Непрерывность обратного в группах

Резниченко Е.А.

УДК 512.546.82 515.122.29 515.124.2

Ключевые слова: Паратопологические группы, полутопологические группы, непрерывность обратного, свойство Бера, Δ–беровские пространства

Пусть G есть группа и τ топология на G. Группа с топологией (G, τ) называется *полутопологической* если правые и левые сдвиги непрерывны, иными словами, если умножение раздельно непрерывно. Группа (G, τ) называется *паратопологической* если умножение непрерывно. Напомним, Группа (G, τ) называется *топологической*, если умножение и взятие обратного элемента $g \mapsto g^{-1}$ непрерывно, т.е. если G паратопологическая группа с непрерывной операцией взятия обратного элемента.

Начиная с работы Мангомери [1] 1936 года и на протяжении последующих лет в ряде работ [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8] рассматривается проблема, которую можно сформулировать следующим образом: *При каких условиях на топологию паратопологическая группа является топологической группой?* То есть, когда в паратопологической группе операция взятия обратного элемента непрерывна. В этой работе получены дальнейшие продвижения в решении этой проблемы.

Под пространством подразумеваем регулярное пространство.

Пусть X множество, $P \subset X \times X$. Обозначим $P_x = \{y \in X : (x, y) \in P\}$ для $x \in X$. Если X пространство, P назовем *полуоткрытым* если каждое P_x открыто и P *полуокрестность диагонали*, если P полуоткрыто и содержит диагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ квадрата $X \times X$.

Определение 1. *Пространство X назовем Δ–беровским, если для любой полуокрестности диагонали $P \subset X \times X$ существует открытое непустое $W \subset X$, для которого $W \times W \subset \overline{P}$.*

Напомним, пространство X называется *беровским* если пересечение счетного числа плотных открытых в X множеств не пусто и плотно в X.

Для группы G и $M \subset G$ обозначим $I(M) = \{(g,h) \in G \times G : g^{-1}h \in M\}$. Очевидно, $I(M)_g = gM$ для $g \in G$. Поэтому, если G полутопологическая группа, а V открытая окрестность единицы, то $I(V)$ полуокрестность диагонали.

Теорема 1. *Δ–беровская регулярная паратопологическая группа G является топологической группой.*

Доказательство. Пусть U есть окрестность единицы e группы G. Для непрерывности операции взятия обратного в G достаточно найти окрестность P единицы e, для которой $P \subset U^{-1}$.

Существует окрестность V единицы группы G, для которой $\overline{V^2} \subset U$. Покажем, что $\overline{I(V)} \subset I(U)$. Пусть $(g,h) \notin I(U)$, т.е. $g^{-1}h \notin U$. Пусть O есть такая окрестность единицы, что $g^{-1}hO \cap V^2 = \varnothing$. Тогда $hO \cap gVV = \varnothing$ и, следовательно, $gV \times hO \cap I(V) = \varnothing$. Поэтому $(g,h) \notin \overline{I(V)}$. Так как $(g,h) \notin I(U)$ мы брали произвольно, то $\overline{I(V)} \subset I(U)$.

Так как G Δ–беровское пространство, то существует открытое непустое $W \subset G$, для которого $W \times W \subset \overline{I(V)} \subset I(U)$. Следовательно, $P = W^{-1}W \subset U$ и, очевидно, является открытой окрестностью единицы. Так как $P^{-1} = P$, то $P \subset U^{-1}$. □

Прямая Зонгефрея, беровская паратопологическая не топологическая группа, не Δ–беровское пространство.

Далее наше исследование носит чисто топологический характер, мы выясняем какие пространства являются Δ–беровскими. Наглядно и просто доказывается, что метризуемое беровское пространство X является Δ–беровским. Приведем схему доказательства. Пусть P полуокрестность диагонали X. Для $\varepsilon > 0$, положим $M_\varepsilon = \{x \in X : B_\varepsilon(x) \subset P_x\}$, где $B_\varepsilon(x)$ ε–окрестность x. Из беровости X вытекает, что M_ε где то плотно в X для некоторого $\varepsilon > 0$. Существует открытое непустое $W \subset X$, для которого диаметр W не превосходит $\varepsilon/2$ и $W \cap M_\varepsilon$ плотно в M_ε. Тогда $W \times W \subset \overline{P}$.

Для обобщения этого факта будем использовать вариации топологической игры Банаха-Мазура [9, 10].

Пусть X есть топологическое пространство, на нем играют два игрока, α и β. Определение топологической игры можно разбить на две части. Сначала происходит игра, в соответствии с некими *правилами игры.* После игры, в соответствии с некими *правилами определения победителя*, определяется победитель в игре. Если заданы некие правила игры T и правила определения победителя W, то соответствующию игру будем обозначать через $G(T, W)$.

Правила игра OD. Первый ход. Игрок β выбирает открытые непустые $V_0, W_0 \subset X$, α выбирает открытое непустое $U_0 \subset U_0$. n–ый ход. Игрок β выбирает открытые непустые $V_n, W_n \subset U_{n-1}$, α выбирает открытое непустое $U_n \subset V_n$.

Правила определения победителя в игре OD. Игрок α выиграл, если

(b) $(W_n)_n$ не локально конечное семейство, то есть накапливается к некоторой точке;

(k) существует компактное $K \subset X$, так что каждое U_n пересекает K.

Пусть G игра на топологическом пространстве X, p — игрок α или β. Пространство X называется *p–благоприятным* для игры G, если у игрока p есть выигрышная стратегия в игре G; X называется *p–неблагоприятным*, если X не является p–благоприятным для игры G, то есть для игрока p не существует выигрышной стратегии в игре G. Стратегия — это правило (отображение из множества частичных игр), которое по информации о предыдущих ходах обеих игроков определяет следующий ход игрока. Также будем называть X p–G–(не)благоприятным, если X p–(не)благоприятно для игры G.

Теорема 2. *Если регулярное пространство X β–неблагоприятно для игры $G(OD, b)$, то X Δ–беровское пространство.*

Доказательство. Предположим противное, то есть, что существует полуокрестность диагонали P, так что $W \times W \setminus \overline{P} \neq \varnothing$ для любого непустого открытого $W \subset X$. Определим стратегию для β в игре G_{ci}.

Обозначим $V_{-1} = X$. На n–ом шаге β выбирает открытые непустые $V_n, W_n \subset U_n$ таким образом, что $V_n \times W_n \cap P = \varnothing$ и $\overline{V_n} \subset U_n$.

Проверим, что определенная стратегия выигрышная для β, то есть для получившейся игры $(V_n, W_n, U_n)_n$ не выполняется правило выигрыша b для игрока α, то есть семейство $(W_n)_n$ локально конечно. Пусть $x \in X$. Если $x \notin \bigcap_n V_n$, то $x \notin V_k$ для некоторого k и окрестность $X \setminus \overline{V_{k+1}}$ точки x пