, максимальные элементы $\mathcal{U}_{max}(\tilde{X})$, удовлетворяющие условию* (F), *насыщенны.*

Доказательство. Лишь заключительное утверждение нуждается в пояснении. В самом деле, максимальный элемент $\mathcal{U}_{max}(\tilde{X})$ — ограничение на X максимальной равномерности на $\tilde{X}$, которая насыщенна. □

Предложение 3.1.1. *Пусть на G-пространстве X даны равномерности $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ такие, что:*

(a) *$\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ вложено $\tilde{X}^{\mathcal{V}}$,*

(b) *$\mathcal{U}$ насыщенна,*

(c) *$\tilde{X}^{\mathcal{V}}$ – G-расширение X.*

Тогда $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ – G-пространство.

Доказательство. Так как отображение $\alpha^g : X \to X$ равномерно непрерывно относительно равномерности $\mathcal{U}$, то оно продолжается до отображения $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ в $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$, $g \in G$. Тем самым, подмножество $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ пространства $\tilde{X}^{\mathcal{V}}$ инвариантно. Остается заметить, что сужение непрерывного действия на инвариантное подмножество непрерывно. $\square$

Лемма 3.1.1. *Если предкомпактные рефлексии равномерностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ на X совпадают и $\mathcal{U} \geq \mathcal{V}$, то тогда $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ вложимо в $\tilde{X}^{\mathcal{V}}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{U}_s$ — предкомпактная рефлексия $\mathcal{U}$ (или $\mathcal{V}$). Покажем, что $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ вложимо в $\tilde{X}^{\mathcal{U}_s}$.

Очевидно, что X вложимо в $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Пусть $\tilde{\mathcal{U}}$ — продолжение $\mathcal{U}$ на $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Тогда предкомпактная рефлексия $\tilde{\mathcal{U}}$ совпадает с равномерностью $\tilde{\mathcal{U}}_s$, являющейся продолжением $\mathcal{U}_s$ на $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Тем самым, бикомпактификация Самюэля X_s пространства $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ относительно $\tilde{\mathcal{U}}$ является бикомпактификацией Самюэля X относительно $\mathcal{U}$. Значит $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ вложимо в X_s. Пусть $i_{\mathcal{U}}$ — инъекция $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ в X_s.

Используя аналогичные аргументы, можно показать, что $\tilde{X}^{\mathcal{V}}$ вложимо в X_s. Пусть $i_{\mathcal{V}}$ — инъекция $\tilde{X}^{\mathcal{V}}$ в X_s. Так как $\mathcal{U} > \mathcal{V}$, то существует равномерно непрерывное отображение $h : \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{V}}$. Очевидно, что $i_{\mathcal{U}} = i_{\mathcal{V}} \circ h$. Значит h — вложение. $\square$

Из леммы 3.1.1 следует.

Предложение 3.1.2.

$$\mu X = \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mu} \subset \cdots \subset \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}} \subset \cdots \subset \tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_1}} \subset \cdots \subset \nu X = \tilde{X}^{\mathcal{U}_\nu} \subset \beta X = \tilde{X}^{\mathcal{U}_\beta}$$

для $\infty \geq \mathfrak{m} \geq \mathfrak{m}_1 \geq \aleph_0$.

Замечание 3.1.2. Если X — G-пространство, то тогда равномерность $\mathcal{U}_\mathfrak{m}$ насыщенна, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$.

Из предложений 3.1.1 и 3.1.2 следует.

Следствие 3.1.2. *Пусть X — G-пространство.*

(a) *Если* $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}}$ *— G-расширение X, то тогда* $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_1}}$ *также G-расширение X для* $\mathfrak{m}_1 \geq \mathfrak{m}$.

(b) *В частности, если βX — G-бикомпактификация X, то тогда νX — G-расширение X;*

если νX — G-расширение X, то тогда μX — G-расширение X.

Лемма 3.1.2. *Пусть Y и Z — G-пространства, X — всюду плотное подмножество Y, H — всюду плотная подгруппа G и отображение $f : Y \to Z$ таково, что $f(hx) = hf(x)$ для любых $x \in X, h \in H$. Тогда f является эквивариантным отображением G-пространств.*

Доказательство. Отображения $F(g, y) = f(gy)$ и $G(g, y) = gf(y)$ $g \in G, y \in Y$ являются непрерывными отображениями пространства $G \times Y$ в Z, совпадающими на всюду плотном подмножестве $H \times X$. По принципу продолжения тождеств они совпадают. Значит f — эквивариантное отображение. $\square$

3.2 Топология произведения $G \times X$ и существование G-расширений

Открытое подмножество $U \times V$ произведения $X \times Y$ называется *функционально открытым прямоугольником*, если U и V являются функционально открытыми подмножествами X и Y соответственно.

Определение 3.2.1. Произведение $X \times Y$ называется $\mathfrak{m}$-*прямоугольным*, если для любого покрытия $u \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(X \times Y)$ (покрытия из равномерности $\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}$ пространства $X \times Y$) существует σ-локально конечное покрытие $v \in \mathcal{U}_{\mathfrak{m}}(\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}} \times \tilde{Y}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}}})$ мощности $\leq \mathfrak{m}$, состоящее из функционально открытых прямоугольников такое, что $v \wedge (X \times Y) \succ u$, $\mathfrak{m} = 0, \aleph_0, \ldots, \infty$ (под мощностью ≤ 0 подразумеваем "конечное" , и $\leq \infty$ означает, что ограничение на мощность отсутствует).

- (З. Фролик [67], [120, Гл. 8, 8.14]) Отображение $f \in C^*(X \times Y)$ удовлетворяет *условию прямоугольности*, если для любого $\epsilon > 0$ существует такое конечное покрытие w произведения $X \times Y$ функционально открытыми прямоугольниками, что $\mathrm{osc}_W f < \epsilon$ для любого $W \in w$. Произведение удовлетворяет *условию прямоугольности*, если каждое отображение $f \in C^*(X \times Y)$ удовлетворяет условию прямоугольности.

- (А. Чигогидзе [60]) Произведение $X \times Y$ *сильно прямоугольно*, если в любое счетное нормальное покрытие $X \times Y$ можно вписать счетное покрытие из функционально открытых прямоугольников.

- (Б. Пасынков [27]) Произведение $X \times Y$ *прямоугольно*, если в любое нормальное покрытие $X \times Y$ можно вписать σ-локально конечное покрытие из функционально открытых прямоугольников.

Условия прямоугольности, сильной прямоугольности и прямоугольности совпадают с 0-прямоугольностью, $\aleph_0$-прямоугольностью и ∞-прямоугольностью соответственно.

Теорема 3.2.1. *Если произведение $G \times X$ — $\mathfrak{m}$-прямоугольно, то тогда любое непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ имеет непрерывное продолжение на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}}$.*

Доказательство. Если произведение $G \times X$ — $\mathfrak{m}$-прямоугольно, то тогда $\widetilde{G \times X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}(G\times X)} = \tilde{G}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}(G)} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}(X)}$, так как очевидно $\mathcal{U}_\mathfrak{m}(G) \times \mathcal{U}_\mathfrak{m}(X) \subset \mathcal{U}_\mathfrak{m}(G \times X)$, и любое покрытие из $\mathcal{U}_\mathfrak{m}(G \times X)$ продолжается до покрытия из $\tilde{G}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}}$. Отображение $\alpha : G \times X \to \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}}$ равномерно непрерывно относительно равномерностей $\mathcal{U}_\mathfrak{m}$ на $G \times X$ и $\tilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{m}$ на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}}$, и имеет продолжение $\tilde{\alpha} : \widetilde{G \times X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}}$. Тем самым его ограничение на $G \times \tilde{X}^{\mathcal{U}_\mathfrak{m}}$ является искомым продолжением. □

Следствие 3.2.1. *Если произведение $G \times X$ прямоугольно (соответственно сильно прямоугольно, удовлетворяет условию прямоугольности), то тогда* *любое непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ продолжается на μX (соответственно νX, βX).*

Из следствия 3.1.2 имеем.

Следствие 3.2.2. *Если произведение $G \times X$ $\mathfrak{m}$-прямоугольно, то тогда любое непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ продолжается на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_{\mathfrak{m}_1}}$, где $\mathfrak{m}_1 \geq \mathfrak{m}$.*

В частности, если произведение $G \times X$ удовлетворяет условию прямоугольности, то тогда действие продолжается на стоун-чеховскую бикомпактификацию X, на пополнение по Хьюитту пространства X и пополнение по Дьедонне пространства X (в этом случае все пополнения на самом деле совпадают). Если произведение $G \times X$ сильно прямоугольно, то тогда действие продолжается на пополнение по Хьюитту пространства X и пополнение по Дьедонне пространства X.

Различные условия прямоугольности на произведении $G \times X$ являются достаточными для продолжения действия.

Теорема 3.2.2. *Существуют*

(1) *G-пространство X, которое не G-тихоновское, но произведение $G \times X$ прямоугольно;*

(2) *G-тихоновское пространство X такое, что произведение $G \times X$ не прямоугольно;*

(3) *группа G и псевдокомпактное пространство X такие, что произведение $G \times X$ не прямоугольно;*

(4) *G-пространство X, которое не имеет полных по Дьедонне G-расширений.*

Доказательство. (1) М. Мегрелишвили в [24] построил пример метризуемого G-пространства с действием метризуемой группы, не являющегося G-тихоновским. Тем самым произведение $G \times X$ прямоугольно (см., например, [78, Предложение 3.1]).

(2) Если произведение $G \times X$ прямоугольно, то по следствию 3.2.1 действие продолжается на μX. Если X псевдокомпактно, то тогда $\mu X = \beta X$. А. Соколовская [106, Теорема 7] построила пример G-тихоновского пространства X, чья максимальная G-бикомпактификация не совпадает с βX. Тем самым $G \times X$ не прямоугольно.

(3), (4) А. Соколовская [106, Теорема 12] построила пример псевдокомпактного G-пространства, которое не G-тихоновское. Тем самым $G \times X$ не прямоугольно, и G-пространство X не имеет полного по Дьедонне G-расширения (любое полное по Дьедонне расширение X бикомпактно). $\square$

Теорема 3.2.3. *Пусть G — локально псевдокомпактная группа, и H — ее замкнутая ограниченная подгруппа. Тогда произведение $G/H \times X$ прямоугольно для любого b_f-пространства X.*

Доказательство. Из [105, Теоремы 4.8] следует, что $\mu(G/H \times X) = \mu(G/H) \times \mu X = \mu G/\mathrm{cl}_{\mu G} H \times \mu X$. Так как $\mu G = \bar{G}$ [62, Теорема 3.3] — локально бикомпактная, паракомпактная группа, и факторотображение $q : \mu G \to \mu G/\mathrm{cl}_{\mu G} H$ открыто и совершенно (подгруппа $\mathrm{cl}_{\mu G} H$ бикомпактна), то $\mu G/\mathrm{cl}_{\mu G} H$ — локально бикомпактное, паракомпактное пространство. По [75, Теорема 3] произведение $\mu G/\mathrm{cl}_{\mu G} H \times \mu X$ прямоугольно. По [75, Теорема 4] произведение $G/H \times X$ прямоугольно. $\square$

Следствие 3.2.3. *Для топологической группы G следующие условия эквивалентны:*

(a) *G — локально псевдокомпактная группа;*

(b) *$G \times X$ прямоугольно для любого b_f-пространства X.*

Доказательство. Импликация $(a) \Longrightarrow (b)$ следует из теоремы 3.2.3.

Если $G \times X$ прямоугольно для любого b_f-пространства X, то тогда по [75, Теорема 4] $\mu(G \times X) = \mu G \times \mu X$. Теперь импликация $(b) \Longrightarrow (a)$ следует из [105, Теорема 4.6]. $\square$

Теорема 3.2.4. *Произведение $G = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ произвольных локально псевдокомпактных групп прямоугольно.*

Доказательство. По [105, Теорема 4.5] $\mu G = \Pi\{\bar{G}_\alpha : \alpha \in A\}$. Так как $\bar{G} = \mu G$ для локально псевдокомпактных групп [62, Теорема 3.3], то $\mu G = \Pi\{\mu G_\alpha : \alpha \in A\}$. Каждая группа μG_α — локально бикомпактное и паракомпактное пространство и, тем самым, паракомпактное p-пространство, $\alpha \in A$. Произведение паракомпактных p-пространств прямоугольно [37, Теорема 4.2] (см., также [78, Теорема 3.10]). Очевидно, что если $\mu\Pi = \Pi\mu$ и произведение $\Pi\mu$ прямоугольно, то тогда произведение Π прямоугольно. Значит G прямоугольно. □

Лемма 3.2.1. *Произведение* Π*, являющееся σ-бикомпактным пространством, — сильно прямоугольно.*

Доказательство. Доказательство следует из очевидных фактов: произведение Π — линделефово; в любое открытое покрытие Π можно вписать покрытие, состоящее из функционально открытых прямоугольников. □

Лемма 3.2.2. *Если X является счетным объединением ограниченных подмножеств, то тогда равномерности $\mathcal{U}_\mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} = \aleph_0, \ldots$, равны, и, следовательно, $\nu X = \mu X$.*

Доказательство. Доказательство следует из того факта, что из любого нормального покрытия можно выбрать счетное подпокрытие. □

Пространство X называется *полуограниченным (полубикомпактным)*, если существует счетное семейство $\mathcal{F}$ ограниченных (бикомпактных) подмножеств X такое, что любое (бикомпактное) ограниченное подмножество X содержится в некотором элементе $\mathcal{F}$ (см., например, [70]).

Теорема 3.2.5. *Произведение полуограниченного b_f-пространства и полуограниченной b_f-группы сильно прямоугольно.*

Доказательство. По [70, Теорема 2.6] и лемме 3.2.2 равенство $\mu(G \times X) = \nu(G \times X) = \mu G \times \mu X = \nu G \times \nu X$ выполнено для полуограниченной b_f-группы G и полуограниченного b_f-пространства X. По [57, Предложение 3.1] оба пространства νG и νX полубикомпактны и, значит σ-бикомпактны. Тем самым произведение $\nu G \times \nu X$ является σ-бикомпактным и сильно прямоугольным по лемме 3.2.1. Остается воспользоваться [102, Теорема 8]. □

Следствие 3.2.4. *Любое действие* $\alpha : G \times X \to X$

(A) *локально бикомпактной группы* G *на произвольном тихоновском пространстве* X *продолжается на* μX [87];

(B) *полуограниченной* b_f*-группы* G *на полуограниченном* b_f*-пространстве* X *продолжается на* νX;

(C) *локально псевдокомпактной группы* G *на* b_f*-пространстве* X *продолжается на* μX. *Кроме того, действие продолжается до действия группы* $\bar{G}$ *на* μX [51, Теорема 4];

(D) *псевдокомпактной группы* G *на метризуемом пространстве* X *продолжается до действия группы* $\bar{G}$ *на* X [3];

(E) *псевдокомпактной группы* G *на псевдокомпактном пространстве* X *продолжается на* βX [50, Теорема 2.10]. *Кроме того, действие продолжается до действия группы* $\bar{G}$ *на* βX [104, Теорема 2.4].

Доказательство. (A) Для тихоновского пространства X произведение $X \times Y$ прямоугольно для любого тихоновского пространства Y в том и только том случае, если X локально бикомпактно и паракомпактно [75, Теорема 3]. Остается применить следствие 3.2.1.

(B) Произведение полуограниченного b_f-пространства X и полуограниченной b_f-группы сильно прямоугольно теорема 3.2.5. Остается применить следствие 3.2.1.

(C) Пусть G локально псевдокомпактная группа. Тогда произведение $G \times X$ прямоугольно для любого b_f-пространства X теорема 3.2.3. Последнее утверждение следует из [62, Теоремы 3.3], где показано, что $\mu G = \bar{G}$ для локально псевдокомпактной группы, и следствия 3.2.1.

(D) Произведение псевдокомпактного пространства и k-пространства (в частности, метризуемого пространства) прямоугольно (см., например, [78, Теорему 3.38]). Остается применить [61, Теорему 1.2], где показано, что $\mu G = \beta G = \bar{G}$ для псевдокомпактной группы и воспользоваться равенством $\mu X = X$ для паракомпактных пространств.

(E) Произведение псевдокомпактного пространства и псевдокомпактной группы псевдокомпактно [110, Следствие 2.14]. Тем самым оно удовлетворяет условию прямоугольности (см., например, [120, Гл. 8, 8.14]). Остается применить [61, Теорему 1.2], где показано, что $\beta G = \bar{G}$ для псевдокомпактной группы и следствие 3.2.1.

□

Замечание 3.2.1. Если G — полуограниченная b_f-группа, то тогда μG полубикомпактное k_R-пространство, которое совпадает с νG и, кроме того, любое бикомпактное подмножество μG содержится в замыкании (в μG) некоторого ограниченного подмножества G [57, Предложение 3.1]. В [110, Следствии 2.30] показано, что если A ограниченное подмножество топологической группы G, то тогда $\mathcal{U}_\mu|_A = U_{\mathcal{L}\vee\mathcal{R}}|_A$. Значит νG вложено в $\hat{G}$. Кроме того, νG — F_σ-подмножество $\hat{G}$ и G — G_δ-плотно в νG. Тем самым νG — топологическая группа, как G_δ-замыкание G в $\hat{G}$.

Из этого следует, что в следствии 3.2.4 (B) любое действие $\alpha : G \times X \to X$ полуограниченной b_f-группы G на полуограниченном b_f-пространстве X продолжаемо до действия $\tilde{\alpha} : \nu G \times \nu X \to \nu X$.

3.3 Характеризация действий равномерностями на произведении

3.3.1 Ограниченные действия

Для непрерывного действия $\alpha : G \times X \to X$ на G-пространстве X с равномерностью $\mathcal{U}$ следующие условия эквивалентны (см., например, [86]):

(1) для любого $u \in \mathcal{U}$ существует $O \in N_G(e)$ такое, что покрытие $\{Ox : x \in X\}$ вписано в u;

(2) для любого $u \in \mathcal{U}$ существуют $O \in N_G(e)$ и $v \in \mathcal{U}$ такие, что $Ov = \{OV : V \in v\} \succ u$.

Действие, удовлетворяющее условию (1) или (2) называется *ограниченным* [116]. Равномерность $\mathcal{U}$ на G-пространстве X называется *эквиравномерностью* [22], если она насыщенна и действие ограничено равномерностью $\mathcal{U}$.

Предложение 3.3.1. *Если $\mathcal{U}$ — вполне ограниченная равномерность на G-пространстве X, удовлетворяющая условию (F), то тогда $\mathcal{U}$ — эквиравномерность.*

Доказательство. Если равномерность $\mathcal{U}$ удовлетворяет условию (F), то тогда по теореме 3.1.1 пополнение $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ является бикомпактным G-пространством. Значит единственная равномерность на $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ является эквиравномерностью [113, Предложение 7.3.6] и ее ограничение на X, совпадающее с $\mathcal{U}$, является эквиравномерностью. □

Частично упорядоченное множество $\mathcal{U}_{max} = \{\mathcal{U}_{max}(\tilde{X}) : \tilde{X} - G\text{-расширение } X\}$ имеет наибольший элемент $\mathcal{U}_{sup}$.

Следствие 3.3.1. *Если $\mathcal{U}_{sup}$*

(a) *является эквиравномерностью, то тогда все элементы $\mathcal{U}_{max}$ также эквиравномерности;*

(b) *вполне ограничен, то тогда все G-расширения бикомпактны.*

Доказательство. Выполнение пунктов (a) и (b) следуют из следствия 3.1.1 и того факта, что $\mathcal{U}_{sup} > \mathcal{U}, \mathcal{U} \in \mathcal{U}_{max}$. □

Каждая равномерность на псевдокомпактном пространстве вполне ограничена. Следующее следствие обобщает результат Я. де Вриса [113, Предложение 7.3.6] об ограниченности действия на бикомпактном G-пространстве.

Следствие 3.3.2. *На псевдокомпактном G-пространстве X каждая равномерность, удовлетворяющая условию* (F), *является эквиравномерностью.*

Замечание 3.3.1. Представим следующие очевидные замечания.

(a) Естественное действие $\mathbb{R}$ (в евклидовой метрике) на себе левыми сдвигами является примером G-пространства, для которого равномерность, порожденная метрикой, является эквиравномерностью, и действие не ограничено в максимальной равномерности.

(b) Если непрерывное действие на пространстве X ограничено в максимальной равномерности, то тогда она является эквиравномерностью, и действие ограничено в любой равномерности на X.

(c) Если максимальная равномерность на полном по Дьедонне G-пространстве X вполне ограничена, то X бикомпактно, и, значит, максимальная равномерность является эквиравномерностью.

Теорема 3.3.1. *Если $\mathcal{U}$ — насыщенная равномерность на G-пространстве X, то тогда следующие условия эквивалентны:*

(E) *$\mathcal{U}$ — эквиравномерность на X,*

(SUR) *непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ полуравномерно относительно правой равномерности $\mathcal{R}$ на G.*

Доказательство. (E) $\Longrightarrow$ (SUR). Если $\mathcal{U}$ — эквиравномерность на X и $u \in \mathcal{U}$, то тогда существует $O \in N_G(e)$ такое, что $\{Ox : x \in X\} \succ u$. Если $h_1, h_2 \in Og$ при $g \in G$, то тогда $\{\alpha(h_1, x), \alpha(h_2, x)\} \subset \alpha(Og, x) = \alpha(O, \alpha(g, x))$, $x \in X$. Поэтому для произвольной точки $x \in X$ точки $\alpha(h_1, x), \alpha(h_2, x)$ содержатся в некотором элементе $U(x) \in u$. Поэтому отображение $\alpha^* : G \to U(X, X)$ равномерно непрерывно относительно правой равномерности $\mathcal{R}$ на G. Этим заканчивается доказательство того, что α — полуравномерное отображение.

(SUR) $\Longrightarrow$ (E). Если непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ полуравномерно относительно правой равномерности $\mathcal{R}$ на G, то тогда отображение $\alpha^* : G \to U(X, X)$ равномерно непрерывно. Поэтому для любого $u \in \mathcal{U}$ существует $O \in N_G(e)$ такое, что для произвольных точки $x \in X$ и элемента $h \in Og$ точки $\alpha(h, x)$ и $\alpha(g, x)$ принадлежат одному элементу $U(x) \in u$. Тем самым, для любого $u \in \mathcal{U}$ существует $O \in N_G(e)$ такой, что $\{Ox : x \in X\} \succ u$. Из этого вытекает, что $\mathcal{U}$ — эквиравномерность на X. □

Следствие 3.3.3. *Если $\mathcal{U}$ эквиравномерность на X, то тогда непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ продолжается до полунепрерывного отображения $\bar{\alpha} : \bar{G}^{\mathcal{R}} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Более того, ограничение $\hat{\alpha}$ отображения $\bar{\alpha}$ на $\hat{G} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}}$ является непрерывным действием, и $\tilde{\mathcal{U}}$ — эквиравномерность.*

Доказательство. По теореме 3.3.1 действие $\alpha : G \times X \to X$ полуравномерно относительно правой равномерности $\mathcal{R}$ на G. По следствию 1.3.1 отображение α продолжается до полуравномерного отображения $\bar{\alpha} : \bar{G}^{\mathcal{R}} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Остальное следует из вложения $\hat{G} \subset \bar{G}^{\mathcal{R}}$ и принципа продолжения тождеств.

□

Теорема 3.3.2. *Если проекция $\pi : G \times X \to G$ — z-замкнута, и $\mathcal{U}$ — насыщенная равномерность на X, удовлетворяющая условию*

для любых $u \in \mathcal{U}$ существуют $v \in \mathcal{U}$ и $\{O(V) \in N_G(e) : V \in v\}$ такие, что для любых $V \in v$ имеем $\alpha(O(V), V) \subset U$ для некоторого $U \in u$,

то тогда $\mathcal{U}$ — эквиравномерность.

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что v локально конечное семейство функционально открытых множеств [46], и множества $O(V)$, $V \in v$, функционально открыты. Тогда множество $W = \bigcup\{O(V) \times V : V \in v\}$ является функционально открытым, и $\{e\} \times X \subset W$. Так как проекция $\pi : G \times X \to G$ — z-замкнута, то существует $O \in N_G(e)$ такое, что $O \times X \subset W$. Тем самым $Ov \succ u$. $\square$

Следующее следствие обобщает пункт (E) в следствии 3.2.4.

Следствие 3.3.4. *Если X — псевдокомпактное G-пространство, и G — группа такая, что проекция $G \times X \to G$ z-замкнута (в частности, G — псевдокомпатная группа), то тогда максимальная равномерность на X — эквиравномерность, и действие $\alpha : G \times X \to X$ продолжается до отображения $\tilde{\alpha} : \bar{G}^{\mathcal{R}} \times \beta X \to \beta X$, чье ограничение на $\hat{G} \times \beta X$ является действием.*

Доказательство. Если проекция $G \times X \to G$ z-замкнута, то тогда произведение $G \times X$ прямоугольно (см., например, [78, Теорема 3.36]). Значит для любого $u \in \mathcal{U}_\mu$ существует σ-локально конечное покрытие w произведения $G \times X$, состоящее из функционально открытых прямоугольников такое, что $\alpha(w) \succ u$. Существует подсистема $\{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha \in A\}$ из функционально открытых прямоугольников, покрывающая слой $\{e\} \times X$ и $\{V_\alpha : \alpha \in A\} \in \mathcal{U}_\mu$. По теореме 3.3.2 $\mathcal{U}_\mu$ — равномерность, и $\mathcal{U}_\mu = \mathcal{U}_\beta$, так как X псевдокомпактно. Остальное следует из следствии 3.3.3.

Если G — псевдокомпактная группа, то тогда проекция $G \times X \to G$ z-замкнута так как $\beta(G \times X) = \beta G \times \beta X$ [110, Следствие 2.14]. $\square$

3.3.2 Равномерно равностепенно непрерывные действия

Непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ на равномерном пространстве $(X, \mathcal{U})$ называется *равномерно равностепенно непрерывным*, если для любого $u \in \mathcal{U}$ существует $v \in \mathcal{U}$ такой, что $gv \succ u$ для любых $g \in G$.

Теорема 3.3.3. *Если $\mathcal{U}$ — насыщенная равномерность на G-пространстве X, то тогда следующие условия эквивалентны:*

(UE) *непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ равномерно равностепенно непрерывно на X,*

(SUL) *непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ — полунепрерывно на произведении $G \times X$ (где X — первый и G — второй сомножители полуравномерного произведения) относительно левой равномерности $\mathcal{L}$ на G.*

Доказательство. (UE) $\Longrightarrow$ (SUL). Покажем, что для любого $u \in \mathcal{U}$ существуют $v \in \mathcal{U}$ и система $\{O(V) \in N_G(e) : V \in v\}$ такие, что для любого $V \in v$ выполнено $\alpha(O(V), V) \subset U$ для некоторого $U \in u$.

Для $u \in \mathcal{U}$ пусть u' звездно вписано в u. Пусть $v \in \mathcal{U}$ такое, что $gv \succ u'$ для любых $g \in G$. Не ограничивая общность рассуждений, можно считать, что v открытое покрытие X. Для $V \in v$ возьмем произвольные точку $x \in V$ и $O(V) \in N_G(e)$ такие, что $\alpha(O(V), x) \subset V$. Тогда $\alpha(O(V), V) = \bigcup\{\alpha(g, y) : g \in O(V), y \in V\}$. Для любых $y \in V$ и $g \in O(V)$ имеем $\alpha(g, y) \in \mathrm{St}(\alpha(g, x), u') \subset \mathrm{St}(V, u') \subset \mathrm{St}(U', u')$ для некоторого фиксированного $U' \in u'$. Значит $\alpha(O(V), V) \subset \mathrm{St}(U', u') \subset U$ для некоторого $U \in u$.

Для $u \in \mathcal{U}$ пусть $u' \in \mathcal{U}$ такое, что $gu' \succ u$ для любых $g \in G$. Пусть $v \in \mathcal{U}$ и система $\{O(V) \in N_G(e) : V \in v\}$ такие, что для любых $V \in v$ имеем $\alpha(O(V), V) \subset U'$ для некоторого $U' \in u'$. Тогда для любого $V \in v$ и $g \in G$ выполнено $\alpha(gO(V), V) = \alpha(g, \alpha(O(V), V)) \subset U$ для некоторого $U \in u$. Значит α полуравномерно на $X \times G$ относительно левой равномерности $\mathcal{L}$ на G.

(SUL) $\Longrightarrow$ (UE). Для любого $u \in \mathcal{U}$ существуют $v \in \mathcal{U}$ и система $\{O(V) \in N_G(e) : V \in v\}$ такие, что для любых $V \in v$ и $g \in G$ выполнено $\alpha(gO(V), V) \subset U$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. Значит $gv \succ u$ для любых $g \in G$. □

Следствие 3.3.5. *Если непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ на равномерном пространстве $(X,\mathcal{U})$ равномерно равностепенно непрерывно, то тогда* *оно продолжаемо до полуравномерного отображения* $\bar{\alpha} : \bar{G}^{\mathcal{L}} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$. *Кроме того, сужение* $\hat{\alpha}$ *отображения* $\bar{\alpha}$ *на* $\hat{G} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}}$ *является действием.*

Доказательство. По теореме 3.3.3 действие $\alpha : G \times X \to X$ полуравномерно относительно левой равномерности $\mathcal{L}$ на G. По следствию 1.3.1 отображение α продолжаемо до отображения $\bar{\alpha} : \bar{G}^{\mathcal{L}} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Остальное следует из вложения $\hat{G} \subset \bar{G}^{\mathcal{L}}$ и принципа продолжения тождеств. □

Следующее следствие является обобщением пункта (C) в случае, когда G — псевдокомпактная группа и пункта (E) следствия 3.2.4.

Следствие 3.3.6. *Если* G *— псевдокомпактная группа и* X *— пространство такое, что проекция* $G \times X \to X$ z*-замкнута (в частности* X *—* b_f*-пространство), то тогда действие* $\alpha : G \times X \to X$ *на равномерном пространстве* $(X, \mathcal{U}_\mu)$ *равномерно равностепенно непрерывно. Значит оно продолжается до действия* $\tilde{\alpha} : \bar{G} \times \mu X \to \mu X$.

Доказательство. Так как проекция $G \times X \to X$ z-замкнута, то действие α полуравномерно на произведении $G \times X$ (где X — первый и G — второй сомножители полуравномерного произведения) относительно максимальных равномерностей на X и G [97, Теорема 1.6]. Для псевдокомпактной группы G выполнено $\beta G = \mu G = \bar{G} = \bar{G}^{\mathcal{R}} = \bar{G}^{\mathcal{L}} = \hat{G}$ [61]. Значит α равномерно равностепенно непрерывно. Остальное следует из следствия 1.3.1.

Если X — b_f-пространство и G — псевдокомпактна, то тогда проекция $G \times X \to X$ z-замкнута по [78, Теореме 3.36] , так как $G \times X$ прямоугольно по следствию 3.2.3. □

Замечание 3.3.2. Если группа G и пространство X псевдокомпактны, то тогда для любого непрерывного действия $\alpha : G \times X \to X$ выполнено

(1) α равномерно равностепенно непрерывно в максимальной равномерности $\mathcal{U}_\mu = \mathcal{U}_\beta$ на X,

(2) $\mathcal{U}_\mu$ эквиравномерность.

3.3.3 Квазиограниченные действия

Непрерывное действие $\alpha : G\times X \to X$ на равномерном G-пространстве $(X,\mathcal{U})$ *квазиограничено* [22], если для любого $u \in \mathcal{U}$ существуют $O \in N_G(e)$ и $v \in \mathcal{U}$ такие, что $gv \succ u$ для любых $g \in O$. Каждое равномерно равностепенно непрерывное действие квазиограничено.

Теорема 3.3.4. *Если $\mathcal{U}$ — насыщенная равномерность на G-пространстве X, то тогда следующие условия эквивалентны:*

(QU) *непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ квазиограничено,*

(SURL) *непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ кусочно полуравномерно на произведении $G\times X$ относительно двусторонней равномерности $\mathcal{R}\vee\mathcal{L}$ на G.*

Доказательство. (QU) $\Longrightarrow$ (SURL). Для $w \in \mathcal{U}$ существуют $u \in \mathcal{U}$ и $O \in N_G(e)$ такие, что $gu \succ w$ для любого $g \in O$.

Покажем, что существуют $v \in \mathcal{U}$ и семейство $\{O(V) \in N_G(e) : V \in v\}$ такие, что для любого $V \in v$ имеем $\alpha(O(V), V) \subset U$ для некоторого $U \in u$. Пусть u' звездно вписано в u и $O' \in N_G(e)$, $v \in \mathcal{U}$ такие, что $gv \succ u'$ для любых $g \in O'$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать u' открытым покрытием X. Для $V \in v$ возьмем произвольные $x \in V$ и $O(V) \in N_G(e)$ такие, что $\alpha(O(V), x) \subset U'$ для некоторого фиксированного $U' \in u'$. Тогда $\alpha(O(V), V) = \bigcup\{\alpha(g, V) : g \in O(V)\} \subset \mathrm{St}(U', u') \subset U$ для некоторого $U \in u$.

Для каждого $g \in O$ и $V \in v$ имеем $\alpha(gO(V), V) = \alpha(g, \alpha(O(V), V)) \subset \alpha(g, U)$, где $U \in u$. Значит $\alpha(gO(V), V) \subset W$ для некотого $W \in w$.

Легко проверить, что семейство покрытий $\{\{Og : g \in G\} \in \mathcal{R}\vee\mathcal{L}; v(Og) = g^{-1}v \in \mathcal{U}, g \in G; u(V, Og) = \{hO(V) : h \in G\} \in \mathcal{R} \vee \mathcal{L}, V \in v(Og), g \in G\}$ удовлетворяет условию (1.3*). Так как $w \in \mathcal{U}$ произвольно, то действие кусочно полуравномерно не произведении $G \times X$ относительно двусторонней равномерности $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}$ на G.

(SURL) $\Longrightarrow$ (QU). Для любых $w \in \mathcal{U}$ существуют покрытия $\{u \in \mathcal{R} \vee \mathcal{L}; v(U) \in \mathcal{U}, U \in u; u(V,U) \in \mathcal{R} \vee \mathcal{L}, V \in v(U), U \in u\}$, удовлетворяющие условию (1.3*). Значит $gv(U) \succ w$ для любых $g \in U$, где $U \in N_G(e)$. $\square$

Следствие 3.3.7. [87] *Если непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ на равномерном пространстве $(X,\mathcal{U})$ квазиограничено, и равномерность $\mathcal{U}$ насыщена, то действие продолжается до квазиограниченного действия $\tilde{\alpha} : \hat{G} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$.*

Доказательство. По теореме 3.3.4 действие $\alpha : G \times X \to X$ кусочно полуравномерно относительно двусторонней равномерности $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}$ на G. По следствию 1.3.2 отображение α продолжается до кусочно полуравномерного отображения $\tilde{\alpha} : \hat{G} \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$. Остальное следует из теоремы 3.3.4. $\square$

Теорема 3.3.5. *Если для непрерывного действия $\alpha : G \times X \to X$ существует $O \in N_G(e)$ такой, что проекция $\pi : \mathrm{cl}_G O \times X \to X$ z-замкнута, и $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}|_{\mathrm{cl}_G O} = \mathcal{U}_\mu|_{\mathrm{cl}_G O}$, то тогда действие квазиограничено относительно максимальной равномерности $\mathcal{U}_\mu$ на X и, тем самым, существует квазиограниченное продолжение $\tilde{\alpha} : \hat{G} \times \mu X \to \mu X$.*

Доказательство. Если проекция $\pi : \mathrm{cl}_G O \times X \to X$ z-замкнута, то тогда равномерность полуравномерного произведения $X * \mathrm{cl}_G O$ максимальна, если равномерности на сомножителях максимальны [97, Теорема 1.6]. Значит в любое нормальное покрытие $\mathrm{cl}_G O \times X$ вписано покрытие вида $\{\{V \times U : V \in v(U)\} : U \in u\}$, где $u \in \mathcal{U}_\mu$ и $v(U) \in \mathcal{U}_\mu|_{\mathrm{cl}_G O} = \mathcal{R} \vee \mathcal{L}|_{\mathrm{cl}_G O}$, $U \in u$. Тем самым условие квазиограниченности выполнено. $\square$

Следствие 3.3.8. *Если G — локально бикомпактная группа, и X — произвольное пространство или G — локально псевдокомпактно, и X — b_f-пространство, то тогда непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ квазиограничено относительно максимальной равномерности $\mathcal{U}_\mu$ на X и существует квазиограниченное продолжение $\tilde{\alpha} : \hat{G} \times \mu X \to \mu X$.*

Доказательство. Возьмем $O \in N_G(e)$ такое, что $\mathrm{cl}_G O$ или бикомпактно, или псевдокомпактно. Тогда проекция $\pi : \mathrm{cl}_G O \times X \to X$ очевидна z-замкнута в случае, когда $\mathrm{cl}_G O$ бикомпактно. Равенство $\mathcal{R} \vee \mathcal{L}|_{\mathrm{cl}_G O} = \mathcal{U}_\mu|_{\mathrm{cl}_G O}$ очевидно выполняется для локально бикомпактной группы. Остается использовать теорему 3.3.5.

Если G — локально псевдокомпактная группа и X — b_f-пространство, то действие продолжается до $\bar{G}$ на μX [51]. Так как $\bar{G}$ — локально бикомпактная группа [62], то действие $\bar{G}$ на μX квазиограничено. Значит его ограничение на G и X квазиограничено относительно максимальной равномерности на X. □

Замечание 3.3.3. Следствие 3.3.8 в случае локально бикомпактной группы доказано в [87, Предложение 3.7], и в случае локально псевдокомпактной группы G и X b_f-пространства существование продолжения $\tilde{\alpha} : \hat{G} \times \mu X \to \mu X$ доказано в [51, Теорема 4].

Используем конструкцию из [22]. Для равномерного G-пространства $(X,\mathcal{U})$ с непрерывным действием $\alpha : G \times X \to X$ пусть $\mathcal{U}^G$ — всевозможные покрытия X, в которые можно вписать покрытия вида

$$\{\alpha(O,U) : U \in u\},\ O \in N_G(e),\ u \in \mathcal{U}.$$

Лемма 3.3.1. *Если $\mathcal{U}$ — насыщенная равномерность, то тогда семейство покрытий $\mathcal{U}^G$ также насыщено.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ и $u \in \mathcal{U}^G$. Пусть $O \in N_G(e)$ и $v \in \mathcal{U}$ такие, что $Ov \succ u$. Возьмем $W \in N_G(e)$ такой, что $Wg \subset gO$. Тогда $gOv \succ gu$ и $Wgv \succ gOv$. Так как $gv \in \mathcal{U}$ и $Wgv \succ gu$, то имеем $gu \in \mathcal{U}^G$. □

Теорема 3.3.6. *Если непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ на равномерном пространстве $(X,\mathcal{U})$ с насыщенной равномерностью $\mathcal{U}$ квазиограничено, то тогда $\mathcal{U}^G$ является эквиравномерностью, и $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$ вложено в $\tilde{X}^{\mathcal{U}^G}$.*

Доказательство. По [22, Предложение 3] и лемме 3.3.1 $\mathcal{U}^G$ — эквиравномерность. По [87, Лемма 2.1] действие $\tilde{\alpha} : G \times \tilde{X}^{\mathcal{U}} \to \tilde{X}^{\mathcal{U}}$ квазиограничено. Пусть

$\tilde{\mathcal{U}}$ является равномерностью на $Y = \tilde{X}^{\mathcal{U}}$, чье сужение на X есть $\mathcal{U}$. Она насыщена. Если показать, что сужение эквиравномерности $\tilde{\mathcal{U}}^G$ на X есть $\mathcal{U}^G$, то тогда $\tilde{X}^{\mathcal{U}^G} = \tilde{Y}^{\tilde{\mathcal{U}}^G}$ и $\tilde{X}^{\mathcal{U}} \subset \tilde{X}^{\mathcal{U}^G}$.

Для $\tilde{u} \in \tilde{\mathcal{U}}$ пусть $u = \tilde{u} \wedge X \in \mathcal{U}$. Так как X инвариантное подмножество $\tilde{X}^{\mathcal{U}}$, то для любого $O \in N_G(e)$ имеем $O\tilde{u} \wedge X = O(\tilde{u} \wedge X) = Ou \in \mathcal{U}^G$. Значит $\tilde{\mathcal{U}}^G|_X = \mathcal{U}^G$. □

Частично упорядоченное множество равномерностей относительно которых непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ квазиограничено (соответственно ограничено) имеет максимальный элемент $\mathcal{U}_{qb-max}$ (соответственно $\mathcal{U}_{b-max}$). Очевидно, что $\mathcal{U}_{qb-max}$ и $\mathcal{U}_{b-max}$ насыщены.

Предложение 3.3.2. $\mathcal{U}^G_{qb-max} = \mathcal{U}_{b-max}$.

Доказательство. Доказательство вытекает из неравенств $\mathcal{U}_{qb-max} \geq \mathcal{U}_{b-max}$, $\mathcal{U}_{b-max} \geq \mathcal{U}^G_{qb-max}$, и равенства $\mathcal{U}^G_{b-max} = \mathcal{U}_{b-max}$. □

Из предложения 3.3.2 и следствия 3.3.8 имеем.

Следствие 3.3.9. *Если непрерывное действие $\alpha : G \times X \to X$ квазиограничено относительно максимальной равномерности $\mathcal{U}_\mu$ на X, то тогда $\mathcal{U}^G_\mu$ — максимальная эквиравномерность, и $\beta_G X$ — бикомпактификация Самюэля X относительно $\mathcal{U}^G_\mu$ [22].*

$\beta_G X$ — бикомпактификация Самюэля X относительно $\mathcal{U}^G_\mu$ для любого непрерывного действия $\alpha : G \times X \to X$, если

(1) *G — локально бикомпактная группа и X — произвольное тихоновское пространство;*

(2) *G — локально псевдокомпактная группа и X — произвольное b_f-пространство.*

3.4 Полурешетка бикомпактных G-расширений

Для тихоновского пространства X через $K(X)$ обозначим полную верхнюю (в дальнейшем, если этого не будет требоваться, то эти термины будем опускать) полурешетку бикомпактных расширений пространства X (см., например, [46, Глава 3, §3.5]).

Для G-тихоновского пространства X через $K_G(X)$ обозначим множество всех его бикомпактных G-расширений (мы не различаем эквивалентные бикомпактные расширения). На множестве $K_G(X)$ можно ввести частичный порядок, считая $bX \geq cX$, если существует эквивариантное отображение $f_{bc} : bX \to cX$ такое, что $c = f_{bc} \circ b$, где b, c — эквивариантные вложения X в бикомпактные расширения bX и cX соответственно.

Также как и в [46, Теорема 3.5.9.] можно показать, что $K_G(X)$ является полной верхней полурешеткой бикомпактных G-расширений. Из этого вытекает, в частности, что у G-тихоновского пространства существует максимальное бикомпактное G-расширение — наибольший элемент полурешетки, обозначаемое $\beta_G X$ [99], [118].

Так как любое бикомпактное G-расширение пространства X является его бикомпактным расширением, то каждому элементу $K_G(X)$ можно поставить в соответствие элемент $K(X)$. Так определенное отображение является инъективным. Действительно, пусть не эквивалентным бикомпактным G-расширениям b_1X и b_2X ставится в соответствие одна бикомпактификация. Тогда существует гомеоморфизм $h : b_1X \to b_2X$ такой, что $b_2 = h \circ b_1$. При этом, так как сужение отображения h на $b_1(X)$ является эквиварантным, то из принципа продолжения тождеств следует, что h будет эквивариантным отображением и гомеоморфизмом. Значит бикомпактные G-расширения b_1X и b_2X эквивалентны. Поэтому множество $K_G(X)$ можно рассматривать как подмножество $K(X)$.

Покажем, что порядок, индуцируемый на $K_G(X)$ из $K(X)$, и порядок на $K_G(X)$, описанный выше, совпадают. Если существует эквивариантное отображение $h : b_1X \to b_2X$ такое, что $b_2 = h \circ b_1$ (т.е. $b_1X \geq b_2X$ в порядке на $K_G(X)$), то тогда $b_1X \geq b_2X$ и в порядке на $K(X)$ (отображение тоже самое). Обратно, если b_1X и $b_2X \in K_G(X)$, и $b_1X \geq b_2X$ в порядке $K(X)$, то существует отображение $h : b_1X \to b_2X$ такое, что $b_2 = h \circ b_1$. При этом ясно, что отображение $h|_{b_1(X)}$ является эквивариантным. Из принципа продолжения тождеств следует, что h будет эквивариантным, т.е. $b_1X \geq b_2X$ и в порядке $K_G(X)$.

Операции взятия точной верхней грани в обеих полурешетках одинаковы. Поэтому доказано следующее предложение.

Предложение 3.4.1. *Полурешетка $K_G(X)$ является подрешеткой $K(X)$.*

Рассматривая различные действующие на пространстве X группы, можно сравнивать полурешетки их бикомпактных G-расширений, как подрешетки $K(X)$.

Рассмотрим в $\beta_G X$ такое инвариантное подмножество Y, что $X \subset Y$. Так как X всюду плотно в Y, то любой элемент $K_G(Y)$ является и элементом $K_G(X)$. Каждому элементу $K_G(Y)$ поставлен в соответствие элемент $K_G(X)$. Легко проверить, что так определенное отображение является инъективным. Поэтому множество $K_G(Y)$ можно рассматривать как подмножество $K_G(X)$. Покажем, что порядок, индуцируемый на $K_G(Y)$ из $K_G(X)$, и порядок на $K_G(Y)$ совпадают.

Пусть бикомпактным G-расширениям b_1Y и b_2Y поставлены в соответствие бикомпактные G-расширения c_1X и c_2X, где $c_i = b_i|_X : X \to c_iX = b_iY, i = 1, 2$. Ясно, что из $b_1Y \geq b_2Y$ вытекает, что $c_1X \geq c_2X$. Обратно, если $c_1X \geq c_2X$, то существует эквивариантное отображение $h : c_1X \to c_2X$ такое, что $c_2 = h \circ c_1$. Для эквивариантных отображений $b_1 : Y \to b_1Y = c_1X$ и $b_2 : Y \to b_2Y = c_2X$ выполнено равенство $b_2|_X = h \circ b_1|_X$, так как $b_i|_X = c_i, i = 1, 2$, т.е. отображения $h \circ b_1$ и b_2 совпадают на всюду плотном подмножестве X. Значит они совпадают на Y и $b_1Y \geq b_2Y$.

Операции взятия точной верхней грани в обеих полурешетках одинаковы.

Поэтому доказано следующее предложение.

Предложение 3.4.2. *Полурешетка* $K_G(Y)$ *является подрешеткой* $K_G(X)$, *и значит* (по предложению 3.4.1) *и* $K(X)$. *Кроме того,* $\beta_G Y = \beta_G X$.

Рассматривая различные инвариантные подмножества $\beta_G X$, содержащие X, можно сравнивать их полурешетки, как подрешетки $K(X)$.

Напомним (§ 2.1), что через X_G обозначается множество точек d-открытости действия группы G на пространстве X.

Пусть X — подмножество G-пространства Y. Положим $X^G = GX$, $X^G_Y = X^G \cup Y_G$. Легко проверить, что подмножества X^G и X^G_Y являются инвариантными подмножествами Y.

Лемма 3.4.1. *Пусть* X *является всюду плотным подмножеством* G*-пространства* Y, Z — G'*-пространство,* $f : Y \to Z$ — *непрерывное замкнутое отображение и его ограничение* $f|_X : X \to f(X) \subset Z$ *является гомеоморфизмом. Кроме того, пусть* $h : G \to G'$ — *гомоморфизм такой, что выполнено условие*

$$(3.4^*) \qquad f(gy) = h(g)f(y) \quad \text{для любых} \quad y \in Y, g \in G.$$

Тогда отображение $f' = f|_{X^G_Y} : X^G_Y \to f(X^G_Y) \subset Z$ *является гомеоморфизмом, удовлетворяющим условию* (3.4*) *с заменой* f *на* f' *и* Y *на* X^G_Y.

Более того, если $G = G'$ *и* $h = \mathrm{id}$, *то отображение* f' *является эквивариантным гомеоморфизмом.*

Доказательство. Если $x \in X$, то по [46, Лемма 3.5.6] $f^{-1}fx = x$. Покажем, что это условие выполняется и для $x \in X^G_Y$.

Пусть $x \in X^G \setminus X$. Предположим, что существует точка $x' \in Y, x' \neq x$ такая, что $x' \in f^{-1}fx$. Так как $x \in X^G$, то существует $g \in G$ такое, что $gx \in X$. Тогда, так как отображение f удовлетворяет условию (3.4*), то $f(gx) = h(g)f(x) = h(g)f(x') = f(gx')$, где $gx \in X$ и $gx \neq gx'$. Но это противоречит условию, что $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X$. Значит f взаимно однозначно на X^G.

Пусть теперь $x \in Y_G \setminus X^G$. Предположим, что существует точка $x' \in Y, x' \neq x$ такая, что $x' \in f^{-1}fx$. Тогда из непрерывности действия вытекает существование такой окрестности $O \in N_G(e)$, что $\mathrm{cl}(Ox) \cap \mathrm{cl}(Ox') = \emptyset$. При этом $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox))$. Из условия (3.4*) и равенства $fx = fx'$ следует, что $f(Ox) = f(Ox')$, а из непрерывности и замкнутости отображения f вытекает равенство $f(\mathrm{cl}(Ox)) = f(\mathrm{cl}(Ox'))$.

Поэтому для любой точки $z \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \cap X$ (напомним, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) \neq \emptyset$, а X всюду плотно) существует точка $z' \in \mathrm{cl}(Ox')$ такая, что $fz = fz'$. Но это противоречит условию, что $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X$. Значит отображение f удовлетворяет условию $f^{-1}fx = x$ для любой точки $x \in X^G_Y$.

Отображение f' является непрерывным, взаимно однозначным и замкнутым, как ограничение замкнутого отображения на полный прообраз, поэтому f' является гомеоморфизмом. Оно удовлетворяет условию (3.4*) с заменой f на f' и Y на X^G_Y, так как подмножество X^G_Y является инвариантным. $\square$

Из [87, Теорема 3.1 и Лемма 1.3] вытекает, что действие группы G на любом бикомпактном пространстве продолжается до действия пополненной (по двусторонней равномерности) группы $\hat{G}$ на нем. Таким образом, действие группы G на любом бикомпактном G-расширении пространства X продолжается до действия группы $\hat{G}$. Положим $\hat{X} = X^{\hat{G}}_{\beta_G X} = X^{\hat{G}} \cup (\beta_G X)_{\hat{G}}$. Отметим, что $\hat{X}$ является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ как относительно действия группы $\hat{G}$ так и действия ее подгруппы G.

Теорема 3.4.1. *Пусть X — G-тихоновское пространство. Тогда $K_G(X) = K_G(\hat{X})$. Более того, любое бикомпактное G-расширение X является бикомпактным G-расширением $\hat{X}$.*

Доказательство. По предложению 3.4.2 мы рассматриваем полурешетку $K_G(\hat{X})$ как подрешетку $K_G(X)$.

Пусть bX — произвольное бикомпактное G-расширение X и $f_{\beta_G b} : \beta_G X \to bX$ — эквивариантное отображение G-пространств. Тогда по лемме 3.1.2 оно будет эквивариантным отображением $\hat{G}$-пространств $\beta_G X, bX$. Если в лемме 3.4.1 положить G и $G' = \hat{G}$, $X = X, Y = \beta_G X$, $Z = bX$ и $f = f_{\beta_G b}$, то $\hat{X}$ будет эквивариантно вложено в bX относительно действия группы $\hat{G}$, а значит и ее подгруппы G. Значит любое бикомпактное G-расширение X является бикомпактным G-расширением $\hat{X}$. Отсюда сразу вытекает равенство $K_G(X) = K_G(\hat{X})$. $\square$

Следствие 3.4.1. *Пусть X — G-тихоновское пространство. Тогда для любого инвариантного подмножества Y такого, что $X \subset Y \subset \hat{X}$, $K_G(X) = K_G(Y)$.*

Доказательство. Отметим, что $\beta_G X = \beta_G Y$ (предложение 3.4.2) и $\hat{X} = \hat{Y}$. Значит $K_G(X) = K_G(\hat{X}) = K_G(\hat{Y}) = K_G(Y)$. $\square$

Замечание 3.4.1. Легко показать, если $X \subset Y \subset \beta X$, то $K(X) = K(Y)$ тогда и только тогда, когда $X = Y$ или $Y = \beta X$ и $|\beta X \setminus X| = 1$. В эквивариантном случае это не так.

В некоторых случаях множество $\hat{X}$ можно находить проще.

Лемма 3.4.2. *Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда выполняются следующие утверждения.*

(1) *Если $X^{\hat{G}}$ локально бикомпактно, то $\hat{X} = X^{\hat{G}}$.*

(2) *Если $X^G_{\beta_G X} = X \cup (\beta_G X)_G$ локально бикомпактно, то $\hat{X} = X^G_{\beta_G X}$.*

Доказательство. (1) Если подпространство $X^{\hat{G}}$ локально бикомпактно, то оно является открытым всюду плотным инвариантным относительно действия группы $\hat{G}$ подмножеством пространства $\beta_G X$. Значит орбиты любой точки из $\beta_G X \setminus X^{\hat{G}}$ принадлежат замкнутому нигде не плотному подмножеству $\beta_G X$. Отсюда вытекает, что $(\beta_G X)_{\hat{G}} \subset X^{\hat{G}}$, и значит $\hat{X} = X^{\hat{G}}$.

(2) Докажем включение $\hat{X} \subset X^G_{\beta_G X}$. Так как $X^G_{\beta_G X}$ локально бикомпактно и $X \subset X^G_{\beta_G X}$, то $F = \beta_G X \setminus X^G_{\beta_G X}$ является замкнутым нигде не плотным подмножеством $\beta_G X$. Непрерывное действие $G \times \beta_G X \to \beta_G X$ продолжается [87]

до непрерывного действия $\hat{G} \times \beta_G X \to \beta_G X$. Прообраз замкнутого множества F является замкнутым подмножеством $\hat{G} \times \beta_G X$ и содержит множество $G \times F$, которое всюду плотно в $\hat{G} \times F$. Значит прообраз F содержит $\hat{G} \times F$, т.е. $\hat{G}F \subset F$ и множество F является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ относительно действия группы $\hat{G}$. Отсюда вытекает, что множество $X^G_{\beta_G X} = \beta_G X \setminus F$ является инвариантным подмножеством $\beta_G X$ относительно действия группы $\hat{G}$, и $X^{\hat{G}} \subset X^G_{\beta_G X}$, так как $X \subset X^G_{\beta_G X}$. Орбиты любой точки из F принадлежат замкнутому нигде не плотному подмножеству $\beta_G X$. Отсюда вытекает, что $(\beta_G X)_{\hat{G}} \subset X^G_{\beta_G X}$. Значит $\hat{X} \subset X^G_{\beta_G X}$. Так как обратное включение очевидно, то требуемое равенство доказано. $\square$

Следующий пример показывает, что включение $(\beta_G X)_{\hat{G}} \subset X^{\hat{G}}$, вообще говоря, строгое.

Пример 3.4.1. Пусть G — счетная всюду плотная подгруппа $\{e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{Q}\}$ компактной абелевой группы $S = \{e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R}\}$. Действие G на $X = I \times G$ определяется следующим образом $g(x,t) = (x, gt)$. Легко проверить, что X — G-пространство и бикомпакт $bX = I \times S$ с аналогично определенным действием является G-расширением X. Пополнение $\hat{G} = S$ и $Sb(X) = bX$, где $b : X \to bX$.

Покажем, что $\beta_G X = bX$. Пусть $\beta_G : X \to \beta_G X$, $f_{\beta_G b} : \beta_G X \to bX$. Тогда $f_{\beta_G b}(S \cdot \beta_G(X)) = S \cdot b(X) = bX$ и по лемме 3.4.1 $f_{\beta_G b}|_{S \cdot \beta_G(X)}$ является гомеоморфизмом. Значит $\beta_G X = bX$ и bX — единственное бикомпактное G-расширение X. Для любой точки $(x,t) \in bX$ ее орбита $\{x\} \times S$ — слой произведения $I \times S$. Поэтому она нигде не плотна и $(\beta_G X)_S = \emptyset$.

Легко показать, что множество $Y = X \cup \{0\} \times S \subset bX$ является инвариантным относительно действия группы G и $X \subset Y$. Имеем $|Y \setminus X| = \mathfrak{c}$, но $K_G(X) = K_G(Y)$.

В замечании 5.1.4 будет показано, что включение $X^{\hat{G}} \subset X^G_{\beta_G X}$, вообще говоря, строгое.

Пусть топологии τ, τ', $\tau' \geq \tau$ на группе G такие, что групповые операции непрерывны. Топологические группы (G, τ') и (G, τ) будем обозначать G' и G соответственно. Заметим, что при данных предположениях любое G-пространство является и G'-пространством.

Теорема 3.4.2. *Пусть пространство X является G-тихоновским. Тогда $K_G(X)$ является подрешеткой полурешетки $K_{G'}(X)$.*

Кроме того, $K_G(X) = K_{G'}(X)$ тогда и только тогда, когда $\beta_G X = \beta_{G'} X$.

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из предложения 3.4.1 и того, что все бикомпактные G-расширения являются G'-расширениями.

Необходимость второй части теоремы очевидна, а достаточность следует из первой части и леммы 1.5.6. □

Наименьший (минимальный) элемент полурешетки бикомпактных G-расширений G-пространства X называется наименьшим (минимальным) бикомпактным G-расширением X. Легко показать, что полурешетка бикомпактных G-расширений G-пространства X является полной решеткой тогда и только тогда, когда у X существует наименьшее бикомпактное G-расширение.

Если полурешетка бикомпактных расширений тихоновского пространства является решеткой тогда и только тогда, когда пространство локально бикомпактно, то в случае G-тихоновских пространств это не так [107]. Ниже приводятся достаточные условия существования наименьшего (минимального и единственного) бикомпактного G-расширения.

Из теоремы 3.4.1 и существования наименьшего бикомпактного G-расширения у локально бикомпактного G-пространства [99] следует.

Следствие 3.4.2. (1) *Если $\hat{X}$ локально бикомпактно, то у X существует наименьшее бикомпактное G-расширение.*

(2) *Если $|\beta_G X \setminus \hat{X}| \leq 1$, то у X существует единственное бикомпактное G-расширение.*

Из леммы 1.5.6 и теоремы 3.4.2 вытекает.

Теорема 3.4.3. *Пусть пространство X является G'-тихоновским. Если на действующей группе существует более слабая групповая топология (G — та же самая группа в более слабой топологии) такая, что X — G-тихоновское пространство с полной решеткой бикомпактных G-расширений, то у G'-пространства X существует минимальное бикомпактное G'-расширение — наименьшее бикомпактное G-расширение.*

Более того, если $\beta_G X = \beta_{G'} X$, то минимальное бикомпактное G'-расширение пространства X будет наименьшим.

Следствие 3.4.3. *Пусть пространство X является G'-тихоновским. Если на действующей группе существует более слабая групповая топология (G — та же самая группа в более слабой топологии) такая, что для G-пространства X выполнено условие $\beta_G X = \beta_{G'} X$, и у G-пространства X существует единственное бикомпактное G-расширение, то у G'-пространства X существует единственное бикомпактное G'-расширение.*

3.5 Расширения пространств с d-открытым действием

Теорема 3.5.1. *Пусть X — G-пространство со слабо d-открытым действием. Тогда семейство покрытий*

$$\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Ox)) : x \in X\}, O \in N_G(e),$$

является базой максимальной эквиравномерности $\mathcal{U}_G$ на X.

Доказательство. Доказательство того, что $\mathcal{U}_G$ — инвариантная псевдоравномерность на X следует из предложения 2.2.1.

Пусть x, y — пара различных точек пространства X. Так как действие непрерывно, то существуют $O \in N_G(e)$, $O = O^{-1}$, и окрестности W_x, W_y точек x и y соответственно, такие, что $\mathrm{cl}(OW_x) \cap \mathrm{cl}(OW_y) = \emptyset$. Покажем, что никакой элемент покрытия γ_O не содежит x и y одновременно. В самом деле, если x и $y \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oz)), z \in X$, то $W_x \cap Oz \neq \emptyset$ и $W_y \cap Oz \neq \emptyset$. Поэтому $z \in OW_x$ и $z \in OW_y$ и, значит, $OW_x \cap OW_y \neq \emptyset$. Тем самым $\mathcal{U}_G$ — инвариантная равномерность на X.

Так как базу равномерности $\mathcal{U}_G$ составляют открытые покрытия, то она согласована с топологией X.

Наконец проверим, что $U_G \geq \mathcal{U}_G$. Пусть $\beta \in \mathcal{U}_G$, и $O \in N_G(e)$ такая, что $\gamma_O \succ \beta$. Возьмем $V \in N_G(e)$, $V^2 \subset O$. Для любой точки $x \in X$ существует точка $z \in X$ такая, что $x \in \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vz))$. Тогда $Vx \subset V\operatorname{int}(\operatorname{cl}(Vz)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(V^2z)) \subset \operatorname{int}(\operatorname{cl}(Oz))$. Поэтому $\{Vx : x \in X\} \succ \gamma_O$. Значит $\mathcal{U}_G$ — эквиравномерность. По лемме 1.5.4 $\mathcal{U}_G$ — максимальная эквиравномерность. $\square$

Следствие 3.5.1. *Пусть X — G-пространство со слабо d-открытым действием. Тогда $\beta_G X$ — бикомпактификация Самюэля пространства X относительно эквиравномерности $\mathcal{U}_G$.*

Лемма 3.5.1. *Если X — G-пространство с d-открытым действием, то для любого $O \in N_G(e)$ существует $V \in N_G(e)$ такая, что $\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Vx) \subset \operatorname{int}_{\beta_G X}(\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Ox))$ при любом $x \in X$.*

Доказательство. Так как

$$x \in \beta_G X \setminus \operatorname{cl}_{\beta_G X}(X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))) \subset \operatorname{int}_{\beta_G X}(\operatorname{cl}_{\beta_G X}(Ox))$$

для любого $x \in X$, то для доказательства леммы достаточно показать, что существуют $V \in N_G(e)$ такая, что $\operatorname{cl}_X(Vx) \cap (X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))) = \emptyset$ для любого $x \in X$, и для каждого $x \in X$ G-равномерная функция, принимающая значения $\leq 1/4$ на $\operatorname{cl}_X(Vx)$ и $\geq 1/2$ на $X \setminus \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))$ (см., например, [49, Теорема 4.3]).

Используя [46, Теорему 8.2.3] и предложение 2.2.1, легко видеть, что существуют $V \in N_G(e)$ и равномерно непрерывная псевдометрика ρ на X с равномерностью $\mathcal{U}_{N_G}$ такие, что $\operatorname{St}(x, \gamma_V) \subset \{y \in X : \rho(x, y) \leq 1/4\}$ и $\{y \in X : \rho(x, y) \leq 1/2\} \subset \operatorname{int}_X(\operatorname{cl}_X(Ox))$ для любого $x \in X$. Тогда для каждого $x \in X$ функция $f_x(y) = \rho(x, y)$ G-равномерна, и $f_x(y) \leq 1/4$ при $y \in \mathrm{cl}_X(Vx)$, $f_x(y) \geq 1/2$ при $y \in X \setminus \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Ox))$. □

Предложение 3.5.1. *Если действие на пространстве X d-открыто, то тогда оно продолжается до слабо d-открытого действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$, d-открытого в точках подмножества X.*

Доказательство. Так как X всюду плотно в $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$, то продолжение действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ d-открыто в точках X по предложению 2.1.3 (b).

Возьмем произвольные точку $y \in \tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ и элемент $O \in N_G(e)$. Для доказательства предложения надо найти точку $x \in X$ такую, что $y \in \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ox))$. Пусть элемент $V \in N_G(e)$, существующий по лемме 3.5.1, такой, что

$$\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Vx) \subset \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ox))$$

для любой точки $x \in X$ (напомним, что $X^{\mathcal{U}_G}$ естественно вложено в $\beta_G X$).

Покрытие $\gamma_V = \{\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Vx)) : x \in X\}$ подпространства X продолжается до покрытия γ'_V пространства $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ (т.е., $\gamma'_V \wedge X = \gamma_V$). Поэтому существует элемент $W = \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(Vx)) \in \gamma_V$ такой, что $y \in \tilde{W}^{\mathcal{U}_G}$, где $\tilde{W}^{\mathcal{U}_G} \in \gamma'_V$. Так как X всюду плотно в $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$, то $\tilde{W}^{\mathcal{U}_G} \subset \mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}} W$, и $y \in \mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}} W \subset \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ox))$. □

Лемма 3.5.2. *Пусть X – инвариантное подмножество G-пространства Y с d-открытым действием. Тогда покрытия*

$$\lambda_O = \{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox)) : x \in X\},\ O \in N_G(e),$$

образуют базу максимальной эквиравномерности на инвариантном подпространстве $\mathrm{cl}_Y(X)$.

Тем самым ограничение максимальной эквиравномерности $\mathcal{U}_G(Y)$ на Y на подмножество X совпадает с максимальной эквиравномерностью $\mathcal{U}_G(X)$ на X.

Доказательство. Зафиксируем элемент $O \in N_G(e)$ и возьмем $V \in N_G(e)$ такой, что $V^3 \subset O$ и $V^{-1} = V$. Если показать, что $\gamma_V = \{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vy)) : y \in$

$\mathrm{cl}_Y X\}$ вписано в $\lambda_O = \{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox)) : x \in X\}$ (и тем самым λ_O является покрытием), то тогда $\lambda_O \in \mathcal{U}_G(\mathrm{cl}_Y X) = \mathcal{U}_G(Y)|_{\mathrm{cl}_Y(X)}$.

Для множества $\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vy)) \subset \mathrm{cl}_Y X$, где $y \in \mathrm{cl}_Y X$, существует точка $x \in X$ такая, что $x \in \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vy))$ (так как X всюду плотно в $\mathrm{cl}_Y(X)$). По лемме 2.1.4 выполнено включение $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox))$. Поэтому $\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Vy)) \subset \mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Ox))$ и, значит, $\gamma_V \succ \lambda_O$.

Так как $\lambda_O \succ \gamma_O$, то покрытия λ_O, $O \in N_G(e)$, образуют базу максимальной эквиравномерности на $\mathrm{cl}_Y(X)$.

Используя лемму 1.0.1, легко доказать второе утверждение леммы. $\square$

Лемма 3.5.2 и предложение 2.1.3 (a) доказывают следующее утверждение.

Предложение 3.5.2. *Если действие на Y равномерно локально G-равномерно, то тогда его ограничение на любое инвариантное подмножество X равномерно локально G-равномерно.*

Теорема 3.5.2. *Действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно в том и только том случае, если действие на пространстве $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ равномерно локально G-равномерно.*

Доказательство. Достаточность вытекает из предложения 3.5.2.

Доказательство необходимости. Для произвольного элемента $O \in N_G(e)$ возьмем $U \in N_G(e)$ такой, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux является элементом $\mathcal{U}_G|_{Ux}$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $U \subset O$ и $O^{-1} = O$.

Выберем произвольную точку $y \in \tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$. По предложению 3.5.1 имеем $y \in \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ux))$ для некоторой точки $x \in X$.

Утверждение. Для любого элемента $V \in N_G(e)$ существует $g \in O$ такой, что

$$gy \in \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Vx)).$$

Возьмем элемент $V' \in N_G(e)$ такой, что

$$\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(V'x) \subset \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Vx)).$$

Так как действие на X равномерно локально G-равномерно, то существует элемент $V'' \in N_G(e)$ такой, что $\gamma_{V''}|_{Ux} \succ \{g\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(V'x)) : g \in O\} \wedge Ux$.

Имеем

$$\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ux) = \widetilde{(Ux)}^{\mathcal{U}_G|_{Ux}} \subset$$

$$\subset \bigcup\{\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_X(V''z) \cap Ux) : \mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(V''z)) \cap Ux \neq \emptyset, z \in X\} \subset$$

$$\subset \bigcup\{g\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(V'x) : g \in O\}.$$

Поэтому существует $g^{-1} \in O$ такой, что

$$y \in g^{-1}\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(V'x) \subset g^{-1}\mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Vx)).$$

Значит $gy \in \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Vx))$.

Из доказанного утверждения следует, что для любого открытого подмножества $W \subset \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ux))$ существует $g \in O^2$ такой, что $gy \in W$ (напомним, что Ux всюду плотно в $\mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ux))$ и действие непрерывно).

Нами показано, что

$$O^2y \cap \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ux)) \text{ всюду плотно в } \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Ux)).$$

Поэтому $y \in \mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(O^2y))$. Так как элемент $O \in N_G(e)$ произволен, то доказана d-открытость действия на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$.

Для окончания доказательства по лемме 3.5.2 достаточно проверить выполнение следующего свойства равномерной локальной G-равномерности на $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$: для любого элемента $O \in N_G(e)$ существует $U \in N_G(e)$ такой, что для любых элемента $V \in N_G(e)$ и точки $x \in X$ покрытие $\{g\mathrm{int}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(\mathrm{cl}_{\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}}(Vx)) : g \in O\} \wedge Ux$ подмножества Ux является элементом семейства $\mathcal{U}_G|_{Ux}$. Но это очевидно выполняется, в силу того, что на этих множествах мы имеем продолжения равномерностей, для которых выполнено условие равномерной локальной G-равномерности. $\square$

Из теоремы 3.5.2 и замечания 2.3.2 имеем.

Следствие 3.5.2. *Действие на максимальном бикомпактном G-расширении $\beta_G X$ d-открыто (и, тем самым, равномерно локально G-равномерно) в том и только том случае, если*

(a) *действие на X равномерно локально G-равномерно;*

(b) *максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена.*

Из предложений 3.1.1, 3.5.2 и 2.1.3 (b) следует утверждение.

Предложение 3.5.3. *Если действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно, то тогда его любая G-бикомпактификация содержит инвариантное подмножество $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$.*

Следствие 3.5.3. *Если действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно и $|\beta_G X \setminus \tilde{X}^{\mathcal{U}_G}| \leq 1$ (в частности максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена), то тогда $\beta_G X$ — единственная G-бикомпактификация X.*

Если действие на бикомпакте Y d-открыто, и X его инвариантное подмножество, то тогда $\mathrm{cl}X$ — единственная G-бикомпактификация X. Более того, если у Y одна компонента действия, то тогда Y — единственная G-бикомпактификация X.

Если действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно, и $\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ — локально бикомпактно, то $\alpha\tilde{X}^{\mathcal{U}_G}$ — наименьшая G-бикомпактификация X.

Доказательство. Первое утверждение является следствием предложения 3.5.3 и следствия 3.4.2 (2).

Второе утверждение следует из предложений 3.5.2, 3.5.3, леммы 3.5.2 и того, что единственная равномерность на бикомпакте вполне ограничена.

Последнее утверждение следует из предложения 3.5.3 и следствия 3.4.2 (1). □

Пусть топологии τ и τ' на группе G такие, что групповые операции непрерывны и $\tau' \geq \tau$. Положим $G' = (G, \tau')$ и $G = (G, \tau)$. Из теоремы 3.4.3 следует.

Следствие 3.5.4. *Пусть Y — бикомпакт с d-открытым действием G. Тогда Y — минимальная G'-бикомпактификация своего любого всюду плотного инвариантного подмножества.*

Второе утверждение следствия 3.5.3 может быть обобщено.

Теорема 3.5.3. *Пусть X — всюду плотное инвариантное подмножество бикомпакта Y с d-открытым действием группы G, и $\mathcal{G}$ — насыщенное относительно сопряжения семейство подгрупп таких, что*

(3.5*) *для любого конечного подмножества $\mathcal{G}_{Fin} \subset \mathcal{G}$ подгруппа $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ d-открыто действует в точках $x \in Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$, где $K(\mathcal{G}_{Fin})$ — бикомпактное подмножество X.*

Тогда Y — единственная $G_{\mathcal{G}}$-бикомпактификация X.

Доказательство. По следствию 3.4.3 достаточно показать, что Y — максимальная $G_{\mathcal{G}}$-бикомпактификация X. Для этой цели покажем, что $G_{\mathcal{G}}$-пространство X с максимальной эквиравномерностью $\mathcal{U}'$ является подпространством равномерного G-пространства Y с максимальной эквиравномерностью $\mathcal{U}_G$ (напомним, что на бикомпакте равномерность единствена).

По лемме 1.5.4 в любое равномерное покрытие $\Omega \in \mathcal{U}'$ пространства X можно вписать покрытие ω' вида $\{\mathrm{int}_X(\mathrm{cl}_X(O'x) : x \in (X \setminus K(\mathcal{G}_{Fin}))\} \cup v'$, где $O' = O \cap \bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ для некотрого элемента $O \in N_G(e)$, $\mathcal{G}_{Fin}$ – конечное подмножество $\mathcal{G}$; v' – конечное открытое покрытие $K(\mathcal{G}_{Fin})$.

Действие подгруппы $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$ d-открыто в точках $Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$. Множества $Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$ и $X \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$ инвариантны относительно действия группы $\bigcap\{T \in \mathcal{G}_{Fin}\}$, и $X \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$ всюду плотно в $Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$. Поэтому по леммам 1.0.1 и 3.5.2 семейство $\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(O'x) : x \in (X \setminus K(\mathcal{G}_{Fin}))\}$ – покрытие $Y \setminus K(\mathcal{G}_{Fin})$. Тем самым покрытие ω' пространства X может быть продолжено до открытого покрытия $\omega = \{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(O'x) : x \in (X \setminus K(\mathcal{G}_{Fin}))\} \cup v$

пространства Y, где $v \wedge X = v'$. Так как любое открытое покрытие бикомпактного G-пространства Y из $\mathcal{U}_G$, то существует $U \in N_G(e)$ такое, что $\{\mathrm{int}_Y(\mathrm{cl}_Y(Uy)) : y \in Y\} \succ \omega$. Поэтому $\mathcal{U}_G|_X > \mathcal{U}'$. Обратное включение очевидно, так как усиление топологии группы G семейством $\mathcal{G}$ сильнее оригинальной топологии. $\square$

Пример 3.5.1. Если H — замкнутая подгруппа G, то G действует на пространстве левых смежных классов $\mathcal{X} = G/H$ посредством левых сдвигов. Очевидно, что действие G на $\mathcal{X}$ открыто. С учетом леммы 1.5.4 U_G — максимальная эквиравномерность на пространстве $\mathcal{X}$, которое, тем самым, является G-тихоновским пространством.

Для изучения полурешетки бикомпактных G-расширений пространства $\mathcal{X}$ выясним чему гомеоморфно подмножество $\mathcal{X}^{\hat{G}}$ максимального бикомпактного G-расширения $\beta_G\mathcal{X}$.

Пусть $\pi : G \to \mathcal{X}$, $f_\beta : \mathcal{X} \to \beta_G\mathcal{X}$ — естественные отображения,

$$f = f_\beta \circ \pi : G \to \beta_G\mathcal{X}. \tag{1}$$

Отображение π является эквивариантным и равномерно непрерывным относительно пары равномерностей $\mathcal{R}$ и U_G [9, Глава 3]. Так как $\mathcal{L} \vee \mathcal{R} \geq \mathcal{R}$, то π равномерно непрерывно и относительно $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ и U_G. Отображение f_β эквивариантно и равномерно непрерывно относительно пары равномерностей U_G и $\tilde{U}_G$ (единственной равномерности на $\beta_G X$). Тогда отображение f является эквивариантным и равномерно непрерывным относительно пары равномерностей $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ и $\tilde{U}_G$, как композиция эквивариантных и равномерно непрерывных отображений.

Согласно [46, Теорема 8.3.10] существует равномерно непрерывное отображение $F : \hat{G} \to \beta_G\mathcal{X}$ и

$$f = F \circ j, \tag{2}$$

где $j : G \to \hat{G}$ — естественное вложение. Действие группы G на $\beta_G\mathcal{X}$ продолжается [87] до действия группы $\hat{G}$. Группа $\hat{G}$ является $\hat{G}$-пространством.

Из принципа продолжения тождеств следует, что отображение F является эквивариантным отображением $\hat{G}$-пространств $\hat{G}$ и $\beta_G\mathcal{X}$.

Так как $f(H)$ одноточечное множество, то и $F(\mathrm{cl}H)$ (замыкание берется в $\hat{G}$) — одноточечно. Поэтому определено отображение $h : \mathcal{Y} = \hat{G}/\mathrm{cl}H \to \beta_G\mathcal{X}$ такое, что

$$F = h \circ \hat{\pi}, \tag{3}$$

где $\hat{\pi} : \hat{G} \to \mathcal{Y}$ — естественное отображение $\hat{G}$-пространств. Отображение h очевидно непрерывно. Принимая во внимание (3), легко показать, что оно является эквивариантным отображением $\hat{G}$-пространств.

Определено вложение $i : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $i(gH) = g\mathrm{cl}H$ (см. [107] и [9, Глава 3, §2, Предложение 21]), где $gH, g\mathrm{cl}H$ — левые смежные классы в $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ соответственно. Очевидно, что оно является эквивариантным относительно действия группы G. Покажем что

$$h \circ i = f_\beta. \tag{4}$$

Произведение в группах (чтобы не путать с обозначением смежных классов) будем, где это необходимо, обозначать через “$\cdot$”. Пусть $gH \in \mathcal{X}$, тогда $i(gH) = g\mathrm{cl}H$ и $h(g\mathrm{cl}H) =$ (по (3)) $= F(g{\cdot}\mathrm{cl}H) =$ (по (2) и так как $g \in G) = f(g{\cdot}H) =$ (по (1)) $= f_\beta(gH)$.

Условия (1) — (4) доказывают коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dd, "j"'] \arrow[dr, "f"] & & \mathcal{X} \arrow[dd, "i"] \arrow[dl, "f_\beta"'] \\
& \beta_G\mathcal{X} & \\
\hat{G} \arrow[rr, "\hat{\pi}"] \arrow[ur, "F"] & & \mathcal{Y} \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

где j, π, f, i, f_β — эквивариантные отображения G-пространств, а $F, h, \hat{\pi}$ — эквивариантные отображения $\hat{G}$-пространств.

Из свойства максимальности бикомпактного G-расширения вытекает существование эквивариантных отображений $H : \beta_{\hat{G}}\mathcal{Y} \to \beta_G\mathcal{X}$ и $h_\beta : \mathcal{Y} \to \beta_{\hat{G}}\mathcal{Y}$ $\hat{G}$-пространств таких, что

$$H \circ h_\beta = h. \tag{5}$$

Показана коммутативность следующей диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "i"'] & \beta_G\mathcal{X} \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "h_\beta"] \arrow[ur, "h"] & \beta_{\hat{G}}\mathcal{Y}, \arrow[u, "H"']
\end{tikzcd}$$

где i, f_β — эквивариантные отображения G-пространств, а h_β, h, H — эквивариантные отображения $\hat{G}$-пространств.

Из леммы 3.4.1, если положить $G, G' = \hat{G}$, $X = h_\beta \circ i(\mathcal{X}), Y = \beta_{\hat{G}}\mathcal{Y}, \mathcal{Z} = \beta_G\mathcal{X}$ и $f = H$ и, так как $X^{\hat{G}} = \hat{G} \cdot (h_\beta \circ i(\mathcal{X})) = h_\beta(\hat{G} \cdot i(\mathcal{X})) =$(так как действие группы $\hat{G}$ на $\mathcal{Y}$ транзитивно)$= h_\beta(\mathcal{Y})$, вытекает, что отображение $H|_{h_\beta(\mathcal{Y})}$ является гомеоморфизмом. Значит h — вложение, как композиция (по (5)) гомеоморфизмов, и $\mathcal{X}^{\hat{G}} = \hat{G} \cdot f_\beta(\mathcal{X}) =$ (по (4)) $= \hat{G} \cdot (h \circ i(\mathcal{X})) = h(\hat{G} \cdot i(\mathcal{X})) = h(\mathcal{Y})$. Тем самым показано, что $\mathcal{X}^{\hat{G}}$ гомеоморфно $\mathcal{Y}$.

Из примера 3.5.1, леммы 3.4.2 и следствия 3.4.2 вытекают следствия.

Следствие 3.5.5. *Если пространство $\hat{G}/\mathrm{cl}H$ является локально бикомпактным, то у пространства G/H будет наименьшее бикомпактное G-расширение — одноточечная Александровская бикомпактификация пространства $\hat{G}/\mathrm{cl}H$.*

Следствие 3.5.6. *Если пространство $\hat{G}/\mathrm{cl}H$ является бикомпактным, то у пространства G/H будет единственное бикомпактное G-расширение* [107, Теорема 3].

Следствие 3.5.7. *Если G — локально вполне ограниченная группа* [122] *или* [9, Глава 3, §3] (*в частности, локально псевдокомпактная группа*), *действующая сама на себе, то она обладает наименьшим бикомпактным G-расширением — одноточечной Александровской бикомпактификацией ее пополнения по правой равномерности.*

Следствие 3.5.8. *Если G — вполне ограниченная группа* [122] *или* [9, Глава 3, §3] (*в частности, псевдокомпактная группа*), *действующая сама на себе, то она обладает единственным бикомпактным G-расширением — пополнением по правой равномерности.*

Замечание 3.5.1. Пусть топологии τ, τ', $\tau' \geq \tau$ на группе G такие, что групповые операции непрерывны. $G' = (G, \tau'), G = (G, \tau)$. Тогда для любой замкнутой подгруппы $H \subset G$ пространство G/H является как G так и G'-пространством. Из теоремы 3.4.3 и примера 3.5.1 следует, если G-пространство G/H имеет наименьшее бикомпактное G-расширение, то G'-пространство G/H имеет минимальное бикомпактное G'-расширение. В частности, если $\hat{G}/\mathrm{cl}H$ локально бикомпактно, то, с учетом леммы 3.4.2, G'-пространство G/H имеет минимальное бикомпактное G'-расширение. Это обобщение теоремы 2 из [107].

Предложение 3.5.4. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой группы. Тогда существует единственное полное по Чеху G-расширение X, на котором продолжение действия $\hat{G}$ открыто, а действие G d-открыто.*

В частности, если G — полная по Чеху группа, то X является фактор-пространством группы G и полно по Чеху.

Доказательство. По следствию 3.5.1 и [87] действие продолжается до действия полной по Чеху группы $\hat{G}$ на $\beta_G X$. Пусть $Y \subset \beta_G X$ — множество точек d-открытости действия $\hat{G}$. Оно инвариантно. По предложению 2.1.3 $X \subset Y$. По теореме 2.4.2 действие $\hat{G}$ на Y открыто. По [56, Теорема 2] Y — полно по Чеху. По лемме 2.1.6 ограничение действия G на Y d-открыто.

Пусть Y' полное по Чеху G-расширение X, на котором продолжение действия $\hat{G}$ открыто. Имеем $X \subset Y \subset \beta_G X$, $X \subset Y' \subset b_G X$. По лемме 3.4.1 Y инвариантно и гомеоморфно подмножеству $b_G X$. Поэтому можно считать, что $X \subset Y' \subset b_G X$ и $X \subset Y \subset b_G X$. При этом ограничения действия $\hat{G}$ на Y и Y' открыты. Так как $Y \cap Y' \neq \emptyset$, то $Y = Y'$. □

С учетом теоремы 3.4.1 имеем.

Следствие 3.5.9. *Пусть X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы. Тогда существует единственное полное Дьедонне G-расширение X, являющееся факторпространством $\hat{G}$. Если, дополнительно, максимальная эквиравномерность вполне ограничена, то единственная бикомпактификация $\beta_G X$ является факторпространством полной по Чеху группы. В частности, если X — псевдокомпактное пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы, то ее единственная бикомпактификация $\beta_G X$ является факторпространством полной по Чеху группы.*

Псевдокомпактное пространство X допускает равномерно локально G-равномерное действие полной по Чеху группы в том и только том случае, если оно бикомпактно.

Глава 4

Связь спектральных представлений действующих групп и пространств

4.1 d-открытые действия инфраметризуемых групп

Теорема 4.1.1. *Пусть действие на X слабо d-открыто, и существует счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$, удовлетворяющее условиям* (1), (2) леммы 1.4.1 и (2.2*)*.*

Тогда

(1) *X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ метризуемо (тем самым X — субметризуемо);*

(2) *если X — псевдокомпактное пространство, то X — компактное G-пространство.*

Доказательство. Не ограничивая общности рассуждений можно считать, что $\mathcal{O} = \{O_i : i \in \mathbb{N}\}$, где $O_i^{-1} = O_i$, $O_{i+1}^2 \subset O_i$, $i \in \mathbb{N}$. По предложению 2.2.1 семейство $\mathcal{U}_{\mathcal{O}}$ является равномерностью со счетной базой на X, и X в индуцированной ею топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ метризуемо (см., например, [46, Теорема 8.1.21.]) и, тем самым, X субметризуемо.

Так как субметризуемое псевдокомпактное пространство метризуемо [10], то X — компакт. Остается сослаться на следствие 2.2.1. $\square$

Следствие 4.1.1. *Пусть действие на X слабо d-открыто, и счетное семейство $\mathcal{O} \subset N_G(e)$ удовлетворяет условиям* (1) – (3) лемм 1.4.1 и 1.4.3 *и условию* (2.2*)*.*

Тогда X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ — метризуемое G-пространство. В частности, если X — G-пространство со слабо d-открытым действием метризуемой группы, то X — метризуемое G-пространство.

Доказательство. По теореме 4.1.1 пространство X в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$ метризуемо, а действие непрерывно по предложению 2.2.1.

Если X — G-пространство со слабо d-открытым действием метризуемой группы, а $\mathcal{O}$ — счетная база семейства $N_G(e)$, то из непрерывности действия следует, что для любых двух различных точек x, y пространства X существует $O \in \mathcal{O}$ такая, что x и y не принадлежат одному элементу покрытия γ_O. Остается показать, что топология $\tau_{\mathcal{O}}$ совпадает с топологией пространства X.

По предложению 2.2.1 нужно лишь показать, что любое открытое множество O в пространстве X является открытым и в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$. Пусть $x \in O$, открытое множество $W \subset O$ и $V, U \in \mathcal{O}$ такие, что $x \in W$, $V^2 \subset U$, $V^{-1} \subset U$, $\mathrm{cl}(UW) \subset O$. Тогда, если $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Vz))$, то существует $t \in V$ такой, что $tz \in W$. Поэтому $\mathrm{cl}(Vz) \subset \mathrm{cl}(V^2W) \subset \mathrm{cl}(UW) \subset O$. Тем самым показано, что $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset O$, т.е. любая точка открытого в X множества O является внутренней точкой O в топологии $\tau_{\mathcal{O}}$. □

Пространство X называется *почти метризуемым*, если на нем так непрерывно действует бикомпактная группа G, что пространство орбит X/G метризуемо [26, Определение 1].

Теорема 4.1.2. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием почти метризуемой группы. Тогда X — почти метризуемое пространство.*

Доказательство. Пусть H — бикомпактная подгруппа счетного характера в G [28, Лемма 2]. Вес семейства $N_G(H)$ счетен, поэтому вес псевдоравномерности $\mathcal{U}_H$, определяемой в предложении 2.2.1, также счетен, и можно считать, что она порождается псевдометрикой ρ (см., например, [46, Теорема 8.1.21.]). По лемме 2.2.1 $[x]_{E(\rho)} = Hx$, и Hx — бикомпакт. По лемме 2.2.2 множества

$O_n(x) = \{y \in X : \rho(x,y) < 1/n\}$, $n \in \mathbb{N}$, образуют счетную базу множества $[x]_{E(\rho)}$ в X, $x \in X$. По лемме 1.1.1 факторпространство $X/E(\rho)$ метризуемо. Остается заметить, что факторпространство $X/E(\rho)$ совпадает с факторпространством X/H — пространством орбит по действию бикомпактной группы H на X. $\square$

Теорема 4.1.3. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой (соответственно почти метризуемой; полной по Чеху) группы G. Тогда на X существует d-открытая $\sigma_{\mathcal{M}}$-система* (*соответственно открытая, совершенная $\sigma_{\mathcal{M}}$-система; открытая, совершенная $\sigma_{\mathcal{CM}}$-система*).

Доказательство. Если группа G полна по Чеху, то по предложению 1.6.1 существует согласованная открытая, совершенная, эквивариантная $\mathcal{CM}$-система $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$ из факторотображений φ_α в полно метризуемые факторпространства группы G по бикомпактным подгруппам H_α, $\alpha \in A$. Тем самым характер группы H_α счетен, $\alpha \in A$.

Действие G на X открыто по теорема 2.4.2. Поэтому пространство X полно по Чеху [56, Теорема 2]. По лемме 1.4.1 и предложению 2.2.1 определены псевдоравномерности $\mathcal{U}_{H_\alpha}$, $\alpha \in A$, на X. Их вес счетен. Так как подгруппа H_α бикомпактна, $\alpha \in A$, то по теореме 2.2.1 равномерно факторное отображения p_α по псевдоравномерности $\mathcal{U}_{H_\alpha}$ открыто и совершенно, $\alpha \in A$. При этом образы $X/\mathcal{U}_{H_\alpha}$ полно метризуемы, как совершенные метризуемые образы полного по Чеху пространств X.

Система отображений $L_p = \{p_\alpha, p_{\beta\alpha} = p_\alpha \circ p_\beta^{-1}; A\}$ является согласованной, так как действие открыто, и L — согласованная система на G. Проверим σ-полноту системы L_p из полно метризуемых пространств. Пусть H_k, $k \in \mathbb{N}$, — семейство бикомпактных подгрупп группы G счетного характера. Тогда $H = \cap\{H_k : k \in \mathbb{N}\}$ — также бикомпактная подгруппа G счетного характера [28, Лемма 1]. Отображения p_H, p_{H_k} и p_{HH_k}, $k \in \mathbb{N}$, соответствующие подгруппам H и H_k, $k \in \mathbb{N}$, принадлежат системе L_p и совершенны. Диагональ совершенных отображений p_{HH_k}, $k \in \mathbb{N}$, совершенна. Тем самым для проверки σ-полноты системы L_p достаточно проверить лишь инъективность диагонали отображений p_{HH_k}, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $p_H(x) \neq p_H(y)$. Тогда $y \notin Hx$. Если $y \in H_k x$ ($y = h_k x$, $h_k \in H_k$) для любого $k \in \mathbb{N}$, то так как $H_{k+1} \subset H_k$, $k \in \mathbb{N}$, существует $h \in H$, являющийся предельной точкой последовательности h_k, $k \in \mathbb{N}$. Естественно $hx = y$, и $y \in Hx$. Значит существует подгруппа H_k такая, что $y \notin H_k x$, что и доказывает инъективность. Система L_p является $\sigma_{\mathcal{CM}}$-системой.

Аналогичные рассуждения (лишь образы перестают быть полно метризуемыми) позволяют доказать теорему для почти метризуемой группы.

Если группа G инфраметризуема (соответственно почти метризуема), то ее пополнение $\hat{G}$ действует на $\beta_G X$, причем действие d-открыто в точках инвариантного подмножества $Y \subset \beta_G X$, $X \subset Y$. На Y существует открытая $\sigma_{\mathcal{CM}}$-система, каждое из отображений которой есть совершенное отображение в полно метризуемое пространство. Ограничения отображений этой системы на всюду плотное подмножество X и его образы будет d-открытой системой.

$\square$

Следствие 4.1.2. *Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой группы G. Тогда X — $\varkappa$-метризуемое пространство, βX — открытопорожденный бикомпакт. В частности, псевдокомпактное факторпространство инфраметризуемой (почти метризуемой или полной по Чеху) группы является $\varkappa$-метризуемым.*

Если действие инфраметризуемой группы G на пространстве X равномерно локально G-равномерно и максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена, то X — d-пространство и $\beta_G X$ — бикомпакт Дугунджи. В частности, если пространство X псевдокомпактно и действие инфраметризуемой группы G равномерно локально G-равномерно, то X — d-пространство, и $\beta X = \beta_G X$ — бикомпакт Дугунджи.

Доказательство. Если группа G инфраметризуема, то ее пополнение $\hat{G}$ действует на $\beta_G X$ [87], причем действие d-открыто в точках инвариантного подмножества $Y \subset \beta_G X$, $X \subset Y$. Если X — псевдокомпактно, то пространство Y — псевдокомпактное пространство с открытым действием полной по Чеху группы $\hat{G}$ по теореме 2.4.2. По теореме 4.1.3 на Y существует открытая $\sigma_{\mathcal{CM}}$-система из открытых, совершенных отображений в компакты. По замечанию 1.6.1 Y является всюду плотным подмножеством открытопорожденного бикомпакта Z, являющегося пределом соответствующего σ-спектра из компактов с открытыми проекциями. Значит X $\varkappa$-метризуемое пространство, как всюду плотное подмножество $\varkappa$-метризуемого бикомпакта Z [43, Гл.2, Предложение 3]. Так как X G_δ-плотно в Z, то $\beta X = Z$ [109, Следствие 2].

Если действие на пространстве X равномерно локально G-равномерно и максимальная эквиравномерность вполне ограничена, то по теореме 2.4.2 и следствию 3.5.2 действие полной по Чеху группы $\hat{G}$ на $\beta_G X$ открыто. По следствию 7 [28] $\beta_G X$ — бикомпакт Дугунджи. Тогда X d-пространство, как всюду плотное подмножество $\beta_G X$ [34, стр. 1097].

Если пространство X дополнительно псевдокомпатно, то так как X G_δ-плотно в $\beta_G X$, то $\beta X = \beta_G X$ [109, Следствие 2]. □

Замечание 4.1.1. Отметим, что для доказательства $\varkappa$-метризуемости βX в первом утверждении следствия 4.1.2 вместо результата М. Ткаченко можно воспользоваться теоремой А. Чигогидзе: βX — $\varkappa$-метризуемо в том и только том случае, когда X — псевдокомпактно и $\varkappa$-метризуемо [39, Теорема 2].

В первом утверждении следствия 4.1.2 $\beta_G X$ — *$\varkappa$-адический бикомпакт* [43].

Замечание 4.1.2. Пусть X — G-пространство с d-открытым действием инфраметризуемой группы. Из замечания 2.2.2 следует, что $(X, \mathcal{U}_{N_G})$ — инфраметризуемое пространство. Из доказательства теоремы 4.1.3 легко увидеть, что для $u \in \mathcal{U}_{N_G}$ существует псевдоравномерность $\mathcal{U}'$ на X с $u \in \mathcal{U}' \subset \mathcal{U}_{N_G}$ такая, что для любого $v \in \mathcal{U}_{N_G}$ существует $v' \in \mathcal{U}'$ и для любого $x \in X$ существует конечное число точек $t_i(x)$, $i = 1, \ldots, k(x)$, для которых условие

$\mathrm{St}(x, v') \subset \cup\{\mathrm{St}(t_i(x), v) : i = 1, \ldots, k(x)\}$ выполняется.

Обозначим через $\mathcal{IM}$, $\mathcal{AM}$ и $\check{\mathcal{C}}$ топологические свойства инфраметризуемости, почти метризуемости (для топологических групп) и полноты по Чеху, соответственно. С учетом теоремы 4.1.3 и замечания 4.1.2 обозначим через $\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}$, $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{M}}}$ и $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{CM}}}$ свойства топологических пространств быть инфраметризуемым с d-открытой $\sigma_{\mathcal{M}}$-системой (соответственно открытой, совершенной $\sigma_{\mathcal{M}}$-системой; открытой, совершенной $\sigma_{\mathcal{CM}}$-системой) равномерно факторных отображений на X.

В теореме 4.1.2 доказано, что G-пространство с d-открытым действием почти метризуемой группы является почти метризуемым пространством. Любое пространство $X \in \mathcal{I}M_{op\sigma_{\mathcal{CM}}}$ является полным по Чеху (как совершенный прообраз полно метризуемого пространства [56, Теорема 2]).

4.2 Факторизация фазового пространства по гомоморфизму группы

Теорема 4.2.1. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, H — ядро сюрьективного гомоморфизма $\varphi : G \to G'$. Тогда для псевдоравномерности $\mathcal{U}_{G'}$ на X, базу которой образуют покрытия $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{G'}(e)$, имеем:*

I *если действие на X открыто, то*

(b) *факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;*

(c) *действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;*

(d) *равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с открытым действием.*

II *если действие вполне ограничено, то*

(b) *факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто;*

(b+) *равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто;*

(c) *действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ вполне ограничено и d-открыто;*

(d) *равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с вполне ограниченным d-открытым действием.*

III *если гомоморфизм φ — d-открыт, то*

(a) $[x]_{\mathcal{U}_{G'}} = \mathrm{cl}(Hx)$;

(b) *факторотображение X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто;*

(b+) *равномерно факторное отображение X на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто;*

(c) *действие G' на факторпространстве $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто;*

(d) *равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство с d-открытым действием.*

Доказательство. Во всех случаях имеем следующее. Так как семейство покрытий $\gamma_O = \{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{G'}(e)$, является базой инвариантной псевдоравномерности, то по предложению 1.5.1 корректно определены действия G и, значит, G' на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $X/\mathcal{U}_{G'}$. Из леммы 2.2.3 следует, что равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ — G'-пространство.

Случай I. Открытость факторотображения следует из предложения 2.1.5. Кроме того, по предложению 2.1.5 действие G, а значит и G' на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто.

Так как действие на X открыто, то множества $\varphi^{-1}(O)x$, $x \in X$, $O \in N_{G'}(e)$, открыты в топологии, порожденной псевдоравномерностью $\mathcal{U}_{G'}$ на X (они также насыщены по разбиению, порожденному псевдоравномерностью, и образуют базу топологии, порожденной псевдоравномерностью). По предложению 1.1.3 их образы открыты в равномерном факторпространстве $X/\mathcal{U}_{G'}$. Так как для $O \in N_{G'}(e)$ и $x \in X/\mathcal{U}_{G'}$ имеем $Ox = p(\varphi^{-1}(O)y)$, где $y \in p^{-1}x$, то получаем открытость действия G' на равномерном факторпространстве $X/\mathcal{U}_{G'}$.

Случай II. По предложению 2.3.1 действия G на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыты и вполне ограничены, и отображения X на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыты. Легко видеть, что и действия G' на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыты (любое открытое множество G' открыто в G/H, и действие последней корректно определено и d-открыто, так как действие G d-открыто и H принадлежит ядрам обоих действий).

Случай III. Если гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ d-открыт, то тогда для любой окрестности H вида OH, где $O \in N_G(e)$, множество $O' = \mathrm{int}_{G'}(\mathrm{cl}_{G'}(\varphi(O))) \in N_{G'}(e)$ таково, что OH всюду плотно в $\varphi^{-1}(O')$. Тем самым равномерности $\mathcal{U}_H$ и $\mathcal{U}_{G'}$ на X, базу которых составляют покрытия $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(OHx))) : x \in X\}$, $O \in N_G(e)$, и $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\varphi^{-1}(O')x))) : x \in X\}$, $O' \in N_{G'}(e)$, соответственно, совпадают. Из леммы 2.2.1 следует выполнение условия (a).

Для доказательства открытости факторотображения $q : X \to X/E(\mathcal{U}_{G'})$ достаточно проверить, что насыщение

$$\tilde{U} = \bigcup\{\mathrm{cl}(Hx) : \mathrm{cl}(Hx) \cap U \neq \emptyset, x \in X\}$$

любого открытого в X множества U относительно вводимого разбиения $E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто. Легко видеть, что $\mathrm{cl}(Hx) \cap U \neq \emptyset$ в том и только том случае, если $Hx \cap U \neq \emptyset$. Поэтому, если $y \in \mathrm{cl}(Hx) \subset \tilde{U}$, то $\mathrm{cl}(Hy) \subset \tilde{U}$, и $Hy \cap U \neq \emptyset$. Тем самым, $y \in HU$, т.е. $\tilde{U} = HU$ открыто.

Действие G на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ d-открыто по предложению 2.1.5. Так как H принадлежит ядру действия, то действие группы G' также корректно определено и d-открыто.

Факторпространство $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ уплотняется на равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$. Поэтому для любых точки x из фактормножества $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $O \in N_{G'}(e)$ выполнено $\mathrm{cl}_{X/E(\mathcal{U}_{G'})}(Ox) \subset \mathrm{cl}_{X/\mathcal{U}_{G'}}(Ox)$ (пространства $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $X/\mathcal{U}_{G'}$ рассматриваются как фактормножество с разными топологиями). Действие G' d-открыто, поэтому по лемме 2.1.4 существует $V \in N_{G'}(e)$ такой, что $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \subset \mathrm{cl}_{X/E(\mathcal{U}_{G'})}(Ox)$. Тем самым точка x принадлежит внутренности множества $\mathrm{cl}_{X/\mathcal{U}_{G'}}(Ox)$ в топологии, порожденной равномерностью $\mathcal{U}'_{G'}$ на

$X/E(\mathcal{U}_{G'})$ (замечание 2.2.1). По предложению 1.1.3 и замечанию 2.2.1 имеем $x \in \mathrm{int}_{X/\mathcal{U}_{G'}}(\mathrm{cl}_{X/\mathcal{U}_{G'}}(Ox))$, т.е. действие G' на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто.

Так как гомоморфизм φ d-открыт, H принадлежит ядру действия G на $X/\mathcal{U}_{G'}$, то действие G на $X/\mathcal{U}_{G'}$ d-открыто. По предложению 2.1.5 равномерно факторное отображение d-открыто. $\square$

Следствие 4.2.1. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G и пусть гомоморфизм $\varphi : G \to G'$ — открыт. Тогда факторпространство $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ гомеоморфны. Тем самым, равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$ является G'-пространством с открытым действием, и равномерное факторотображение открыто.*

Доказательство. Действие G на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ открыто по предложению 2.1.5. Так как H принадлежит ядру действия, то действие группы G' также открыто.

Факторпространство $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ уплотняется на равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G'}$. Для любых точки x из фактормножества $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $O \in N_{G'}(e)$ множество Ox открыто в топологии, порожденной равномерностью $\mathcal{U}'_{G'}$ на $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ (замечание 2.2.1). Так как множества Ox, $x \in X/E(\mathcal{U}_{G'})$, $O \in N_{G'}(e)$, образуют базу топологии пространства $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и они открыты в топологии пространства $X/\mathcal{U}_{G'}$, то пространства $X/E(\mathcal{U}_{G'})$ и $X/\mathcal{U}_{G'}$ гомеоморфны. $\square$

4.3 Связь семейств отображений на группе и фазовом пространстве

Предложение 4.3.1. *Пусть X — G-пространство со слабо d-открытым действием группы G, и на группе G существует согласованная система $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$, в которой отображения $\varphi_\alpha : G \to G_\alpha$, $\alpha \in A$, (тем самым, и $\varphi_{\beta\alpha} : G_\beta \to G_\alpha$, $\alpha, \beta \in A$) являются гомоморфизмами.*

Тогда системы
$L_p = \{p_\alpha, p_{\beta\alpha}; A\}$, *где* $p_\alpha : X \to X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$ *— равномерно факторное отображение,* $\alpha \in A$, $p_{\beta\alpha} : X/\mathcal{U}_{G_\beta} \to X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$ *и*
$L_q = \{q_\alpha, q_{\beta\alpha}; A\}$, *где* $q_\alpha : X \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$ *— фактороотображение,* $\alpha \in A$, $q_{\beta\alpha} : X/E(\mathcal{U}_{G_\beta}) \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$
являются согласованными и эквивариантными.

Доказательство. Так как $\mathcal{U}_{G_\alpha}$ — инвариантная псевдоравномерность, $\alpha \in A$, то по предложению 1.5.1 равномерное фактороотображение p_α и фактороотображение q_α, $\alpha \in A$, являются эквивариантными.

Если $\beta > \alpha$, то $\mathcal{U}_{G_\beta} > \mathcal{U}_{G_\alpha}$, так как определен гомоморфизм $\varphi_{\beta\alpha} : G_\beta \to G_\alpha$. Значит определено равномерно непрерывное отображение $p'_{\beta\alpha} : (X,\mathcal{U}_{G_\beta}) \to (X,\mathcal{U}_{G_\alpha})$, по которому определяется равномерно непрерывное отображение $(X,\mathcal{U}_{G_\beta})$ на равномерное факторпространство $X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$. Тем самым определено и равномерно непрерывное отображение $p_{\beta\alpha}$ равномерного факторпространства $X/\mathcal{U}_{G_\beta}$ на $X/\mathcal{U}_{G_\alpha}$.

Непрерывность естественно определеного отображения $q_{\beta\alpha} : X/E(\mathcal{U}_{G_\beta}) \to X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha})$ факторпространств при $\beta > \alpha$ вытекает из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
& X/E(\mathcal{U}_{G_\beta}) \arrow[dd, "q_{\beta\alpha}"] \\
X \arrow[ur, "q_\beta"] \arrow[dr, "q_\alpha"'] & \\
& X/E(\mathcal{U}_{G_\alpha}),
\end{tikzcd}$$

где отображения q_β и q_α являются факторными. Условие (2) определения согласованного семейства проверено для семейств L_p и L_q.

Для проверки условия (1) определения согласованного семейства достаточно показать, что семейство отображений $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Легко видеть, что в этом случае семейство отображений $\{q_\alpha : \alpha \in A\}$ также разделяет точки и замкнутые множества. Поэтому диагонали отображений $\Delta\{p_\alpha : \alpha \in A\} : X \to \Pi\{p_\alpha(X) : \alpha \in A\}$ и $\Delta\{q_\alpha : \alpha \in A\} : X \to \Pi\{q_\alpha(X) : \alpha \in A\}$ будут вложениями.

Для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, $x \notin F$ существует $O \in N_G(e)$ такой, что $\mathrm{St}(x, \gamma_O) \cap F = \emptyset$. Так как L — согласованная система гомоморфизмов на G, то существуют $\alpha \in A$ и $U \in N_{G_\alpha}(e)$ такие, что $V = \varphi_\alpha^{-1}(U) \subset O$. Тогда $\mathrm{St}(x, \gamma_V) \cap F = \emptyset$ и $p_\alpha(x) \cap \mathrm{cl}_{p_\alpha(X)}(p_\alpha(F)) = \emptyset$. Доказано, что семейство $\{p_\alpha : \alpha \in A\}$ разделяет точки и замкнутые множества, и, тем самым, семейства L_p и L_q являются согласованными эквивариантными семействами на X. $\square$

Замечание 4.3.1. Согласованные семейства L_q и L_p связаны естественным образом. А именно, существует семейство уплотнений $c_\alpha : q_\alpha(X) \to p_\alpha(X)$, $c_\alpha \circ q_\alpha = p_\alpha$, $\alpha \in A$.

Если для произвольного открытого (соответственно d-открытого, слабо d-открытого) непрерывного действия на пространстве X группы G с топологическим свойством $\mathcal{P}$ пространство X обладает свойством $\mathcal{Q}$, то будем говорить, что *свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны* (соответственно *d-открыто G-связаны, слабо d-открыто G-связаны*).

Естественно из слабо d-открытой G-связи свойств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ следует их d-открытая G-связь, из d-открытой G-связи свойств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ следует их открытая G-связь. Существуют топологические свойства групп, для которых открытость и d-открытость действия эквивалентны. В этом случае из открытой G-связи свойств $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ следует их d-открытая G-связь.

Пример 4.3.1. Свойства, G-связанные (d-)открыто.

(1) свойство метризуемости $\mathcal{M}$ слабо d-открыто G-связано с самим собой (следствие 4.1.1);

(2) свойство сепарабельности и метризуемости $\mathcal{SM}$ слабо d-открыто G-связано (напомним, что рассматриваются действия с одной компонентой и группа отображается на плотное подмножество X) с самим собой;

(3) свойство полной метризуемости $\mathcal{CM}$ d-открыто G-связано с самим собой [71] и [47, Лемма 4];

(4) свойство быть польским пространством d-открыто G-связано с самим собой;

(5) свойство почти метризуемостости группы $\mathcal{AM}$ d-открыто G-связано со свойством $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{M}}}$ (теорема 4.1.3 и замечание 4.1.2);

(6) свойство полноты по Чеху групп $\check{\mathcal{C}}$ d-открыто G-связано со свойством $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{CM}}}$ (теорема 4.1.3 и замечание 4.1.2);

(7) свойство инфраметризуемости групп $\mathcal{IM}$ d-открыто G-связано со свойством $\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}$ (теорема 4.1.3 и замечание 4.1.2).

Теорема 4.3.1. *Пусть G — подгруппа произведения $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ групп G_α, $\alpha \in A$, с конечно мультипликативным (соответственно с τ-мультипликативным) и наследственным по подгруппам свойством $\mathcal{P}$. Если X — G-пространство*

случай I

(A) *с открытым действием и*

(B) *свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны, то*

тогда на X существует согласованная слабо мультипликативная открытая, эквивариантная $cb\mathcal{Q}$-система (соответственно открытая, эквивариантная слабая $\tau_{cb\mathcal{Q}}$-система).

случай II

(A) *с d-открытым, вполне ограниченным действием и*

(B) *свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны, то*

тогда на X существует согласованная d-открытая мультипликативная эквивариантная $\mathcal{Q}$-система (соответственно d-открытая, эквивариантная $\tau_{\mathcal{Q}}$-система).

Доказательство. Семейство A_s — подмножеств индексного множества A направлено по включению. Для $a \in A_s$ проекция φ_a группы G на грань $\Pi\{G_\alpha : \alpha \in a\}$ произведения является гомоморфизмом. Очевидно, если $a, b \in A_s$ и $a > b$, то определен гомоморфизм $\varphi_{ab} : \varphi_a(G) \to \varphi_b(G)$. Тем самым на группе задана согласованная система $L = \{\varphi_a, \varphi_{ba}; A_s\}$ из гомоморфизмов.

По предложению 4.3.1 на X определены согласованные эквивариантные системы:
$L_p = \{p_a, p_{ba}; A_s\}$, где $p_a : X \to X/\mathcal{U}_{\varphi_a(G)}$ — равномерное факторотображение, $a \in A_s$, $p_{ba} : X/\mathcal{U}_{\varphi_b(G)} \to X/\mathcal{U}_{\varphi_a(G)}$, $a, b \in A_s$, $a < b$ и
$L_q = \{q_a, q_{ba}; A_s\}$, где $q_a : X \to X/E(\mathcal{U}_{\varphi_a(G)})$ — факторотображение, $a \in A_s$, $p_{ba} : X/E(\mathcal{U}_{\varphi_b(G)}) \to X/E(\mathcal{U}_{\varphi_a(G)})$, $a, b \in A_s$, $a < b$.

По условию I (A) теоремы и свойству I (b) теоремы 4.2.1 согласованная система L_q является открытой в случае I. По условию II (A) теоремы и свойству II (b+) теоремы 4.2.1 согласованная система L_p является d-открытой в случае II.

Для проверки условия того, что открытая согласованная система L_q является $cb\mathcal{Q}$-системой в случае I и d-открытая согласованная система L_p является $\mathcal{Q}$-системой в случае II достаточно показать, что в обоих случаях семейство отображений $\{p_a : a \in A_s, |a| < \aleph_0\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Легко видеть, что в этом случае семейство отображений $\{q_a : a \in A_s, |a| < \aleph_0\}$ также разделяет точки и замкнутые множества. Поэтому диагонали отоюражений $\Delta\{p_a : p_a(X)$ — со свойством $\mathcal{Q}\} : X \to \Pi\{p_a(X) : p_a(X)$ — со свойством $\mathcal{Q}\}$ и $\Delta\{q_a : q_a(X)$ — со свойством $cb\mathcal{Q}\} : X \to \Pi\{q_a(X) : q_a(X)$ — со свойством $cb\mathcal{Q}\}$ будут вложениями.

Для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, $x \notin F$ существует $O \in N_G(e)$ такой, что $\mathrm{St}(x, \gamma_O) \cap F = \emptyset$. Так как $O \subset \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, то существуют $a \in A_s$, $|a| < \aleph_0$ и $O_\alpha \in N_{G_\alpha}(e)$, $\alpha \in a$ такие, что $U = (\Pi\{O_\alpha : \alpha \in a\} \times \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A \setminus a\}) \cap G \subset O$. Тогда $\mathrm{St}(x, \gamma_U) \cap F = \emptyset$, и $p_a(x) \cap \mathrm{cl}_{p_a(X)}(p_a(F)) = \emptyset$, где $p_a(X)$ — со свойством $\mathcal{Q}$.

Система всех эквивариантных факторотображений $\tilde{L}_q$ (соответственно эквивариантных отображений $\tilde{L}_p$) содержит систему L_q (соответственно L_p) и, поэтому, является $cb\mathcal{Q}$-системой (соответственно $\mathcal{Q}$-системой) в случае I (соответственно в случае II). Естественный порядок на $\tilde{L}_q$ (соответственно $\tilde{L}_p$) делает ее согласованной и слабо мультипликативной (соответственно мультипликативной (так как диагональ эквивариантных отображений эквивариантна)). Ее открытость (соответственно d-открытость) в случае I (соответственно в случае II) следует из предложения 2.1.5 (соответственно предложения 2.3.1).

Если свойство $\mathcal{P}$ τ-мультипликативно и наследственно по подгруппам, то рассматривая в качестве направленного множества A_τ — подмножества A мощности $\leq \tau$, и проводя аналогичные построения, получаем на G $\tau_{\mathcal{P}}$-систему из гомоморфизмов. Очевидно, что $A_\tau \subset A_s$. Соответствующие согласованные системы L_q^τ и L_p^τ — подсистемы L_q и L_p соответственно. Остается проверить лишь их τ-полноту.

Для любой τ-цепи $A' \subset A_\tau$, $|A'| \leq \tau$, существует $a^* = \sup A'$, $a^* \in A_\tau$. Отображение p_{a^*} является равномерно факторным отображением по псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\varphi_{a^*}(G)}$, базу которой составляют покрытия $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}((\varphi_{a^*}^{-1}O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{\varphi_{a^*}(G)}(e)$. Так как $\varphi_{a^*}(G)$ вложено в произведение $\Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in a^*\}$, то O (после вложения) можно считать прямоугольным множеством вида $\Pi\{O_{\alpha_k} : \alpha_k \in a^*, k = 1, \ldots, m\} \times \Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in a^*, \alpha \neq \alpha_k, k = 1, \ldots, m\} \cap \varphi_{a^*}(G)$. Так как A' является цепью, то существует $a^{**} \in A'$ такой, что $\alpha_k \in a^{**}$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому множество O можно считать имеющим вид $\varphi_{a^* a^{**}}^{-1} U$, $U \in \varphi_{a^{**}}(G)$. Показано, что псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\varphi_{a^*}(G)}$ инициальна семейству псевдоравномерностей $\mathcal{U}_{\varphi_a(G)}$, $a \in A'$. Тем самым, диагональ отображений $\Delta\{p_{a^* a} : a \in A'\}$ является вложением [103, Предложение 0.17]. Доказана τ-полнота системы L_p^τ в обоих случаях. Из замечания 4.3.1 вытекает слабая τ-полнота системы L_q^τ. $\square$

Следствие 4.3.1. *Пусть X — G-пространство, и G — $\aleph_0$-ограниченная группа (соответственно $\aleph_0$-уравновешенная группа, подгруппа произведения инфраметризуемых групп).*

I *Если действие открыто, то тогда на X существует согласованная слабо мультипликативная открытая, эквивариантная $cb\mathcal{SM}$-система (соответственно $cb\mathcal{M}$-система, $cb\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}$-система) и открытая, эквивариантная слабая $\sigma_{cb\mathcal{SM}}$-подсистема (соответственно $\sigma_{cb\mathcal{M}}$-подсистема, $\sigma_{cb\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}}$-подсистема).*

II *Если действие d-открыто и вполне ограничено, то тогда на X существует согласованная d-открытая мультипликативная эквивариантная $\mathcal{SM}$-система (соответственно $\mathcal{M}$-система, $\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}$-система) и d-открытая, эквивариантная $\sigma_{\mathcal{SM}}$-подсистема (соответственно $\sigma_{\mathcal{M}}$-подсистема, $\sigma_{\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}}$-подсистема).*

Замечание 4.3.2. В следствии 4.3.1 в I случае, когда группа G, являющаяся $\aleph_0$-уравновешенной группой, открыто действует на G-пространстве X, пространство X является od-пространством [34, Предложение 9]; во II случае, когда группа G, являющаяся являющаяся $\aleph_0$-уравновешенной группой, d-открыто, вполне ограничено действует на G-пространстве X, пространство X является d-пространством [18, Теорема 5].

Если $\aleph_0$-уравновешенная группа равномерно локально G-равномерно действует на G-пространстве X, и максимальная эквиравномерность вполне ограничена, то действие вполне ограничено и продолжается до d-открытого действия на бикомпакте Дугунджи $\beta_G X$ [18, Теорема 6] и [19, Замечание 12]. В частности, если $\aleph_0$-уравновешенная группа d-открыто действует на псевдокомпактном G-пространстве X, то это действие равномерно локально G-равномерно по лемме 2.3.1. Тем самым оно продолжается до d-открытого действия на бикомпакте Дугунджи $\beta X = \beta_G X$ [18, Следствие 9].

Так как транзитивное действие $\aleph_0$-ограниченной группы на псевдокомпактном G-пространстве X d-открыто [34, Лемма 9], то X — d-пространство, βX — бикомпакт Дугунджи [34, Теорема 2] и $\beta X = \beta_G X$.

Следствие 4.3.2. *Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым, вполне ограниченным действием группы G, являющейся подгруппой* *произведения инфраметризуемых групп. Тогда X — $\varkappa$-метризуемое пространство, βX — открытопорожденный бикомпакт. В частности, бикомпактное факторпространство подгруппы произведения полных по Чеху групп является открытопорожденным бикомпактом.*

Если X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием группы G, являющейся подгруппой произведения инфраметризуемых групп, и максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена, то X — $\varkappa$-метризуемо, и $\beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт с d-открытым действием замкнутой подгруппы произведения полных по Чеху групп. В частности, если X — псевдокомпактное G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием группы G, являющейся подгруппой произведения инфраметризуемых групп, то X — $\varkappa$-метризуемо, и $\beta X = \beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт.

Доказательство. Если d-открытое действие на псевдокомпакте X вполне ограничено, то по следствию 4.3.1 на X существует d-открытая, эквивариантная $\sigma_{\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}}$-подсистема $L_p^\sigma \subset L_p$. Более того, на каждом псевдокомпакте $Y_\alpha = p_\alpha(X)$, $p_\alpha \in L_p^\sigma$ непрерывно, d-открыто и вполне ограничено действует инфраметризуемая группа. По следствию 4.1.2 Y_α — $\varkappa$-метризуемо, и βY_α — открытопорожденный бикомпакт. Псевдокомпактное пространство X является G_δ-плотным подмножеством обратного предела Z соответствующего σ-полного спектра из открытопорожденных бикомпактов Y_α. Спектр открыт по леммам 1 и 4 из [34]. По теоремам 19 и 25 из [45] Z — открытопорожденный бикомпакт. Значит X — $\varkappa$-метризуемо, и $Z = \beta X$ [109, Следствие 2].

Если X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием, и максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена, то по следствию 3.5.2 действие группы G на $\beta_G X$ d-открыто и вполне ограничено. По предыдущему утверждению теоремы $\beta_G X$ — открытопорожденный бикомпакт. Значит X — $\varkappa$-метризуемо. Действие G на $\beta_G X$ продолжается до действия $\hat{G}$ [87]. Так как G — подгруппа произведения Π инфраметризуемых групп, то $\hat{G} = \mathrm{cl}_{\hat{\Pi}} G$ и $\hat{\Pi}$ есть произведение пополнений по двусторонней равномерности сомножителей (см., например, [53]), которые будут полными по Чеху группами.

В случае псевдокомпактного пространства X дополнительно имеем $\beta_G X = \beta X$ [109, Следствие 2]. $\square$

Замечание 4.3.3. В случае бикомпактного пространства X в следствии 4.3.2 X является пределом σ-полного спектра из алгебраически однородных пространств (факторпространств полных по Чеху групп).

Теорема 4.3.2. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, на которой существует $\tau_{\mathcal{P}}$-система гомоморфизмов $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\alpha\beta}; A\}$.*

Случай (III)

(B) *Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны;*

(C) *система L — d-открыта, то*

тогда система L_q (соответственно система L_p) отображений на X является открытой, эквивариантной слабо $\tau_{cb\mathcal{Q}}$-системой (соответственно d-открытой, эквивариантной $\tau_{\mathcal{Q}}$-системой).

Случай (IV)

(B) *Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны;*

(C) *система L — открыта, то*

тогда система $L_q = L_p$ отображений на X является открытой, эквивариантной $\tau_{\mathcal{Q}}$-системой.

Доказательство. В обоих случаях III и IV по предложению 4.3.1 на X существуют согласованные системы эквивариантных отображений L_p и L_q.

По условиям III (C) теоремы и III (b), (b+) теоремы 4.2.1 (соответственно IV (C) теоремы и следствия 4.2.1) система L_q является открытой, а система L_p d-открытой в случае III (соответственно $L_q = L_p$ — открытая система в случае IV).

По условиям III (B) теоремы и III (b) теоремы 4.2.1 (соответственно IV (B) теоремы и следствия 4.2.1) в согласованной системе L_q все образы при отображениях q_α являются пространствами со свойством $cb\mathcal{Q}$, и в системе L_p все образы при отображениях p_α являются пространствами со свойством $\mathcal{Q}$ в случае III (соответственно в согласованной системе $L_q = L_p$ все образы при отображениях $q_\alpha = p_\alpha$ являются пространствами со свойством $\mathcal{Q}$).

Для любой τ-цепи $A' \subset A_\tau$, $|A'| \leq \tau$, существует $a^* = \sup A'$, $a^* \in A$. Отображение p_{a^*} является равномерно факторным отображением по псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\varphi_{a^*}(G)}$, базу которой составляют покрытия $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}((\varphi_{a^*}^{-1}O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{\varphi_{a^*}(G)}(e)$. Так как $\varphi_{a^*}(G)$ вложено в произведение $\Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A'\}$, то O (после вложения $i = \Delta\{\varphi_\alpha : \alpha \in A'\}$) можно считать прямоугольным множеством вида $\Pi\{O_{\alpha_k} : \alpha_k \in A', k = 1, \ldots, m\} \times \Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A', \alpha \neq \alpha_k, k = 1, \ldots, m\} \cap i(\varphi_{a^*}(G))$. Так как A' является цепью, то существует $a^{**} \in A'$ такой, что $\alpha_k \in a^{**}$, $k = 1, \ldots, m$. Поэтому множество O можно считать имеющим вид $\varphi_{a^*a^{**}}^{-1}U$, $U \in \varphi_{a^{**}}(G)$. Показано, что псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\varphi_{a^*}(G)}$ инициальна семейству псевдоравномерностей $\mathcal{U}_{\varphi_a(G)}$, $a \in A'$. Тем самым, диагональ отображений $\Delta\{p_{a^*a} : a \in A'\}$ является вложением [103, Предложение 0.17]. Доказана τ-полнота системы L_p^τ в обоих случаях. Из замечания 4.3.1 вытекает слабая τ-полнота системы L_q^τ в случае III. $\square$

Следствие 4.3.3. *Общее условие* (B) *может быть опущено в обоих случаях* теоремы 4.3.2, *если рассматривать в качестве свойства $\mathcal{P}$ или свойство $\mathcal{SM}$, или $\mathcal{M}$, или $\check{\mathcal{C}}$, или $\mathcal{AM}$, или $\mathcal{IM}$, и в качестве свойства $\mathcal{Q}$ или $\mathcal{SM}$, или $\mathcal{M}$, или $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{SM}}}$, или $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{M}}}$, или $\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}$ соответственно.*

Замечание 4.3.4. Пусть на группе G существует d-открытая $\sigma_{\mathcal{SM}}$-система гомоморфизмов L. Если действие на G-пространстве X d-открыто, то тогда пространство X является d-открыто порожденным.

Теорема 4.3.3. *Пусть X — G-пространство с d-открытым действием группы G, на которой существует согласованная мультипликативная $\mathcal{P}$-система гомоморфизмов $L = \{\varphi_\alpha, \varphi_{\beta\alpha}; A\}$. Пусть, также, для любого ко-*

нечного подмножества a множества $A_{\mathcal{P}} = \{\alpha \in A : \varphi_\alpha(G)$ — со свойством $\mathcal{P}\}$ A, $\sup a \in A_{\mathcal{P}}$.

Случай (III)

(B) *Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ d-открыто G-связаны;*

(C) *система L — d-открыта, то*

тогда система L_q (соответственно система L_p) отображений на X является согласованной открытой, эквивариантной $cb\mathcal{Q}$-системой (соответственно d-открытой, эквивариантной $\mathcal{Q}$-системой).

Случай (IV)

(B) *Если свойства $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ открыто G-связаны;*

(C) *система L — открыта, то*

тогда система $L_q = L_p$ отображений на X является согласованной открытой, эквивариантной $\mathcal{Q}$-системой.

Если, дополнительно, для любых $\alpha_k \in A$, $k = 1, \ldots, m$, псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\varphi_{\alpha^{**}}(G)}$ на X, где $\alpha^{**} = \sup\{\alpha_k : k = 1, \ldots, m\}$ инициальна относительно равномерно факторных отображений p_{α_k}, $k = 1, \ldots, m$, то тогда система L_p в обоих случаях мультипликативна, а система L_q в случае III слабо мультипликативна.

Доказательство. По предложению 4.3.1 в случаях III и IV существуют согласованные системы эквивариантных отображений L_p и L_q.

По условиям III (C) теоремы и III (b) теоремы 4.2.1 (соответственно условиям IV (C) теоремы и следствия 4.2.1) система L_q является открытой, и система L_p является d-открытой в случае III (соответственно $L_q = L_p$ является открытой системой в случае IV).

Для проверки условия того, что система L_q является $cb\mathcal{Q}$-системой; система L_p является $\mathcal{Q}$-системой в случае III, и система L_q является $\mathcal{Q}$-системой в случае IV достаточно показать, что в обоих случаях семейство отображений

$\{p_\alpha : \alpha \in A_\mathcal{P}\}$ разделяет точки и замкнутые множества. Тогда, как легко видеть, семейство отображений $\{q_\alpha : \alpha \in A_\mathcal{P}\}$ также разделяет точки и замкнутые множества. Поэтому диагонали отображений $\Delta\{p_\alpha : \alpha \in A_\mathcal{P}\} : X \to \Pi\{p_\alpha(X) : \alpha \in A_\mathcal{P}\}$ и $\Delta\{q_\alpha : \alpha \in A_\mathcal{P}\} : X \to \Pi\{q_a(X) : \alpha \in A_\mathcal{P}\}$ будут вложениями.

Для любой точки $x \in X$ и любого замкнутого множества $F \subset X$, $x \notin F$ существует $O \in N_G(e)$ такой, что $\mathrm{St}(x, \gamma_O) \cap F = \emptyset$. Так как G вложена в $\Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A_\mathcal{P}\}$ ($i = \Delta\{\varphi_\alpha : \alpha \in A_\mathcal{P}\}$ — вложение), то существуют $\alpha_k \in A_\mathcal{P}$ и $O_{\alpha_k} \in N_{\varphi_{\alpha_k}(G)}(e)$, $k = 1, \ldots, m$, такие, что $U = (\Pi\{O_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, m\} \times \Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A_\mathcal{P} \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}\}) \cap i(G) \subset i(O)$. Тогда $\mathrm{St}(x, \gamma_{i^{-1}U}) \cap F = \emptyset$. Для $\alpha^* = \sup\{\alpha_k : k = 1, \ldots, m\} \in A_\mathcal{P}$ существует $V \in N_{\varphi_{\alpha^*}(G)}(e)$ такой, что $\Delta\{\varphi_{\alpha^*\alpha_k} : k = 1, \ldots, m\}(V) \subset \Pi\{O_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, m\} \cap \Delta\{\varphi_{\alpha_k} : k = 1, \ldots, m\}(G)$. Тогда $O \supset \varphi_{\alpha^*}^{-1}V$, $p_{\alpha^*}(x) \cap \mathrm{cl}_{p_{\alpha^*}(X)}(p_{\alpha^*}(F)) = \emptyset$ и $p_{\alpha^*}(X)$ со свойством $\mathcal{Q}$.

Проверим (слабую) мультипликативность систем L_q и L_p при дополнительных предположениях. Для $A' \subset A$ пусть $\alpha^* = \sup A'$. Покажем, что в обоих случаях псевдоравномерность $\mathcal{U}_{\varphi_{\alpha^*}(G)}$ на X инициальна относительно равномерно факторных отображений p_α, $\alpha \in A'$. Тогда диагональ отображений $\Delta\{p_{\alpha^*\alpha} : \alpha \in A'\}$ будет вложением [103, Предложения 0.17], и диагональ отображений $\Delta\{q_{\alpha^*\alpha} : \alpha \in A'\}$ будет инъективна.

Легко видеть, что отображения $p_{\alpha\beta} : p_\alpha(X) \to p_\beta(X)$ при $\alpha > \beta$ равномерно непрерывны. Поэтому и диагональ отображений $\Delta\{p_{\alpha^*\alpha} : \alpha \in A'\}$ равномерно непрерывна. База псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\varphi_{\alpha^*}(G)}$ на X состоит из покрытий $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}((\varphi_{\alpha^*}^{-1}O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{\varphi_{\alpha^*}(G)}(e)$. Зафиксируем покрытие $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}((\varphi_{\alpha^*}^{-1}O)x)) : x \in X\}$, $O \in N_{\varphi_{\alpha^*}(G)}(e)$. Так как $\varphi_{\alpha^*}(G)$ вложено в $\Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A'\}$ ($i = \Delta\{\varphi_\alpha : \alpha \in A'\}$ — вложение), то существует $U \subset \Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A'\}$ такое, что $i(O) = U \cap i(G)$. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что $U = \Pi\{O_k \in N_{\varphi_{\alpha_k}}(G)(e) : k = 1, \ldots, m\} \times \Pi\{\varphi_\alpha(G) : \alpha \in A' \setminus \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}\}$. Поэтому, используя рассуждения уже применяемые в подобных случаях, получаем, что покрытие

$\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}((\varphi_{\alpha^*}^{-1}O)x)) : x \in X\}$ пространства X принадлежит псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\varphi_{\alpha^{**}}(G)}$, где $\alpha^{**} = \sup\{\alpha_k : k = 1, \ldots, m\}$. Из дополнительного условия теоремы следует, что покрытие $\{\mathrm{int}(\mathrm{cl}((\varphi_{\alpha^*}^{-1}O)x)) : x \in X\}$ принадлежит псевдоравномерности, инициальной относительно равномерно факторных отображений p_{α_k}, $k = 1, \ldots, m$. Тем самым произвольное покрытие псевдоравномерности $\mathcal{U}_{\varphi_{\alpha^*}(G)}$ на X принадлежит псевдоравномерности, инициальной относительно отображений p_α, $\alpha \in A'$. $\square$

Следствие 4.3.4. *Общее условие* (B) *в обоих случаях* теоремы 4.3.3 *можно опустить, если в качестве свойства $\mathcal{P}$ рассматривать или свойство $\mathcal{SM}$, или $\mathcal{M}$, или $\check{\mathcal{C}}$, или $\mathcal{AM}$, или $\mathcal{IM}$, и в качестве свойства $\mathcal{Q}$ рассматривать или свойство $\mathcal{SM}$, или $\mathcal{M}$, или $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{CM}}}$, или $\mathcal{IM}_{op\sigma_{\mathcal{M}}}$, или $\mathcal{IM}_{d-o\sigma_{\mathcal{M}}}$ соответственно.*

Замечание 4.3.5. Дополнительное условие в теореме 4.3.3 — условие на действие. Условия, которые накладываются на согласованную систему гомоморфизмов на группе в теоремах 4.3.2, 4.3.3 и следствиях 4.3.3, 4.3.4 не являются чем-то особенным. Этому условию удовлетворяет например σ-подгруппа произведения групп с конечно мультипликативным и наследственным по подгруппам свойством $\mathcal{P}$. В частности, σ-подгруппа произведения (сепарабельных) метризуемых групп или инфраметризуемых групп.

В случае согласованной мультипликативной $\mathcal{M}$-системы гомоморфизмов L группы G и G-пространства X, удовлетворяющих условиям следствия 4.3.4, пространство X является od-пространством.

4.4 Замена действующей группы с сохранением d-открытости действия

Замечание 4.4.1. Отметим, что для доказательства того, что $\beta_G X$ — бикомпакт Дугунджи во втором утверждении следствия 3.5.9 вместо результата Пасынкова, можно воспользоваться подходом Чобана [40], [41], позволяющим заменять открытое действие полной по Чеху группы на открытое действие $\aleph_0$-ограниченной группы, а затем применить [33, Теорему 1].

Следствие 4.4.1. *Если X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием инфраметризуемой группы G и максимальная эквиравномерность на X вполне ограничена, то тогда единственная G-бикомпактификация $\beta_G X$ — факторпространство $\aleph_0$-ограниченной группы.*

Доказательство. По следствию 3.5.9 $\beta_G X$ — факторпространство полной по Чеху группы $\hat{G}$. По следствию 3 [40] существует подмножество $T \subset \hat{G}$ такое, что $\pi T = \beta_G X$ и ограничение факторотображения π на T соверешенно. Тем самым T — бикомпакт, и порожденная им подгруппа будет σ-бикомпактной, а значит и $\aleph_0$-ограниченной подгруппой $\hat{G}$. Очевидно, что $\beta_G X$ является ее факторпространством. □

Теорема 4.4.1. *Пусть X — G-пространство с равномерно локально G-равномерным действием $\aleph_0$-уравновешенной группы и вполне ограниченной максимальной эквиравномерностью. Тогда на группе G/H, где H — ядро действия, существует более слабая топология, в которой группа G/H — $\aleph_0$-ограничена, и естественно определенное действие G/H на X непрерывно и равномерно локально G-равномерно.*

Доказательство. Пусть $G = \Pi\{G_\alpha : \alpha \in A\}$, где G_α — метризуемо, и для проекций $\varphi_\alpha : G \to G_\alpha$ (являющихся гомоморфизмами) выполнено $\varphi_\alpha(G) = G_\alpha$, $\alpha \in A$.

По следствию 3.5.2 действие G на $\beta_G X$ равномерно локально G-равномерно. Поэтому оно d-открыто и вполне ограничено. По следствию 4.3.1 на $\beta_G X$ существует d-открытая, эквивариантная $\sigma_{\mathcal{M}}$-система $L_p^\sigma = \{p_a, p_{ba}; A_\sigma\}$, где

A_σ — направленное множество счетных подмножеств A;

$p_a : \beta_G X \to X_a = \beta_G X/\mathcal{U}_{G_a}$ (где $\varphi_a : G \to \Pi\{G_\alpha : \alpha \in a\}$ — проекция, и $G_a = \varphi_a(G)$) — равномерно факторное отображение, $a \in A_\sigma$;

$p_{ba} : X_b \to X_a$, $a, b \in A_\sigma$, $a < b$.

По теореме 4.2.1 компакт X_a — G-пространство с d-открытым, вполне ограниченным действием группы G_a, $a \in A_\sigma$. Обозначим через H_a ядро действия группы G_a на X_a, $a \in A_\sigma$. Тогда факторгруппа G_a/H_a изоморфна подгруппе P_a гомеоморфизмов $\mathcal{H}_{\ co}(X_a)$, $a \in A_\sigma$. Изоморфизм непрерывен, так как компактно-открытая топология является наименьшей топологией на группе гомеоморфизмов бикомпактного пространства, в которой действие непрерывно [52]. Группа $\mathcal{H}_{\ co}(X_a)$ — польское пространство, так как X_a — компакт. Значит P_a — сепарабельная метризуемая группа, $a \in A_\sigma$. Через ψ_a обозначим непрерывный гомоморфизм группы G на P_a, $a \in A_\sigma$.

Подгруппа $H = \cap\{\varphi_a^{-1}(H_a) : a \in A_\sigma\} = \cap\{\mathrm{Ker}\ \psi_a : a \in A_\sigma\}$ принадлежит ядру действия группы G на X. Действительно, если $g \in H$ и существует $x \in X$ такая, что $gx \neq x$ то, так как L_p^σ — согласованная система отображений на $\beta_G X$, существует $a \in A_\sigma$ для которого $p_a(x) \neq p_a(gx)$. В силу эквивариантности отображения p_a следует, что $p_a(x) \neq gp_a(x)$. Значит $\varphi_a(g) \notin H_a$. Легко видеть, что H совпадает с ядром действия группы G на $\beta_G X$ (образ ядра действия при гомоморфизме будет ядром действия на эквивариантном образе).

Так как $H = \cap\{\mathrm{Ker}\ \psi_a : a \in A_\sigma\}$, то для диагонали отображений $\Delta\{\psi_a : a \in A_\sigma\} : G \to \Pi\{P_a : a \in A_\sigma\}$ существует непрерывный изоморфизм ψ факторгруппы G/H на подгруппу $\Pi\{P_a : a \in A_\sigma\}$. Тем самым $\psi(G/H)$ — $\aleph_0$-ограниченная группа, и ее естественное действие на $\beta_G X$ очевидно d-открыто. Обозначим через π_a ограничение проекции произведения $\Pi\{P_a : a \in A_\sigma\}$ на подгруппу $\psi(G/H)$, $a \in A_\sigma$.

Для любой точки $x \in X$ и ее окрестности O_x существует $a \in A_\sigma$ такой, что $p_a(x) \notin \mathrm{cl}_{X_a}(p_a(X \setminus O_x))$ (так как L_p^σ — согласованная система). Так как действие P_a на X_a непрерывно, то существуют окрестность W точки $p_a(x)$ и $O \in N_{P_a}(e)$ такие, что $OW \subset X_a \setminus \mathrm{cl}_{X_a}(p_a(X \setminus O_x))$. Тогда для окрестности $p_a^{-1}(W)$ точки x и окрестности $\pi_a^{-1}(O)$ единицы в группе $\psi(G/H)$ имеем $x \in \pi_a^{-1}(O)p_a^{-1}(W) \subset O_x$, в силу эквивариантности отображения p_a. Это доказывает непрерывность действия группы $\psi(G/H)$ на $\beta_G X$.

Инвариантность подмножества X в $\beta_G X$ и следствие 3.5.2 завершают доказательства. $\square$

Из теоремы 4.4.1 и леммы 2.3.1 следует.

Следствие 4.4.2. *Пусть X — псевдокомпактное G-пространство с d-открытым действием $\aleph_0$-уравновешенной группы. Тогда на факторгруппе G/H, где H — ядро действия, существует более слабая топология, в которой группа G/H — $\aleph_0$-ограничена, и естественно определенное действие G/H на X непрерывно и d-открыто.*

Глава 5

Топология действий и однородность

В 5 главе для подмножества A пространства X и подгруппы H группы гомеморфизмов $\mathcal{H}\ (X)$ через H_A обозначается подгруппа гомеоморфизмов H, ограничение каждого из которых на A является тождественным отображением.

5.1 Сильная локальная однородность

5.1.1 Обобщение сильной локальной однородности

Введем понятие локально плотно однородного пространства.

Определение 5.1.1. Пространство X назовем *локально плотно однородным* (сокращенно LDH), если существует его открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $\mathcal{H}\ (X)_{X \setminus B}x$ всюду плотно в B.

Нульмерное пространство называется *h-однородным* [25] или *сильно однородным* [90], если все непустые открыто-замкнутые подмножества гомеоморфны. Пространство X называется *сильно локально однородным* (сокращенно SLH) [65], если существует его открытая база $\mathcal{B}$ такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $\mathcal{H}\ (X)_{X \setminus B}x$ совпадает с B.

Замечание 5.1.1. Любое h-однородное или SLH пространство является LDH пространством.

Для LDH (соответственно SLH) пространства X подгруппу $H < \mathcal{H}\ (X)$ назовем LDH (соответственно SLH) *группой*, если существует открытая база

$\mathcal{B}$ пространства X (называемая LDH(H) (соответственно SLH(H)) *базой*) такая, что для любых элемента $B \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B$ множество $H_{X \setminus B}x$ всюду плотно в B (соответственно множество $H_{X \setminus B}x$ совпадает с B).

Лемма 5.1.1. *Пусть X — однородное пространство, $H < \mathcal{H}(X)$, и $\mathcal{O}$ — база в точке $x \in X$ такие, что для любого элемента $O \in \mathcal{O}$ множество $H_{X \setminus O}x$ совпадает с O и $Hx = X$. Тогда X является SLH пространством, и H — SLH группа X.*

Доказательство. Легко проверить, что семейство открытых множеств $\{gO : g \in H, O \in \mathcal{O}\}$ является искомой SLH(H) базой пространства X, и $H_{X \setminus gO} = gH_{X \setminus O}g^{-1}$, $g \in H$. Значит H — SLH группа X. □

Лемма 5.1.2. *Пусть X – LDH пространство, H — LDH группа X. Тогда для любых точек $x, y \in X$ или $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy))$, или $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy)) = \emptyset$.*

Доказательство. Легко видеть, что $Hx \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx))$ для любой точки $x \in X$. Если $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy)) \neq \emptyset$, то существует элемент $g \in H$ такой, что $gx \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy))$ (так как Hx всюду плотно в $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx))$ и множество $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy))$ открыто). Поэтому, используя лемму 1.5.1, имеем $Hx = Hgx \subset H\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy)) \subset \mathrm{cl}(Hy)$. Значит $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy))$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx))$. Тем самым в случае, когда $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) \cap \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy)) \neq \emptyset$ имеем $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx)) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hy))$. □

Замечание 5.1.2. Для LDH пространства X и его LDH группы H множество вида $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(Hx))$, $x \in X$, назовем LDH(H) *компонентой* X. Каждая LDH(H) компонента является открыто-замкнутым подмножеством X, и X является дизъюнктным объединением LDH(H) компонент.

Теорема 5.1.1. *Пусть X – LDH пространство, H — LDH группа X, и bX – произвольная бикомпактификация X, на которую продолжаются гомео-*

морфизмы из H. Тогда для топологической группы H, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{co}(bX)$, и для любой LDH(H) базы $\mathcal{B}$ на X имеем

(T1) *для любых точки $x \in X$ и элемента $O \in N_H(e)$ существует элемент $B \in \mathcal{B}$ такой, что $x \in B$ и $H_{X\setminus B} \subset O$,*

(T2) *действие $\alpha : H \times X \to X$ непрерывно и d-открыто (действие H на bX непрерывно и d-открыто в точках X),*

(T3) *для любого элемента $B \in \mathcal{B}$ ограничение действия $\alpha_B : H_{X\setminus B} \times B \to B$ d-открыто,*

(T4) *LDH(H) компоненты X совпадают с компонентами действия α.*

Доказательство. Непрерывность действия группы $\mathcal{H}_{co}(bX)$ на bX и подгрупп $\mathcal{H}_{co}(bX)$ на инвариантных множествах следует из [52]. Возьмем произвольную LDH(H) базу $\mathcal{B}$ на X. Если $O \in N_H(e)$, то (см., например, [46, Теорема 8.2.6]) тогда существует конечное открытое покрытие ω пространства X (продолжаемое до покрытия bX) такое, что

$$\{g \in H : (\forall x \in X)(\exists W \in \omega)(x \& gx \in W)\} \subset O.$$

Для любых непустого открытого подмножества U в X (в частности, $U = X$), точки $x \in U$, ее окрестности $B \in \mathcal{B}$, где $B \subset U$, и элемента $O \in N_H(e)$ выберем $B' \in \mathcal{B}$ таким образом, что $x \in B' \subset (W \cap B)$ для некоторого элемента $W \in \omega$. Тогда $H_{X\setminus B'} \subset O \cap H_{X\setminus B}$. Более того, $x \in B' = \mathrm{int}(\mathrm{cl}(H_{B'}x)) \subset \mathrm{int}(\mathrm{cl}((O \cap H_B)x))$. Тем самым доказаны d-открытость действия α (если взять $U = X$) и ограничения действия α_B (если взять $U = B$). По предложению 2.1.3 продолжение действия H на bX d-открыто в точках X. Совпадение компонент очевидно. $\square$

Замечание 5.1.3. Ход доказательства теоремы 5.1.1 позволяет показать, что действие топологической группы $\mathcal{H}(X)$, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{co}(\beta X)$, на SLH пространстве X открыто [96]. Тем самым, любое однородное SLH пространство является алгебраически однородным [65].

Предложение 5.1.1. *Пусть X — сильно нульмерное h-однородное пространство. Тогда βX — LDH пространство, и действие топологической группы $\mathcal{H}\,(X)$, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\,co}(\beta X)$, на βX d-открыто. Кроме того βX – единственная G-бикомпактификация X.*

Доказательство. Если X — сильно нульмерное h-однородное пространство, то легко показать, что его Стоун-Чеховская бикомпактификация βX h-однородна и подгруппа $\mathcal{H}\,(X)$ группы $\mathcal{H}\,(\beta X)$ реализует h-однородность βX. Тем самым $\mathcal{H}\,(X)$ — LDH группа βX. Остается сослаться на теорему 5.1.1. □

Замечание 5.1.4. Заметим, что последнее утверждение предложения 5.1.1 может быть доказано используя те же рассуждения, что и при доказательстве утверждения о том, что пространство рациональных чисел $\mathbb{Q}$ с действием группы $\mathcal{H}_{\,co}(\beta\mathbb{Q})$ имеет единственную G-бикомпактификацию $\beta\mathbb{Q}$ [17, Пример 2].

Пусть $\beta\mathbb{Q}$ — бикомпактификация Стоуна–Чеха пространства рациональных чисел. В качестве действующей группы G рассмотрим группу всех гомеоморфизмов $\beta\mathbb{Q}$ в компактно-открытой топологии. Заметим, что, так как характер точек из $\mathbb{Q}$ счетен, а из нароста $\beta\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Q}$ несчетен, то ни при каком $g\in G$ точка из $\mathbb{Q}$ не может отобразиться в точку из нароста. Значит $\mathbb{Q}$ — всюду плотное инвариантное подмножество, которое можно рассматривать как G-пространство, а $\beta\mathbb{Q}$ — его максимальное бикомпактное G-расширение.

Из [52, Теорема 6] следует, что группа G полна относительно двусторонней равномерности. Поэтому $\mathbb{Q}^{\hat{G}}=\mathbb{Q}^{G}=\mathbb{Q}\subset\beta\mathbb{Q}$. При этом $\beta\mathbb{Q}_G=\beta\mathbb{Q}$.

Из следствий 3.5.3 и 3.5.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 5.1.1. *Если X — LDH пространство, T — LDH группа X, и bX — бикомпактификация X, на которую продолжаются гомеоморфизмы из T, такие, что действие группы T, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\,co}(bX)$, на bX d-открыто, то bX — единственная T-бикомпактификация для действия топологической группы T и минимальная T-бикомпактификация для действия группы T в дискретной топологии.*

Если X — сильно нульмерное h-однородное пространство, то тогда βX — единственная бикомпактификация X, на которую продолжаются все гомеоморфизмы из $\mathcal{H}\ (X)$ (действующая группа $\mathcal{H}\ (X)$ рассматривается в дискретной топологии) [63].

Лемма 5.1.3. *Для LDH пространства X веса $\leq \theta$, $\theta \geq \omega_0$, существует LDH группа H мощности $\leq \theta$ такая, что LDH(H) и LDH($\mathcal{H}\ (X)$) компоненты совпадают.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}$ – LDH($\mathcal{H}\ (X)$) база такая, что $|\mathcal{B}| \leq \theta$. Считаем, что все LDH($\mathcal{H}\ (X)$) компоненты являются элементами $\mathcal{B}$. Так как $|\mathcal{B}| \leq \theta$, то для любых $B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}$, где $B_\beta \subset B_\alpha$, существует подмножество $T(\alpha, \beta) \subset H_{X \setminus B_\alpha} \subset \mathcal{H}\ (X)$ мощности $\leq \theta$ такое, что $B_\alpha = T(\alpha, \beta) B_\beta$. Через H обозначим группу, порожденную множеством $\bigcup\{T(\alpha, \beta) : B_\alpha, B_\beta \in \mathcal{B}, B_\beta \subset B_\alpha\}$. Очевидно, что $|H| \leq \theta$. Для любых элемента $B_\alpha \in \mathcal{B}$ и точки $x \in B_\alpha$ возьмем произвольное открытое подмножество $O \subset B_\alpha$. Существует элемент $B_\beta \in \mathcal{B}$ такой, что $B_\beta \subset O$. Тогда существует $g \in T(\alpha, \beta)$ такой, что $x \in g B_\beta \subset gO$. Тем самым $g^{-1}x \in O$ и $g^{-1} \in H_{X \setminus B_\alpha}$. Значит H — LDH группа X. Совпадение компонент очевидным образом вытекает из построения группы H. $\square$

Лемма 5.1.4. *Пусть X — пространство веса $\leq \theta$, $\theta \geq \omega_0$, с действием дискретной группы G мощности $\leq \theta$. Тогда у X существует G-бикомпактификация bX веса $\leq \theta$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F} = \{f_\alpha : X \to I = [0,1] : \alpha \in \mathcal{A}\}$, $|\mathcal{A}| = \theta$, — семейство отображений, разделяющих точки и замкнутые множества. Можем считать, что семейство насыщено (т.е. $\mathcal{F} = G\mathcal{F}$, где на G-пространстве $C(X, I)$ определено естественное действие $g(f(x)) = f(g^{-1}x)$). Тогда корректно определено действие G на $\Pi = \Pi\{[0,1]_f : f \in \mathcal{F}\}$ ($g\{t_f\} = \{u_f\}$, где $\{t_f\}, \{u_f\} \in \Pi$ (координаты индексируются функциями из $\mathcal{F}$) и $u_f = t_{g^{-1}f}$ (см., например, [2])). Кроме того, диагональное отображение $F = \Delta\{f_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} : X \to \Pi$ является эквивариантным вложением, и $bX = \mathrm{cl}_\Pi(F(X))$ является искомой G-бикомпактификацией X веса $\leq \theta$. $\square$

Из теоремы 5.1.1 и лемм 5.1.3, 5.1.4 следует.

Следствие 5.1.2. *Пусть X — LDH пространство веса $\leq \theta$, $\theta \geq \omega_0$; T — произвольная LDH группа X мощности $\leq \theta$ (их существование доказано в* лемме 5.1.3)*; $\mathcal{B}$ — произвольная LDH(T) база мощности $\leq \theta$; и bX — произвольная бикомпактификация пространства X веса $\leq \theta$, на которую продолжаются гомеоморфизмы из T (тем самым, $T < \mathcal{H}\ (bX)$) (их существование доказано в лемме* 5.1.4)*. Тогда для топологической группы T, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}\ _{co}(bX)$ и $LDH(T)$ базы $\mathcal{B}$ выполнены утверждения* (T1) – (T4) теоремы 5.1.1.

Следующая лемма использует метод построения польской топологии из [93, §6 (B)].

Лемма 5.1.5. *Пусть X — польское не компактное пространство; T — счетная группа его гомеоморфизмов; компакт bX — бикомпактификация X, на которую продолжаются гомеоморфизмы из T; и $\mathcal{K}$ — счетное насыщенное семейство компактов (т.е. $gK \in \mathcal{K}$ для любых компакта $K \in \mathcal{K}$ и элемента $g \in T$) таких, что $\bigcup \mathcal{K} = bX \setminus X$ (напомним, что польское пространство X является G_δ-подмножеством в bX). Тогда на топологической группе*

$$H = \{g \in \mathcal{H}\ (bX) : (\forall K \in \mathcal{K})(\exists f, h \in T)(g|_K = f|_K \& g^{-1}|_K = h|_K)\} \subset \mathcal{H}\ _{co}(bX)$$

можно ввести более сильную топологию (которая будет усилением топологии счетным семейством подгрупп), в которой она станет польской. Тем самым на X определено непрерывное действие польской группы, содержащей T.

Доказательство. Легко проверить, что $HX = X$. Группа $G = \mathcal{H}\ _{co}(bX)$ является польской. Для любого $K \in \mathcal{K}$ подгруппа

$$H_K = \{g \in H : g|_K = \mathrm{id}|_K\}.$$

является замкнутой подгруппой H, $K \in \mathcal{K}$, и счетное семейство $\mathcal{H} = \{H_K : K \in \mathcal{K}\}$ насыщено относительно сопряжения.

Покажем, что

$$H = \bigcap\{T\mathrm{cl}_G(H_K) : K \in \mathcal{K}\} \cap \bigcap\{\mathrm{cl}_G(H_K)T : K \in \mathcal{K}\}.$$

Действительно, пусть $h \in H$ и $K \in \mathcal{K}$ произвольно. По построению существует элемент $g \in T$ такой, что $g|_K = h|_K$. Тем самым $h \in gH_K \subset T\mathrm{cl}_G(H_K)$, т.е. $H \subset \bigcap\{T\mathrm{cl}_G(H_K) : K \in \mathcal{K}\}$. Аналогично доказывается, что $H \subset \bigcap\{\mathrm{cl}_G(H_K)T : K \in \mathcal{K}\}$.

Обратное включение. Пусть $h \in \bigcap\{T\mathrm{cl}_G(H_K) : K \in \mathcal{K}\}$. Зафиксируем $K \in \mathcal{K}$. Существуют элементы $g \in T$ и $h_K \in \mathrm{cl}_G(H_K)$ (заметим, что $h_K|_K = \mathrm{id}|_K$) такие, что $h = gh_K$. Тем самым $h|_K = g|_K$. Аналогично, если $h \in \bigcap\{\mathrm{cl}_G(H_K)T : K \in \mathcal{K}\}$, то тогда для любого $K \in \mathcal{K}$ имеем $h^{-1}|_K = g^{-1}|_K$ для некоторого элемента $g \in T$. Значит $h \in H$.

По "критерию польскости" (см. § 1.4) группа $H_{\mathcal{H}}$ является польской. □

Определение 5.1.2. Группу T гомеоморфизмов пространства X назовем *локально плотно однородной в точке* $x \in X$ (сокращенно LDH в $x \in X$), если существует база $\mathcal{B}_x(T)$ окрестностей точки x (LDH база в x) такая, что $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(T_{X\setminus B}x))$ для любого элемента $B \in \mathcal{B}_x(T)$ (будем считать, что $X \in \mathcal{B}_x(T)$).

Замечание 5.1.5. Пусть X — LDH пространство, T — LDH группа X, и $\mathcal{B}$ — LDH(T) база. Тогда для любой точки $x \in X$ семейство $\{B : B \in \mathcal{B} \ \& \ x \in B\}$ — LDH база в ней.

Лемма 5.1.6. *Пусть в условиях (и обозначениях) леммы 5.1.5 T — LDH группа в точке $x \in X$ и $\mathcal{B}_x(T)$ — LDH база в x. Тогда для любого $B \in \mathcal{B}_x(T)$ (в частности, $B = X$) действие $T_{X\setminus B}$, как подгруппы $H_{\mathcal{H}}$, d-открыто в точке x.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $B \in \mathcal{B}_x(T)$. Если $O \in$

$N_{T_{X\setminus B}}(e)$, то

$$O = T_{X\setminus B} \cap \{g \in H_{\mathcal{H}} : (\forall x \in X)(\rho(x, gx) < \epsilon)\} \cap \bigcap\{H_{K_i} : i = 1, \dots, k\},$$

где ρ – ограничение на X произвольной метрики на компакте bX, $\epsilon > 0$.

Существует элемент $B' \in \mathcal{B}_x(T)$ такой, что $B' \subset B$, $\mathrm{cl}_{bX}B' \cap \bigcup\{K_i : i = 1, \dots, k\} = \emptyset$ и $\mathrm{diam}\ B' < \epsilon/2$. Тогда $T_{X\setminus B'} \subset O$, $T_{X\setminus B'} \subset T_{X\setminus B}$ и $x \in \mathrm{int}(\mathrm{cl}(T_{X\setminus B'}x))$. Тем самым d-открытость действия группы $T_{X\setminus B}$ в точке x доказана. □

Уточняя результат Л. Форда [65] о том, что всякое однородное SLH пространство является алгебраически однородным, Я. ван Милл доказал, что всякое сепарабельное метризуемое (соответственно польское) однородное SLH пространство является пространством левых смежных классов сепарабельной метризуемой [92] (соответственно польской [93]) группы. В случае польских пространств утверждение верно для LDH пространств.

Теорема 5.1.2. *Пусть X – польское LDH пространство. Тогда*

(1) *на X непрерывно и открыто действует польская группа,*

(2) *если X однородно, то оно является пространством левых смежных классов польской группы,*

(3) *X — SLH пространство.*

Доказательство. Любое сепарабельное метризуемое LDH пространство X является дизъюнктной суммой LDH($\mathcal{H}$ (X)) компонент X_n, $n \in \mathbb{N}$. Пусть для любой компоненты X_n (являющейся LDH пространством) существует польская группа G_n, пространство левых смежных классов которой есть X_n. Очевидно, что группа $G = \Pi\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ польская и ее действие на $X = \oplus\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$, определенное в лемме 2.1.7, открыто. Кроме того, легко видеть, что сумма SLH пространств является SLH пространством. Тем самым, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что у X единственная LDH($\mathcal{H}$ (X)) компонента.

Если X — компакт, и $\mathcal{B}$ — LDH($\mathcal{H}\ (X)$) база X, то польская группа $\mathcal{H}_{\ co}(X)$ непрерывно и d-открыто действует на X (замкнутая подгруппа $\mathcal{H}_{\ co}(X)_{X\setminus B}$ d-открыто действует на B, $B\in\mathcal{B}$) (следствие 5.1.2). По следствию 2.4.1 действия открыты. Тем самым X — SLH компакт.

Иначе, по следствию 5.1.2 существуют: счетная LDH группа T; счетная LDH(T) база $\mathcal{B}$; и компакт bX, являющийся бикомпактификацией X, на который продолжаются гомеоморфизмы из T. Тогда для топологической группы T, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\ co}(bX)$, и LDH(T) базы выполнены утверждения (T1) – (T4). Так как у X одна LDH(T) компонента, то считаем, что $X\subset\mathcal{B}$. По лемме 5.1.6 существует польская группа $H_{\mathcal{H}}$, непрерывно действующая на X, такая, что для любого $B\in\mathcal{B}$ ограничение действия подгруппы $T_{X\setminus B}$ группы $H_{\mathcal{H}}$ на B d-открыто. Легко видеть, что действие $T_{X\setminus B}$ продолжается до действия $\mathrm{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T_{X\setminus B})$ на B (B инвариантно относительно $T_{X\setminus B}$ и значит относительно $\mathrm{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T_{X\setminus B})$). Так как $\mathrm{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T_{X\setminus B})$ — польская группа, то ее действие на B открыто по следствию 2.4.1. Значит X является пространством левых смежных классов группы $\mathrm{cl}_{H_{\mathcal{H}}}(T)$, и база $\mathcal{B}$ — SLH база на X, т.е. X — SLH пространство. □

Замечание 5.1.6. В силу утверждения (3) утверждения (1) и (2) теоремы 5.1.2 могут рассматриваться как переформулировка теоремы 6.6 из [93]. Предложенное доказательство теоремы 5.1.2 использует лемму 5.1.5 — метод построения польской топологии на группе из [93, §6]. В то же время оно имеет следующие существенные отличия.

(1) Показано, что для выбора счетной подгруппы T, являющейся "каркасом" искомой польской группы, достаточно чтобы она была лишь LDH группой на X. Нет никакой необходимости проводить сложную конструкцию ее построения из [92, Предложение 3.1].

(2) Использование транзитивности действия, которая достигается с помощью индуктивной процедуры сходимости (см., например, [91]) в оригинальном доказательстве [93, Лемма 6.4] утверждений (1) и (2) тео-

ремы 5.1.2, заменяется на пополнение по двусторонней равномерности d-открыто действующей LDH группы.

5.1.2 Расширения сильно локально однородных пространств

Рассмотрим вопрос пополнения SLH пространств.

Пример 5.1.1. Существует однородное сепарабельное метризуемое локально компактное SLH пространство, не имеющее бикомпактификации, которая была бы LDH пространством.

Легко проверить, что пространство $X = \oplus\{S_i = S : i \in \mathbb{N}\}$ является однородным сепарабельным метризуемым локально компактным SLH пространством. Пусть bX его произвольная бикомпактификация. Для доказательства, что бикомпакт bX не является ни однородным, ни LDH пространством достаточно заметить, что X и нарост $bX \setminus X$ (нигде не плотное подмножество в bX) являются инвариантными подмножествами относительно действия группы $\mathcal{H}\ (bX)$.

Предположим, что существуют точка $x \in bX \setminus X$ и гомеоморфизм $g \in \mathcal{H}\ (bX)$ такие, что $gx \notin bX \setminus X$. Пусть $gx \in S_k$. Легко видеть, что существует окрестность O точки x такая, что gO – связное подмножество S_k. Тогда множества O и gO гомеоморфны. Но это невозможно, так как окрестность gO связна, а любая окрестность точки x несвязна.

Следующая теорема показывает, что любое сепарабельное метризуемое LDH пространство имеет расширение, являющееся польским SLH пространством.

Теорема 5.1.3. *Пусть X — сепарабельное метризуемое LDH пространство, T — его произвольная счетная LDH группа* (*существующая по* лемме 5.1.3). *Тогда существуют:*

(A) *польское SLH пространство Y, являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X : X \to Y$,*

(B) *польская группа G, являющаяся SLH группой Y, в которой подгруппа T всюду плотна (тем самым G — пополнение T по двусторонней равномерности (см., например,* [103, Предложение 10.13, Теорема 13.10])) *и соответствующее вложение $i_T : T \to G$*

такие, что

(1) *действие α группы G на Y непрерывно и открыто,*

(2) *действие α' топологической группы T (рассматриваемой как подгруппы G) на X непрерывно и d-открыто,*

(3) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \overset{i_T \times i_X}{\hookrightarrow} & G \times Y \\ \downarrow \alpha' & & \downarrow \alpha \\ X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

коммутативна.

Доказательство. Аргументы, приведенные в начале доказательства теоремы 5.1.2, позволяют считать, что у X единственная LDH(T) компонента.

Шаг 1. Наделение группы T топологией, в которой как ее действие, так и действие ее подгрупп непрерывно и d-открыто. При этом T — подгруппа польской группы.

По следствию 5.1.2 существуют счетная LDH(T) база $\mathcal{B}$ ($X \subset \mathcal{B}$) и компакт bX, являющийся бикомпактификацией X, на который продолжаются гомеоморфизмы из T такие, что для топологической группы T, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{\,co}(bX)$, и LDH(T) базы $\mathcal{B}$ выполнены утверждения (T1) – (T4) теоремы 5.1.1. Положим

$$Z = \bigcap \{ \bigcup \{ \mathrm{int}_{bX}(\mathrm{cl}_{bX}(Ox)) : x \in X \} : O \in N_T(e) \}.$$

По предложению 2.1.4 Z — инвариантное G_δ-подмножество (так как T метризуемо) компакта bX. Поэтому Z — польское пространство, $X \subset Z$ и ограничение непрерывного действия T на Z d-открыто в точках X (предложение 2.1.3).

Если $Z = bX$, то расматривая T как подгруппу польской группы $\mathcal{H}_{co}(bX)$, по теореме 5.1.1 имеем, что действия T на X и $T_{X\setminus B}$ на B, $B \in \mathcal{B}$, d-открыты.

Иначе, по леммам 5.1.5 и 5.1.6 существует польская группа $H_{\mathcal{H}}$ такая, что действия T (рассматриваем T как подгруппу $H_{\mathcal{H}}$) на X и $T_{X\setminus B}$ на B, $B \subset \mathcal{B}$, d-открыты.

Шаг 2. Построение польского пространства Y.

Пусть $\mathrm{cl}T$ — замыкание группы T в $\mathcal{H}_{co}(bX)$, если $Z = bX$, и в $H_{\mathcal{H}}$ иначе. Тогда $\mathrm{cl}T$ — польская группа, непрерывно действующая на Z. Отметим, что действие $\mathrm{cl}T$ d-открыто в точках $x \in Z'$, $X \subset Z' \subset Z$, а действие $\mathrm{cl}T_{X\setminus B}$, $B \in \mathcal{B}$, d-открыто в точках $x \in B'$, $B \subset B' \subset \tilde{B}$, где $\tilde{B} = Z \setminus \mathrm{cl}_Z(X \setminus B)$. Значит ограничения действий $\mathrm{cl}T$ на Z' и $\mathrm{cl}(T_{X\setminus B})$ на B' открыто по следствию 2.4.1. Тем самым по теореме Хаусдорфа [71] множество Z' (соответственно B', $B \in \mathcal{B}$) — польское пространство. Значит Z' (соответственно B', $B \in \mathcal{B}$) является всюду плотным G_δ-подмножеством Z (соответственно $\tilde{B}$) (см., например, [46, Теорема 4.3.24]). Дополнения CZ' до Z' и CB' до B', $B \in \mathcal{B}$, в Z и $\tilde{B}$ соответственно являются F_σ-множествами первой категории в Z (заметим, что F_σ-множество открытого подмножества в совершенно нормальном пространстве является F_σ-множеством в объемлющем пространстве).

Так как группа T счетна, то множество

$$C = T(CZ') \cup \bigcup \{T(CB') : B \in \mathcal{B}\}$$

является инвариантным F_σ-множеством первой категории в Z. Положим $Y = Z \setminus C$. Тогда Y — польское пространство (как G_δ-подмножество польского пространства Z) и $X \subset Y$. По лемме 2.1.6 на Y d-открыто действует группа T ($T_{X\setminus B}$ d-открыто действует на $Y \cap \tilde{B}$, $B \in \mathcal{B}$).

Шаг 3. Построение польской группы G.

Если $Y = bX$, то $G' = \mathcal{H}_{co}(bX)$. Иначе, по леммам 5.1.5 и 5.1.6 существует польская группа G' такая, что действия T (рассматриваем T как подгруппу G') на Y и $T_{X\setminus B}$ на $Y \cap \tilde{B}$, $B \subset \mathcal{B}$, непрерывны и d-открыты.

Положим $G = \mathrm{cl}_{G'} T$. Тогда G является пополнением группы T по двусторонней равномерности.

По следствию 2.4.1 группа G открыто действует на Y ($\mathrm{cl}_{G'}(T_{X\setminus B})$ открыто действует на $Y \cap \tilde{B}$, $B \subset \mathcal{B}$). Так как компонента действия одна, то Y — алгебраически однородное пространство.

Так как действие T на X является ограничением действия G на Y, то диаграмма (3) коммутативна.

Возьмем произвольную точку $x \in X \subset Y$. Семейство множеств $\{B : B \in \mathcal{B} \ \& \ x \in B\}$ является базой точки x в X. Так как X всюду плотно в Y, то семейство $\mathcal{B}_x = \{\tilde{B} \cap Y : B \in \mathcal{B} \ \& \ x \in B\}$ — база точки x в Y. Для любого $B \in \mathcal{B}_x$ имеем $\mathrm{cl}_{G'}(T_{X\setminus B}) \subset G_{X\setminus B}$. Тем самым выполнено $G_{X\setminus B}x = B$. По лемме 5.1.1 Y — SLH пространство, и группа G — SLH группа Y. $\square$

Лемма 5.1.7. *Пусть X — сепарабельное метризуемое не польское LDH пространство, T — счетная LDH группа X, $\mathcal{B}$ — счетная LDH(T) база* (*считаем, что $X \subset \mathcal{B}$*)*; компакт bX — бикомпактификация X, на которую продолжаются гомеоморфизмы из T. При этом для топологической группы T, рассматриваемой как подгруппы $\mathcal{H}_{co}(bX)$, и базы $\mathcal{B}$ выполнены утверждения* (T1) – (T4) теоремы 5.1.1.

Пусть, дополнительно, для любых $B \in \mathcal{B}$ и точек $x, y \in B$ существует гомеоморфизм $g(x, y, B) \in \mathcal{H}(bX)$ такой, что $g(x, y, B)x = y$, и для любого $\epsilon > 0$ существуют гомеоморфизм $g' \in T_{X\setminus B}$ и окрестности U_x, U_y точек x и y в bX соответственно такие, что $U_x \cap \mathrm{cl}(X \setminus B) = \emptyset$, $U_y \cap \mathrm{cl}(X \setminus B) = \emptyset$; $\mathrm{diam}\, U_x < \epsilon$, $\mathrm{diam}\, U_y < \epsilon$ (метрика ρ на bX произвольна); $g'U_x = U_y$ (g' рассматривается как продолжение гомеоморфизма на bX); и $g(x, y, B)|_{bX\setminus U_x} = g'|_{bX\setminus U_x}$. Тогда существует SLH группа H пространства

X такая, что $T \subset H \subset G = \mathrm{cl}_{G'}T$ (в обозначениях теоремы 5.1.3*), $\mathcal{B}$ — SLH(H) база, и действие H на X непрерывно и открыто.*

Доказательство. Так как мы находимся в условиях теоремы 5.1.3, то существуют польское SLH пространство Y, польская группа G и соответствующие вложения, для которых выполняются утверждения теоремы 5.1.3.

Докажем, что $\mathcal{B}$ — SLH(H) база X. Возьмем произвольные элемент $B \in \mathcal{B}$ и точки $x, y \in B$. Существует гомеоморфизм $g(x, y, B) \in \mathcal{H}\ (bX)$, удовлетворяющий условиям леммы.

Если $Y = bX$, то $G = \mathrm{cl}_{\mathcal{H}\ _{co}(bX)}T$. Иначе $G = \mathrm{cl}_{G'}T$, где польская группа G' строится как в лемме 5.1.5 по насыщенному семейству компактов $\mathcal{K}$, где $bX \setminus Y = \{K : K \in \mathcal{K}\}$.

Покажем, что во втором случае $g(x, y, B) \in G'$. Возьмем произвольный компакт $K \in \mathcal{K}$. Существует достаточно малое $\epsilon > 0$ такое, что $K \cap U_x = \emptyset$ ($K \cap U_y = \emptyset$). Тогда $g(x, y, B)|_{bX \setminus U_x} = g'|_{bX \setminus U_x}$ ($g(x, y, B)^{-1}|_{bX \setminus U_y} = g'|_{bX \setminus U_y}$) для некоторого $g' \in T_{X \setminus B}$. Значит $g(x, y, B) \in G'$ и $g(x, y, B)(X) = X$. В первом случае аналогичными рассуждениями легко показать, что $g(x, y, B)(X) = X$.

Покажем, что для любого гомеоморфизма $g(x, y, B)$ имеем $g(x, y, B)|_{X \setminus B} = \mathrm{id}|_{X \setminus B}$. Так как существующий для $g(x, y, B)$ по условию леммы гомеоморфизм $g' \in T_{X \setminus B}$, то $g'|_{\mathrm{cl}(X \setminus B)} = \mathrm{id}|_{\mathrm{cl}(X \setminus B)}$ (g' рассматривается как продолжение гомеоморфизма на bX). Значит $g(x, y, B)|_{\mathrm{cl}(X \setminus B)} = \mathrm{id}|_{\mathrm{cl}(X \setminus B)}$ и, так как $g(x, y, B)(X) = X$, то $g(x, y, B)|_{X \setminus B} = \mathrm{id}|_{X \setminus B}$.

Доказано, что X — SLH пространство. Обозначим через H подгруппу G', порожденную множеством $T \cup \{g(x, y, B) : (B \in \mathcal{B})\ \&\ (x, y \in B)\}$. Покажем, что в любой окрестности Og, $O \in N_{G'}(e)$, элемента $g = g(x, y, B) \in H$ содержится элемент из T.

Действительно, в случае $Y \neq bX$, O имеет вид

$$O = \{h \in G' : (\forall x \in X)(\rho(x, hx) < \epsilon)\} \cap \bigcap \{H_{K_i} : i = 1, \ldots, k\},$$

где $\epsilon > 0$, $K_i \in bX \setminus X$, $i = 1, \ldots, k$, — компакты. Тогда

$$Og = \{g' \in G' : (\forall x \in X)(\rho(g'x, gx) < \epsilon)\} \cap \bigcap\{H_{K_i}g = H_{g^{-1}K_i} : i = 1, \ldots, k\}.$$

Взяв окрестности U_x, U_y точек x и y в bX достаточно малого диаметра (меньшего ϵ), можно добиться того, чтобы $U_x \cap \bigcup\{K_i : i = 1, \ldots, k\} = \emptyset$. В этом случае для гомеоморфизма $g' \in T_{X\setminus B}$, существующего по предположению леммы для гомеоморфизма $g = g(x, y, B)$, выполнено: $\rho(g'x, gx) < \epsilon$ для любой точки $x \in X$ (так как $g'|_{bX\setminus U_x} = g|_{bX\setminus U_x}$ и $\mathrm{diam}\ U_y < \epsilon$), и $g|_{\cup\{g^{-1}K_i:i=1,\ldots,k\}} = g'|_{\cup\{g^{-1}K_i:i=1,\ldots,k\}}$ (т.е. $g'g^{-1} \in \bigcap\{H_{K_i} : i = 1, \ldots, k\}$). Доказано, что SLH группа H — подгруппа $\mathrm{cl}_{G'}T$.

В случае $Y = bX$ доказательство того, что в любой окрестности Og, $O \in N_{G'}(e)$, элемента $g = g(x, y, B) \in G' = \mathcal{H}_{co}(bX)$ содержится элемент из T аналогично (оно даже проще, так как группа в компактно-открытой топологии).

Открытость действия H на X следует из того, что для любых окрестности единицы O группы H и точки $x \in X$ существует $B \in \mathcal{B}$ такое, что $H_{X\setminus B} \subset O$ и $x \in B$. Его непрерывность очевидна. $\square$

Теорема 5.1.4. *Пусть X — сепарабельное метризуемое SLH пространство. Тогда существуют:*

(A) *польское SLH пространство Y, являющееся расширением X и соответствующее вложение $i_X : X \to Y$,*

(B) *польская группа G, являющаяся SLH группой Y, в которой всюду плотна подгруппа H, являющаяся SLH группой X (тем самым G — пополнение H по двусторонней равномерности) и соответствующее вложение $i_H : H \to G$*

такие, что

(1) *действие α группы G на Y непрерывно и открыто,*

(2) *действие* α' *группы* H *на* X *непрерывно и открыто,*

(3) *диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} H\times X & \overset{i_T\times i_X}{\hookrightarrow} & G\times Y \\ \downarrow\alpha' & & \downarrow\alpha \\ X & \overset{i_X}{\hookrightarrow} & Y \end{array}$$

коммутативна,

(4) *диаграммы*

$$\begin{array}{ccc} H & \hookrightarrow & G=\hat{H} \\ \downarrow q_x & & \downarrow q'_x \\ X_x=H/H_x & \hookrightarrow & Y_x=G/G_x \end{array}$$

коммутативны, где X_x*,* Y_x *— SLH(H) и SLH(G) компоненты содержащие точку* x*,* q_x, q'_x *— фактороротображения,* $x\in X$*.*

Доказательство. Пусть X является объединением своих SLH($\mathcal{H}$ (X)) компонент X_i, $i\in\mathbb{N}$. Каждая компонента — однородное пространство. Докажем вначале теорему для одной компоненты $X=X_i$.

В [92, Предложение 3.1, Лемма 3.4] указан способ построения счетной LDH группы T, счетной LDH(T) базы и бикомпактификации bX, удовлетворяющих условиям леммы 5.1.7. Тем самым утверждения (1) – (3) теоремы вытекают из теоремы 5.1.3 и леммы 5.1.7.

Возьмем построенные SLH группы H и G пространств X и Y соответственно. Естественное вложение $i_{H/H_x}: H/H_x\to\hat{H}/\mathrm{cl}_{\hat{H}}(H_x)$ $(i_{H/H_x}(gH_x)=g\mathrm{cl}_{\hat{H}}(H_x))$ корректно определено и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H & \overset{i_H}{\hookrightarrow} & G=\hat{H} \\ \downarrow q & & \downarrow\hat{q} \\ H/H_x & \overset{i_{H/H_x}}{\hookrightarrow} & \hat{H}/\mathrm{cl}_{\hat{H}}(H_x) \end{array}$$

коммутативна, где i_H — вложение H в свое пополнение по двусторонней равномерности $\hat{H}$, q, q' — факторотображения. Очевидно, что $\mathrm{cl}_G(H_x)<G_x$, и

существует открытое отображение $f : G/\mathrm{cl}_G(H_x) \to G/G_x$ такое, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{id}} & G \\ \downarrow \hat{q} & & \downarrow q' \\ G/\mathrm{cl}_G(H_x) & \xrightarrow{f} & G/G_x \end{array}$$

коммутативна, где q' — факторотображение. Отображение $f \circ i_{H/H_x} : H/H_x \to G/G_x$ инъективно. В самом деле, если для $g_1 H_x \neq g_2 H_x$ имеем $(f \circ i_{H/H_x})(g_1 H) = (f \circ i_{H/H_x})(g_2 H)$, то тогда $g_1^{-1} g_2 \in G_x \cap H$. Но $G_x \cap H = H_x$ и тогда $g_1 H_x = g_2 H_x$. Получено противоречие. Следовательно, $f \circ i_{H/H_x}$ — вложение, будучи композицией вложения и открытого отображения. Коммутативность диаграммы (4) очевидна.

Вернемся к общему случаю. Пусть для любого $i \in \mathbb{N}$ построена SLH группа H_i, удовлетворяющая утверждениям (1) – (4). Определено естественное действие группы $H = \Pi\{H_i : i \in \mathbb{N}\}$ на X по лемме 2.1.7. При этом легко видеть, что H — SLH группа X. Ее пополнение до двусторонней равномерности G совпадает с произведением пополнений по двусторонней равномерности групп H_i, $i \in \mathbb{N}$ (см., например, [53, Следствие 3.6.23]). Тем самым по лемме 2.1.7 определено естественное действие группы $G = \Pi\{\hat{H}_i : i \in \mathbb{N}\}$ на польском пространстве Y (как сумме счетного числа польских пространств Y_i, $i \in \mathbb{N}$). Выполнение утверждений (1) – (4) легко проверяется (заметим лишь, что $G_x = (\hat{H}_i)_x \times \Pi\{\hat{H}_j : j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$, где $x \in Y_i$). □

Замечание 5.1.7. Теорема 5.1.4 показывает, что польское SLH пополнение Y SLH пространства X может быть получено пополнением некоторой SLH группы X. В [93, Замечание 6.7] отмечено, что не всякую SLH группу X можно использовать для получения польского SLH пополнения.

Представленные методы используются в работе с полными пространствами. Поэтому вполне естественно использование в теореме 5.1.4 LDH группы, построенной Я. ван Миллом [92], для получения SLH группы не полного пространства X.

5.2 Счетная плотная однородность и G-бикомпактификации $\mathbb{Q}$

В данном параграфе все пространства — бесконечные сепарабельные метризуемые.

5.2.1 Счетно плотно однородные пространства

Пространство X *счетно плотно однородно* (сокращенно CDH), если для любых двух счетных плотных подмножеств D и E существует гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}\ (X)$ такой, что $f(D) = E$. Подгруппа G группы $\mathcal{H}\ (X)$ называется *CDH группой* CDH пространства X, если для любых двух счетных плотных подмножеств D и E существует гомеоморфизм $f \in G$ такой, что $f(D) = E$.

Используя дословно ход доказательства теоремы 1.6.7 из [91] доказывается лемма.

Лемма 5.2.1. *Пусть G — CDH группа CDH пространства X. Тогда Gx — открыто-замкнутое подмножество пространства X для любой точки $x \in X$.*

Доказательство. Покажем, что Gx — замкнутое подмножество X. Предположим противное, что существует $y \in \mathrm{cl}Gx \setminus Gx$. Пусть A — счетное плотное подмножество Gx, B — счетное плотное подмножество $X \setminus \mathrm{cl}Gx$. Тогда множества $A \cup B$ и $A \cup B \cup \{y\}$ — счетные плотные подмножества X, и существует гомеоморфизм $h \in G$ такой, что $h(A \cup B) = A \cup B \cup \{y\}$. При этом, так как $y \notin h(A)$, то существует $z \in B$ такая, что $h(z) = y$. Тем самым у точки y существует окрестность $h(X \setminus \mathrm{cl}Gx)$, не пересекающаяся с множеством Gx, что противоречит выбору точки y. Значит множество Gx — замкнуто.

Для доказательства открытости множества Gx достаточно показать, что $\mathrm{int}(Gx) \neq \emptyset$. Предположим, что $\mathrm{int}(Gx) = \emptyset$. Тогда множество Gx нигде не плотно в X, будучи замкнутым в X. Пусть A — счетное плотное подмножество $X \setminus Gx$. Тогда множества A и $A \cup \{x\}$ — счетные плотные подмножества

X, и существует гомеоморфизм $h \in G$ такой, что $h(A) = A \cup \{x\}$. Значит существует точка $y \in X \setminus Gx$ такая, что $h(y) = x$. Противоречие с определением множества Gx. Значит множество Gx — открыто. □

Замечание 5.2.1. Если G — CDH группа CDH пространства X, то тогда для любых точек $x, y \in X$ или $Gx = Gy$, или $Gx \cap Gy = \emptyset$. Значит X является суммой открыто-замкнутых подмножеств — *CDH(G)-компонент.*

Для локально компактного сепарабельного метризуемого CDH пространства действие группы $\mathcal{H}\ (X)$ в g-топологии открыто [111].

Пример 5.1.1 показывает, что не всякое сепарабельное метризуемое CDH пространство имеет бикомпактификацию, являющуюся CDH пространством.

Лемма 5.2.2. *Пусть X — польское CDH пространство, G — его польская CDH группа. Тогда для любого конечного подмножества F подгруппа G_F открыто действует на $X \setminus F$.*

Доказательство. Пусть E — множество изолированных точек пространства X. Легко видеть, что множества E и $X \setminus E$ являются инвариантными подмножествами X. Так как каждое из них является суммой CDH(G)-компонент, то E и $X \setminus E$ — открыто-замкнутые инвариантные подмножества X.

Действие любой группы открыто на дискретном пространстве E. По следствию 3.5 [95] для любого конечного подмножества $F \subset (X \setminus E)$ у ограничения действия группы G_F на $X \setminus E$ множество $X \setminus (E \cup F)$ является дизъюнктным объединением открыто-замкнутых подмножеств $X \setminus (E \cup F)$ (тем самым открытых подмножеств X), ограничения действия на которые транзитивны. Имеем транзитивные действия польской группы G_F на подмножествах, являющимися польскими пространствами. По теореме Эффроса [64] действие открыто на каждом из открытых подмножеств разбиения $X \setminus (E \cup F)$, а значит и на $X \setminus (E \cup F)$. □

Замечание 5.2.2. Если X — локально компактное CDH пространство, то $G = \mathcal{H}\ (X)$, рассматриваемая как подгруппа $\mathcal{H}_{\ co}(\alpha X)$, — польская CDH группа.

По лемме 5.2.2 для любого конечного подмножества F подгруппа G_F открыто действует на $X \setminus F$.

Предложение 5.2.1. *Компакт X является CDH пространством в том и только в том случае, если для любого конечного подмножества F ограничение действия подгруппы $\mathcal{H}_{co}(X)_F$ на $X \setminus F$ открыто.*

Доказательство. Необходимость следует из леммы 5.2.2.

Для доказательства достаточности зафиксируем метрику ρ на X. По теореме Лебега о покрытиях (см., например, [46, Теорема 4.3.31.]) для покрытия ω пространства X существует $\epsilon > 0$ такое, что покрытие $\{O_\epsilon(x) = \{y \in X : \rho(x, y) < \epsilon\} : x \in X\}$ вписано в ω. Положим

$$O = \{f \in \mathcal{H}_{co}(X) : \rho(f(x), x) < \epsilon, x \in X\} \in N_{\mathcal{H}_{co}(X)}(e).$$

Так как ограничение действия подгруппы $\mathcal{H}_{co}(X)_F$ на $X \setminus F$ открыто, то для любой точки $x \notin F$ выполнено $x \in \operatorname{int}((O \cap \mathcal{H}_{co}(X)_F)x)$. Тем самым действие удовлетворяет утверждению (b) теоремы 1.2 [95], и X — CDH пространство. $\square$

Зафиксируем счетное всюду плотное подмножество A компакта X, и положим $\mathcal{H}(X|A) = \{h \in \mathcal{H}(X) : h(A) = A\} \subset \mathcal{H}_{co}(X)$.

Лемма 5.2.3. *Если X — CDH компакт, то тогда для любого конечного подмножества F множество $\mathcal{H}(X|A) \cap \mathcal{H}(X)_F$ всюду плотно в $\mathcal{H}_{co}(X)_F$. В частности, множество $\mathcal{H}(X|A)$ всюду плотно в $\mathcal{H}_{co}(X)$.*

Доказательство. В доказательстве используем *индуктивную процедуру сходимости* (см., например, [91, Индуктивная процедура сходимости 1.6.2.]).

Зафиксируем метрику ρ на компакте X. Пусть конечное множество F, гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}_{co}(X)_F$ и $\epsilon > 0$ — произвольные. Для доказательства леммы достаточно построить гомеоморфизм g такой, что $g(x) = x$ при $x \in F$, $g(h(A)) = A$ и $\rho(g(x), x) < \epsilon$ при всех $x \in X$.

Из леммы 5.2.2 следует, что для любых конечного подмножества F, всюду плотного подмножества D компакта X, точки $x \in X \setminus F$, и элемента $O \in N_{\mathcal{H}\ _{co}(X)_F}(e)$, существует гомеоморфизм f такой, что $f \in O$ и $f(x) \in D$.

Будем считать, что $F \cap A = \emptyset$ (иначе, рассмотрим подмножество $A' = A \setminus F$). Занумеруем точки множеств $h(A) = \{a_1, a_2, \dots\}$ и $A = \{b_1, b_2, \dots\}$.

Используя стандартный "back-and-forth" метод из [48, Теорема 5.2.] построим последовательность гомеоморфизмов $\{f_n\}$ компакта X такую, что $g = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n \circ \dots \circ f_1)$ — гомеоморфизм, и выполнены следующие условия (гарантирующие, что $g(h(A)) = A$):

(1) $f_n \circ \dots \circ f_1(a_i) = f_{2i} \circ \dots \circ f_1(a_i) \in A$ для любых i и $n \geq 2i$;

(2) $(f_n \circ \dots \circ f_1)^{-1}(b_i) = (f_{2i+1} \circ \dots \circ f_1)^{-1}(b_i) \in h(A)$ для любых i и $n \geq 2i+1$;

(3) $\rho(f_n(x), x) < \epsilon/2^n$ для любых $x \in X$.

Предположим, что гомеоморфизмы $f_1, \dots, f_{2i-1}$ определены. Если $f_{2i-1} \circ \dots \circ f_1(a_i) \in A$, то положим $f_{2i} = \mathrm{id}$. Иначе, для конечного подмножества $F = \{b_1, \dots, b_i\} \cup (f_{2i-1} \circ \dots \circ f_1)(\{a_1, \dots, a_{i-1}\})$ возьмем в качестве f_{2i} гомеморфизм X такой, что $f_{2i} \circ \dots \circ f_1(a_i) \in A$, и $f_{2i} \in O$, где диаметр элемента $O \in N_{\mathcal{H}\ _{co}(X)_F}(e)$ достаточно мал, чтобы удовлетворять индуктивной процедуре сходимости и условию (3).

Если $(f_{2i} \circ \dots \circ f_1)^{-1}(b_i) \in h(A)$, положим $f_{2i+1} = \mathrm{id}$. Иначе, для конечного подмножества $F = \{b_1, \dots, b_{i-1}\} \cup (f_{2i} \circ \dots \circ f_1)(\{a_1, \dots, a_i\})$ возьмем в качестве f_{2i+1} гомеоморфизм X такой, что $f_{2i+1}^{-1}(b_i) \in (f_{2i} \circ \dots \circ f_1)(h(A))$ и $f_{2i+1} \in O$, где диаметр элемента $O \in N_{\mathcal{H}\ _{co}(X)_F}(e)$ достаточно мал, чтобы удовлетворять индуктивной процедуре сходимости и условию (3).

По индуктивной процедуре сходимости $g = \lim\limits_{n\to\infty}(f_n \circ \dots \circ f_1)$ — гомеоморфизм X, $g(x) = x$ при $x \in F$, $g(h(A)) = A$ и $\rho(g(x), x) < \epsilon$ при всех $x \in X$ по условию (3). $\square$

Если X — CDH компакт без изолированных точек (например однородный бесконечный CDH компакт), то тогда его любое счетное всюду плотное подмножество совершенно и гомеоморфно пространству рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (см., например, [46, Упражнение 4.3.H.(b)]).

Лемма 5.2.4. *Пусть X — однородный CDH компакт, и $\mathbb{Q}$ — его счетное всюду плотное подмножество. Тогда действие группы $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})$ на $\mathbb{Q}$ транзитивно.*

Доказательство. Так как группа $\mathcal{H}_{\ co}(X)$ транзитивно действует на X, и по лемме 5.2.3 орбита $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})x$ любой точки $x \in X$ всюду плотна в $\mathcal{H}_{\ co}(X)x$, то $\mathrm{cl}(\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})x) = X$. Подгруппа $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})$ транзитивно действует на некотором счетном инвариантном подмножестве A всюду плотного в X множества $\mathbb{Q}$. Группа $\mathcal{H}\ (X|A)$ транзитивно действует на A так как $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})$ является ее подгруппой. Так как X — CDH пространство, то $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q}) = f^{-1}\mathcal{H}\ (X|A)f$, где f — гомеоморфизм X, отображающий множество $\mathbb{Q}$ на A (подгруппы $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})$ и $\mathcal{H}\ (X|A)$ сопряжены). Тем самым действие группы $\mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q})$ на $\mathbb{Q}$ транзитивно. □

5.2.2 G-бикомпактификации $\mathbb{Q}$

Из следствия 3.5.3, лемм 2.1.6, 5.2.3, 5.2.4 и сопряженности подгрупп $\mathcal{H}\ (X|E)$ и $\mathcal{H}\ (X|D)$, где E и D — счетные всюду плотные подмножества CDH пространства X следует выполнение теоремы.

Теорема 5.2.1. *Пусть X — CDH компакт. Тогда существует сепарабельная метризуемая группа $G(= \mathcal{H}\ (X|A) \subset \mathcal{H}_{\ co}(X))$ такая, что она допускает действие на любом счетном всюду плотном подмножестве A пространства X, при котором компакт X является единственной G-бикомпактификацией A. Более того, если X однородно, то тогда A гомеоморфно пространству рациональных чисел $\mathbb{Q}$, действие на котором группы G транзитивно.*

Из теоремы 5.2.1 и [94, Следствие 2.2.] следует, что в случае, когда компакт X однороден, группа G из теоремы 5.2.1 допускает усиление польской топологией. Покажем, что для действия этой польской группы G' компакт X также является единственной G'-бикомпактификацией $\mathbb{Q}$.

В доказательстве следствия 2.2 [94] в качестве насыщенного относительно сопряжения семейства $\mathcal{G}$ замкнутых подгрупп взято семейство $\mathcal{H}\ (X)_x \cap G(= \mathcal{H}\ (X|\mathbb{Q}) \subset \mathcal{H}\ _{co}(X))$, $x \in \mathbb{Q}$, подгрупп группы G. Полагаем $G' = G_{\mathcal{G}}$.

Теорема 5.2.2. *Пусть X — однородный CDH компакт. Тогда существует польская группа G' такая, что она она допускает транзитивное действие на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{Q}$, при котором компакт X является единственной G'-бикомпактификацией $\mathbb{Q}$.*

Доказательство. Возьмем счетное всюду плотное подмножество $\mathbb{Q}$ компакта X. По теореме 5.2.1 существует сепарабельная метризуемая группа G, транзитивно действующая на $\mathbb{Q}$ таким образом, что X — единственная G-бикомпактификация $\mathbb{Q}$.

Из лемм 2.1.6, 5.2.2, 5.2.3 следует, что семейство $\mathcal{G}$ удовлетворяет условию (3.5*) теоремы 3.5.3, из которой и следует окончание доказательства. □

Лемма 5.2.5. *Для компакта X и польской группы G'* в теореме 5.2.2 *ограничение ее действия на $X \setminus \mathbb{Q}$ транзитивно и открыто ($X \setminus \mathbb{Q}$ — пространство левых смежных классов группы G').*

Доказательство. Так как $X \setminus \mathbb{Q}$ — инвариантное подмножество компакта X, то корректно определено ограничение действия группы G' на $X \setminus \mathbb{Q}$. Из доказательства теоремы 5.2.2 видно, что действие группы G' на X d-открыто в точках подмножества $X \setminus \mathbb{Q}$ и, тем самым, ограничение действия G' на $X \setminus \mathbb{Q}$ d-открыто по предложению 2.1.3 (a). По следствию 2.4.1 ограничение действия открыто. Тем самым $X \setminus \mathbb{Q}$ — дизъюнктная сумма открыто-замкнутых компонент O_i, $i \in \mathbb{N}$, действия.

Возьмем открытое подмножество O'_i компакта X такое, что $O'_i \cap (X \setminus \mathbb{Q}) = O_i$, $i \in \mathbb{N}$. Так как $X \setminus \mathbb{Q}$ всюду плотно в X, и множества O_i, $i \in \mathbb{N}$, попарно дизъюнктны, то множества O'_i, $i \in \mathbb{N}$, также попарно дизъюнктны. Зафиксируем $i \neq j \in \mathbb{N}$ и возьмем $x_i \in O'_i \cap \mathbb{Q}$, $x_j \in O'_j \cap \mathbb{Q}$ ($\mathbb{Q}$ всюду плотно в X). Ограничение действия G' на $\mathbb{Q}$ транзитивно. Поэтому существует гомеоморфизм $g \in G'$ такой, что $g(x_i) = x_j$. Так как действие непрерывно, то $g(O_i) \cap O_j \neq \emptyset$. Получено противоречие с тем, что O_i и O_j — дизъюнктные непустые компоненты ограничения действия. Поэтому ограничение действия на $X \setminus \mathbb{Q}$ транзитивно. $\square$

Прямое повторение доказательства из [94, §3 (A)] с использованием леммы 5.2.5 позволяет получить следующий результат.

Следствие 5.2.1. *Для компакта X и польской группы G' в* теореме 5.2.2 *компакт X — единственное полное по Чеху G'-расширение пространства $\mathbb{Q}$.*

Замечание 5.2.3. Для компакта X и польской группы G' в теореме 5.2.2 у действия G' на X две компоненты действия: множество первой категории $\mathbb{Q}$ и польское пространство $X \setminus \mathbb{Q}$. Более того, ограничение действия на $X \setminus \mathbb{Q}$ открыто, и на $\mathbb{Q}$ не d-открыто.

Пример 5.2.1. Пример сепарабельной метризуемой группы G и ее действия на пространстве рациональных чисел $\mathbb{Q}$ таких, что $\mathbb{Q}$ не G-тихоновское пространство (не имеет G-бикомпактификаций). Пример является модификацией примера М. Мегрелишвили из [24].

Пусть пространство $X = \bigcup\{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ — счетное совершенное подмножество метрического ежа счетной колючести (см., например, [46, Пример 4.1.5]) с иголками Q_n — рациональными числами отрезка $I_n = [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$ (0 — общая точка). Очевидно X гомеоморфно $\mathbb{Q}$.

Положим $N_n = \{1/m : m \in \mathbb{N}\} \subset I_n$, $n \in \mathbb{N}$. Пусть группа $G_n = \{g \in \mathcal{H}\ (I_n|Q_n) : g(1/m) = 1/m, m \in \mathbb{N}\}$ рассматривается как подгруппа $\mathcal{H}_{\ co}(I_n)$, $n \in \mathbb{N}$, и $G = \Pi\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$. Действие группы G на X определено как в лемме 2.1.7. Оно корректно, так как точка 0 — неподвижная точка.

Предположим, что X — G-тихоновское пространство. Тогда существует G-равномерное отображение $f : X \to I$, разделяющее точку 0 и замкнутое подмножество $F = \bigcup\{1_n : n \in \mathbb{N}\}$ (концы иголок) (см., например, [2]). Не ограничивая общности рассуждений, считаем, что $f(0) = 0$ и $F \subset f^{-1}(1)$.

Так как f непрерывно, то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $W = \bigcup\{[0, 1/k] \cap Q_n : n \in \mathbb{N}\} \subset f^{-1}[0, 1/2)$. Так как f — G-равномерное отображение, то для $\delta = 1/2k$ существует элемент $O \in N_G(e)$ такой, что $|f(x) - f(gx)| < \delta$ для любых точек $x \in X$ и элемента $g \in O$. Из определения топологии тихоновского произведения на G окрестность O содержит подмножество $T = \Pi\{e_n : n \in \mathbb{N}, n < l\} \times \Pi\{G_n : n \in \mathbb{N}, n \geq l\}$, где e_n — единица группы G_n, $n \in \mathbb{N}$, и $l \geq 1$ — целое число. Для любой точки $x \in Q_n$, $1/(m+1) < x < 1/m$ имеем $\mathrm{cl}_{Q_n}(G_n x) = [1/m+1, 1/m]$, $n \in \mathbb{N}$. Поэтому $f(1/k) > 1 - (k-1)\delta = 1 - (k-1)/2k > 1/2$ для $1/k \in Q_l$. Полученным противоречием с условием $f(1/k) < 1/2$ заканчивается доказательство.

5.3 Алгебраическая однородность бикомпактов

Из [52, Теорема 8] (см. также [93] или [59, Теорема 4] и [18, Замечание 2]) следует, что если на пространстве X транзитивно и открыто действует группа G, то тогда X — алгебраически однородно.

Теорема Эффроса [64] (см. также [47, Теорема 1]) показывает, что транзитивное действие польской группы G на польском пространстве X открыто и, тем самым, X является пространством левых смежных классов польской группы G. Напомним, что компактно-открытая топология (соответственно g-топология [52]) является слабейшей *допустимой топологией* [52] на группе $\mathcal{H}\ (X)$ в случае, если X бикомпакт [52, Теорема 3] (соответственно локально компактное пространство [52]). Пространство гомеоморфизмов является польским пространством в обоих этих случаях, если X дополнительно метризуемо (соответственно метризуемо и сепарабельно). Поэтому любой однородный компакт (сепарабельное метризуемое локально компактное пространство) X является пространством левых смежных классов польской группы [111].

Пример однородного бикомпакта X, не являющегося алгебраически однородным (и, тем самым, действие группы гомоморфизмов $\mathcal{H}\ (X)$ на X в любой *допустимой топологии* [52] не открыто) построил В. В. Федорчук [35], давая ответ на один из вопросов теории размерности. Используя метод Федорчука, в [54] построен пример однородного бикомпакта, на котором действие группы $\mathcal{H}\ _{co}(X)$ (и, значит, группы $\mathcal{H}\ (X)$ в любой допустимой топологии) не d-открыто.

Пример 5.3.1. Модифицированный (двумерный) пример однородного не алгебраически однородного бикомпакта X из [38] построен также с использованием метода Федорчука.

Зафиксируем точку $\{x\}$ окружности S. Для любого $\epsilon > 0$ положим $U(\epsilon, x) = \{t \in S : \rho(t, x) < \epsilon\}$, где ρ — естественная метрика на S. Определим многозначное отображение $f' : (0, \pi] \to [-\pi, \pi]$, график которого является объединением отрезков с концами $(2^{-n}\pi, \pi)$ и $(2^{-(n+1)}\pi, -\pi)$, $n \in \omega$. Отображение $f_0 : S \setminus \{0\} \to S$ определяется как $f_0(t) = f'(|t|)$ (после отождествления точек $(2^{-(n+1)}\pi, -\pi)$ и $(2^{-(n+1)}\pi, \pi)$, $n \in \omega$), где $|t|$ абсолютное значение t. Определим *кольцевые* [121, Определение 3.4.1] отображения $f_x : S \setminus \{x\} \to S$, положив $f_x(t) = f_0(t - x)$, $x \in X$.

Для открытых множеств $U, V \subset S$ и точки $x \in U$ положим

$$U \otimes V_x = (\{x\} \times V) \cup ((f_x^{-1}(V) \cap U) \times S).$$

Множества $U \otimes V_x$ образуют базу топологии на X (как множество X является тором $S \times S$). Проекцию на первый сомножитель обозначим через $\pi : X \to S$.

Бикомпакт X однороден [38, Теорема 2], и из [35, Лемма 4] следует, что X не является алгебраически однородным. Тем самым действие группы $\mathcal{H}\ (X)$ в любой допустимой топологии не открыто.

Предложение 5.3.1. *Действие группы $G = \mathcal{H}\ _{co}(X)$ (и, значит, группы $\mathcal{H}\ (X)$ в любой допустимой топологии) не слабо d-открыто.*

Доказательство. Очевидно, что множества $\{x\} \times S \subset X$, $x \in S$, линейно связны. Используя стандартные рассуждения, (подобные, например, рассуждениям при доказательстве того, что компакт "$\sin(1/x)$"($\{0\} \times [-1,1] \cup \{(x, \sin(1/x)) : x \in (0,1]\} \subset \mathbb{R}^2$) связен, не линейно связен), легко показать следующее.

Утверждение 1. Линейно связными компонентами X являются множества $\{x\} \times S$, $x \in S$.

Из утверждения 1 следует, что любой гомеоморфизм $h \in \mathcal{H}\ (X)$ отображает множество $\{x\} \times S$ на множество $\{x'\} \times S$, $x, x' \in S$. Из определения топологии на X и утверждения 1 имеем.

Утверждение 2. Для любого гомеоморфизма $h \in \mathcal{H}\ (X)$ существует гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}\ (S)$ такой, что $\pi \circ h = f \circ \pi$.

Для различных точек $x, y \in S$ через $x\breve{}y$ обозначим ту дугу между x и y, которая проходится против часовой стрелки при движении от x к y. Из утверждения 2 имеем.

Утверждение 3. Для любого гомеоморфизма $h \in \mathcal{H}\ (X)$ образ дуги в S при соответствующем гомеоморфизме $f \in \mathcal{H}\ (S)$ является дугой.

Из утверждения 3 имеем.

Утверждение 4. Пусть подмножество $T \subset \mathcal{H}\ (X)$ такое, что $h(\{x_i\} \times S) = \{x_i\} \times S$ для $h \in T$ и различных точек $x_i \in S$, $i = 1, 2, 3$ (без ограничения общности можно считать, что дуги $x_1\breve{}x_2$, $x_2\breve{}x_3$ и $x_3\breve{}x_1$ проходятся против часовой стрелки). Тогда $h(x_1\breve{}x_2 \times S) = x_1\breve{}x_2 \times S$, $h(x_2\breve{}x_3 \times S) = x_2\breve{}x_3 \times S$, $h(x_3\breve{}x_1 \times S) = x_3\breve{}x_1 \times S$ при $h \in T$.

Для открытого подмножества U окружности S и любой точки $p = (x, t) \in X$, где $t \in U$, положим $H(p, U) = \{h \in \mathcal{H}\ (X) : h(p) \in S \otimes U_x\}$.

Утверждение 5. Пусть U, V – дизъюнктные открытые подмножества окружности S и $p = (x, t), q = (x, s) \in X$ такие точки, что $t \in U, s \in V$. Тогда $h(\{x\} \times S) = \{x\} \times S$ для любых $h \in H(p, U) \cap H(q, V)$.

Действительно, для $h \in H(p, U)$ имеем $h(\{x\} \times S) \subset (\{x\} \cup f_x^{-1}(U)) \times S$, и для $h \in H(q, V)$ имеем $h(\{x\} \times S) \subset (\{x\} \cup f_x^{-1}(V)) \times S$. Поэтому $h(\{x\} \times S) = \{x\} \times S$, так как множества $(f_x^{-1}(U) \times S)$ и $(f_x^{-1}(V) \times S)$ дизъюнктны.

Используя утверждения 4 и 5, легко построить окрестность $O \in N_G(e)$ и тройку различных точек $x_1, x_2, x_3 \in S$ таких, что $h(x_1\breve{x}_2 \times S) = x_1\breve{x}_2 \times S$, $h(x_2\breve{x}_3 \times S) = x_2\breve{x}_3 \times S$, $h(x_3\breve{x}_1 \times S) = x_3\breve{x}_1 \times S$ для любых $h \in O$. Любая окрестность точки (x_1, t), $t \in S$, пересекает $x_1\breve{x}_2 \times S$ и $x_3\breve{x}_1 \times S$. Поэтому $(x_1, t) \notin \mathrm{int}(\mathrm{cl}(Oz))$ для любых $z \in X$, так как $\mathrm{int}(x_1\breve{x}_2 \times S) \cap \mathrm{int}(x_3\breve{x}_1 \times S) = \emptyset$, и для любой точки $z \in X$ или $\mathrm{cl}(Oz) \subset x_1\breve{x}_2 \times S$, или $\mathrm{cl}(Oz) \subset x_2\breve{x}_3 \times S$, или $\mathrm{cl}(Oz) \subset x_3\breve{x}_1 \times S$. □

Бикомпакт X называется *сильно однородным*, если существует отображение X^2 в $\mathcal{H}_{co}(X)$ $((x, y) \to h_{xy})$ такое, что $h_{xy}(x) = y$ для любых $x, y \in X$. Топологическое пространство X называется *пространством с выпрямляемой диагональю* (см. [34, Определение 3]), если существует гомеоморфизм $\varphi : X \times X \to X \times X$ такой, что $\varphi(\{x\} \times X) = \{x\} \times X$ для любых $x \in X$ и $\varphi(\Delta) = X \times \{a\}$ для некоторой точки $a \in X$, где $\Delta = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$. По [34, Предложения 15] сильно однородные бикомпакты совпадают с бикомпактами, имеющими выпрямляемую диагональ.

Предложение 5.3.2. *Действие группы $\mathcal{H}_{co}(X)$ на сильно однородном бикомпакте (бикомпакте с выпрямляемой диагональю) X открыто. Более того, X есть пространство левых смежных классов σ-бикомпактной подгруппы группы $\mathcal{H}_{co}(X)$.*

Доказательство. Достаточно проверить выполнение последнего утверждения. Существует σ-бикомпактная подгруппа группы $\mathcal{H}_{co}(X)$, действующая транзитивно на X. Остается применить следствие 1.5 из [89], в котором утверждается, что транзитивное действие σ-бикомпактной группы на пространстве со свойством Бэра открыто. □

Литература

[1] С. А. Антонян, Классификация бикомпактных G-расширений с помощью колец эквивариантных отображений, Докл. АН Армянской ССР, 69 (5) (1979) 260–264.

[2] С. А. Антонян, Ю. М. Смирнов Ю. М., Универсальные объекты и бикомпактные расширения для топологических групп преобразований, Докл. АН СССР, 257 (3) (1981) 521–525.

[3] С. А. Антонян, Продолжение действий псевдокомпактных групп, Фунд. и Прикл. Мат., 7 (3) (2001) 931–934.

[4] А. В. Архангельский, Топологическая однородность. Топологические группы и их непрерывные образы, УМН 42 (2) (1987) 69–105.

[5] А. В. Архангельский, Классы топологических групп, УМН 36 (3) (1981) 127–146.

[6] Г. Биркгоф, Теория решеток. М.: Наука, 1983.

[7] И. Н. Бронштейн, Расширения минимальных групп преобразований. Кишинев: Штиинца, 1975.

[8] Н. Бурбаки, Общая топология. Основные структуры. М.: Наука, 1968.

[9] Н. Бурбаки, Общая топология. Топологические группы. Числа и связанные с ними группы и пространства. М.: Наука, 1969.

[10] Н. В. Величко, Заметка о перистых пространствах, Czechoslovak Math. J. 25 (1) (1975) 8–19.

[11] И. И. Гуран, О топологических группах, близких к группам Линделефа, Докл. АН СССР, 256 (6) (1981) 1305–1307.

[12] Л. Н. Ивановский, Об одной гипотезе П. С. Александрова, Докл. АН СССР, 123 (5) (1958) 785–786.

[13] Г. И. Кац, Изоморфное отображение топологических групп в прямые произведения групп, удовлетворяющих первой аксиоме счетности, УМН 8 (6) (1953) 107–113.

[14] Дж. Л. Келли, Общая топология. М.: Наука, 1981.

[15] К. Л. Козлов, О $\varkappa$-замкнутых образах подмножеств топологических произведений, Фунд. и Прикл. Мат., 4 (1) (1998) 127–134.

[16] К. Л. Козлов, Об относительной размерности подмножеств топологических произведений, Вест. МГУ, Сер. 1 Мат. Мех. N 1 (2002) 21–25.

[17] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, О бикомпактных G-расширениях, Мат. заметки, 78 (5) (2005) 695–709.

[18] К. Л. Козлов, В. А. Чатырко, Топологические группы преобразований и бикомпакты Дугунджи, Матем. сб., 201 (1) (2010) 103–128.

[19] К. Л. Козлов, Топология действий и однородные пространства, Матем. сб., 204 (4) (2013) 127–160.

[20] В. И. Кузьминов, О гипотезе П. С. Александрова в теории топологических групп, Докл. АН СССР, 125 (4) (1959) 727–729.

[21] А. А. Марков, О свободных топологических группах, Известия АН СССР, 9 (1945) 3–64.

[22] М. Г. Мегрелишвили, Эквивариантные пополнения и бикомпактные расширения, Сообщения АН Грузинской ССР, 115 (1) (1984) 21–24.

[23] М. Г. Мегрелишвили, Об эквивариантной нормальности, Сообщения АН Грузинской ССР, 111 (1) (1983) 17–19.

[24] М. Г. Мегрелишвили, Тихоновское G-пространство, не обладающее бикомпактным G-расширением и G-линеаризацией, УМН 43 (2) (1988) 145–146.

[25] А. В. Островский, Непрерывные образы произведения $C \times \mathbb{Q}$ канторова совершенного множества C и рациональных чисел, Изд. МГУ, Семинар по общей топологии, под. ред. П. С. Александрова, (1981) 78–85.

[26] Б. А. Пасынков, Почти метризуемые топологические группы, Докл. АН СССР, 161 (2) (1965) 281–284.

[27] Б. А. Пасынков, О размерности прямоугольных произведений, Докл. АН СССР, 221 (2) (1975) 291–294.

[28] Б. А. Пасынков, О пространствах с бикомпактной группой преобразований, Докл. АН СССР, 231 (1) (1976) 39–42.

[29] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

[30] Ю. М. Смирнов, Могут ли простые геометрические объекты быть максимальными компактными расширениями для $\mathbb{R}^n$, УМН 49 (6) (1994) 213–214.

[31] Ю. М. Смирнов, Минимальные топологии на действующих группах, УМН 50 (6) (1995) 217–218.

[32] А. М. Соколовская, Один метод построения полурешеток бикомпактных G-расширений, Мат. заметки, 82 (6) (2007) 916–925.

[33] В. В. Успенский, Компактные факторпространства топологических групп и спектры Хейдона, Мат. заметки, 42 (4) (1987) 594–602.

[34] В. В. Успенский, Топологические группы и компакты Дугунджи, Матем. сб., 180 (8) (1989) 1092–1118.

[35] В. В. Федорчук, Пример однородного бикомпакта с несовпадающими размерностями, Докл. АН СССР, 198 (6) (1971) 1283–1286.

[36] В. В. Федорчук, Вполне замкнутые отображения и совместимость некоторых теорем общей топологии с аксиомами теории множеств, Матем. сб., 99 (1) (1976) 3–33.

[37] В. В. Филиппов, О нормально расположенных пространствах, Труды Мат. института им.Стеклова, 154 (1983) 239–251.

[38] В. А. Чатырко, Бикомпакты с несовпадающими размерностями, Труды Моск. мат. об-ва, 53 (1990) 192–228.

[39] А. Ч. Чигогидзе, О $\varkappa$-метризуемых пространствах, УМН 37 (2) (1982) 241–242.

[40] М. М. Чобан, Редукционные теоремы о существовании непрерывных сечений. Сечения над подмножествами факторпространств топологических групп, Мат. исследования, Топологические структуры и алгебраические системы, Штиинца, Кишинев 4 (1973) 111–156.

[41] М. М. Чобан, Топологическое строение подмножеств топологических групп и их факторпространств, Мат. исследования, Топологические структуры и алгебраические системы, Штиинца, Кишинев 44 (1977) 117–163.

[42] Е. В. Щепин, Вещественные функции и канонические множества в тихоновских произведениях и топологических группах, УМН 31 (6) (1976) 17–27.

[43] Е. В. Щепин, Топология предельных пространств несчетных обратных спектров, УМН 31 (5) (1976) 191–226.

[44] Е. В. Щепин, О $\varkappa$-метризуемых пространствах, Изв. АН СССР., Сер. матем. 43 (2) (1979) 442–478.

[45] Е. В. Щепин, Функторы и несчетные степени компактов, УМН 36 (3) (1981) 3–62.

[46] Р. Энгелькинг, Общая топология. М.: Мир, 1986.

[47] F. D. Ancel, An alternative proof and applications of a theorem of E. G. Effros, Michigan Math. J., 34 (1) (1987) 39–55.

[48] R. D. Anderson, D. W. Curtis, J. van Mill, A fake topological Hilbert space, Trans. Amer. Math. Soc., 272 (1) (1982) 311–321.

[49] N. Antonyan, S. Antonyan, Free G-spaces and maximal equivariant compactifications, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 184 (3) (2005) 407–420.

[50] N. Antonyan, On the maximal G-compactification of products of two G-spaces, Int. J. Math. Math. Sci., (2006) Art ID 93218.

[51] S. Antonyan, M. Sanchis, Extension of locally pseudocompact group actions, Ann. Mat. Pura Appl. (4), 181 (3) (2002) 239–246.

[52] R. Arens, Topologies for homeomorphism groups, Amer. J. of Mathematics, 68 (4) (1946) 593–610.

[53] A. V. Arhangel'skii, M. G. Tkachenko, Topological groups and related structures. Paris. Atlantis Press 2008.

[54] D. P. Bellamy, K. F. Porter, A homogeneous continuum that is non-Effros, Proc. Amer. Math. Soc., 113 (2) (1991) 593–598.

[55] R. B. Brook, A construction of the greatest ambit, Math. Systems Theory, 4 (1970) 243–248.

[56] L. G. Brown, Topologically complete groups, Proc. Amer. Math. Soc., 35 (2) (1972) 593–600.

[57] H. Buchwalter, Produit topologique, produit tensoriel et c-repletion, Bull. Soc. Math. France Suppl., Mém. 31-32 (1972) 51–71 (in French).

[58] T. Byczkowski, R. Pol, On the closed graph and open mapping theorems, Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 24 (9) (1976) 723–726.

[59] V. Chatyrko, K. Kozlov, The maximal G-compactifications of G-spaces with special actions, Proceedings of the 9-th Prague Topological Symposium (Prague 2001) (2002), 15–21.

[60] A. Chigogidze, On some questions in dimension theory, Colloq. Math. Soc. Janos Bŏlyai, 23 (1978) 273–286.

[61] W. Comfort, K. Ross, Pseudocompactness and uniform continuity in topological groups, Pacific J. of Math., 16 (1966) 483–496.

[62] W. Comfort, F. Trigos-Arrieta, Locally pseudocompact topological groups, Topology Appl., 62 (3) (1995) 263–280.

[63] E. K. van Douwen, Characterizations of $\beta\mathbb{Q}$ and $\beta\mathbb{R}$, Arch. Math. (Basel), 32 (4) (1979) 391–393.

[64] E. G. Effros, Transformation groups and C^*-algebras, Amer. J. of Mathematics, 81 (2) (1965) 38–55.

[65] L. R. Ford, Homeomorphism groups and coset spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 77 (1954) 490–497.

[66] H. Freudenthal, Entwicklungen von Räumen und ihren Gruppen, Composition Math., 4 (1937) 154–234.

[67] Z. Frolik, The topological product of two pseudocompact spaces, Czechoslovak Math. J., 10 (85) (1960) 339–349.

[68] D. Georgiou, K. L. Kozlov, S. Iliadis, The covering dimension invariants, Topol. Appl., 159 (9) (2012) 2392–2403.

[69] I. Glicksberg, Stone-Čech compactification of products, Trans. Amer. Math. Soc., 90 (1959) 369–382.

[70] F. González, M. Sanchis, Diedonné completion and b_f-group actions, Topology Appl., 153 (17) (2006) 3320–3326.

[71] F. Hausdorff, Uber inner Abbildungen, Fund. Math. 23 (8) (1934) 279–291.

[72] R. Haydon, On a problem of Pelczyński: Milutin spaces, Dugundji spaces and AE(dim 0), Studia Math., 52 (1) (1974) 23–31.

[73] S. Hernández, M. Sanchis, Dugundji spaces in the coset space G/H, Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992), Ann. New York Acad. Sci., 728 (1994) 262–268.

[74] S. Hernandes, M. Sanchis, M. Tkačenko, Bounded sets in spaces and topological groups, Topology and Appl., 101 (1) (2000) 21–43.

[75] T. Hoshina, K. Morita, On rectangular products of topological spaces, Topology Appl., 11 (1) (1980) 47–57.

[76] J. R. Isbell, Uniform neighborhood retracts, Pacific J. of Math., 11 (2) (1961) 609–648.

[77] J. R. Isbell, Uniform spaces. Mathematical Surveys N 12, American Mathematical Society. Providence, R.I. 1964.

[78] K. Kozlov, B. Pasynkov, Covering dimension of topological products, J. Math. Sci. (N.Y.), 144 (3) (2007) 4031–4110. Translated from Sovrem. Mat. Prilozh. N 34, Obshchaya Topol. (2005) 3–86 (in Russian).

[79] K. L. Kozlov, Characterization of compact spaces with noncoinciding dimensions which are subsets of products of simple spaces, Topol. Appl., 155 (17-18) (2008) 2009–2016.

[80] K. L. Kozlov, Rectangularity of products and completions of their subsets, Topology Appl., 157 (4) (2010) 698–707.

[81] K. L. Kozlov, Rectangular conditions in products and equivariant completions, Topol. Appl., 159 (7) (2012) 1863–1874.

[82] K. L. Kozlov, Spectral decompositions of spaces induced by spectral decompositions of acting groups, Topol. Appl., 160 (11) (2013) 1188–1205.

[83] A. Kucharski, Sz. Plewik, V. Valov, Very I-favorable spaces, Topol. Appl., 158 (12) (2011) 1453–1459.

[84] W. Kulpa, Factorization and inverse expansion theorems for uniformities, Colloq. Math., 21 (2) (1970) 217–227.

[85] S. Mardešić, On covering dimension and inverse limits of compact spaces, Illinois Journ. of Math., 4 (1960) 278–291.

[86] M. Megrelishvili, Compactification and factorization in the category of G-spaces, Categorical topology and its relation to analysis, algebra and combinatorics (Prague 1988), J. Adámek, S. MacLane eds., World Sci. Publ., Teaneck, NJ, (1989) 220–237.

[87] M. Megrelishvili, Equivariant completions, Comment. Math. Univ. Carolin., 35 (3) (1994) 539–547.

[88] M. Megrelishvili, Topological transformation groups: selected topics, Open Problems in Topology II, E. Pearl ed., Elsevier, (2007) 423–437.

[89] A. A. George Michael, On transitive topological group actions, Topol. Appl., 157 (13) (2010) 2048–2051.

[90] J. van Mill, Characterization of some zero-dimensional separable metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 264 (1) (1981) 205–215.

[91] J. van Mill, The infinite-dimensioanl topology of functions spaces. Amsterdam, North-Holland Publishing Co 2001.

[92] J. van Mill, Strong local homogeneity and coset spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 133 (8) (2005) 2243–2249.

[93] J. van Mill, Homogeneous spaces and transitive actions by Polish groups, Israel J. Math., 165 (1) (2008) 133–159.

[94] J. van Mill, On the G-compactifications of the rational numbers, Monatsh Math., 157 (3) (2009) 257–266.

[95] J. van Mill, Ungar's theorems on countable dense homogeneity revisited, preprint.

[96] P. S. Mostert, Reasonable topologies for homeomorphism groups, Proc. Amer. Math. Soc., 12 (1961) 598–602.

[97] N. Noble, A note on z-closed projections, Proc. Amer. Math. Soc., 23 (1) (1969) 73–76.

[98] N. Noble, Products with closed projections, Trans. Amer. Math. Soc., 140 (1969) 381–391.

[99] R. Palais, The classification of G-spaces, Memoir. Amer. Math. Soc., 36 (2) (1960) 1–72.

[100] A. Pelczyński, Linear extensions, linear averagings and their applications. Diss. math. 58, Warszawa: PWN 1968.

[101] J. Poncet, Une class d'espace homogénes possédant une mesure invariante, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 238 (1954) 553–554.

[102] T. Proselkova, On the completion of products, Interim reports of II Prague Topol. Symp. Praha (1987) 12.

[103] W. Roelcke, S. Dierolf, Uniform structures on topological groups and their quotients. Advanced Book Programm, McGraw-Hill International Book Co., New-York 1981.

[104] E. Reznichenko, Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups, Topology Appl., 59 (3)(1994) 233–244.

[105] M. Sanchis, Continuous functions on locally pseudocompact groups, Topology Appl., 86 (1) (1998) 5–23.

[106] A. M. Sokolovskaya, G-compactifications of pseudocompact G-spaces, Topology Appl., 155 (4) (2009) 342–346.

[107] Yu. M. Smirnov, L. N. Stoyanov, On minimal equivariant compact extensions, Comptes rendus de l'Academie bulgare des Sciences, 36 (6) (1983) 733–736.

[108] M. Tkačenko, Some results on inverse spectra. II, Comment. Math. Univ. Carolin., 22 (4) (1981) 819–841.

[109] M. Tkačenko, The notion of σ-tightness and C-embedded subspaces of products, Topol. Appl., 15 (1) (1983) 93–98.

[110] M. Tkačenko, Compactness type properties in topological groups, Czechoslovak Math. J., 38 (113) (1988) 324–341.

[111] G. S. Ungar, On all kinds of homogeneous spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 212 (1975) 393–400.

[112] V. Valov, Some characterizations of the spaces with a lattice of d-open mappings, C. R. Acad. Bulgare Sci., 39 (9) (1986) 9–12.

[113] J. de Vries, Topological transformation groups 1. A categorical approach. Mathematical Center Tracts N 65, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1975.

[114] J. de Vries, Universal topological transformation groups, Gen. Topology and Appl., 5 (2) (1975) 107–122.

[115] J. de Vries, Equivariant embeddings of G-spaces, General topology and its relations to modern Analysis and Algebra IV. Part B. Prague (1977) 485–493.

[116] J. de Vries, On the existence of G-compactifications, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 26 (3) (1978) 275–280.

[117] J. de Vries, Linearization, compactification and the existence of non-trivial compact extensors for topological transformation groups, Proceedings of the Conference Topology and Measure III. Part 2. Greifswald (1982) 339–346.

[118] J. de Vries, On the G-compactification of products, Pacif. J. Math., 110 (1) (1983) 447–470.

[119] J. de Vries, G-spaces: compactifications and pseudocompactness, Proceedings of the Colloquim on Topology. Eger. August 8-12, 1983. 655–666.

[120] R. Walker, The Stone-Čech compactification. Ergebwise der Mathematik und iber Grenzgebiete, Band 83, Springer-Verlag, New York-Berlin 1974.

[121] S. Watson, The construction of topological spaces: planks and resolutions, Recent progress in General Topology, M. Hušek, J. van Mill, Elsevier Science Publishers (1992) 675–757.

[122] A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la tjpologie générale, Paris 1938.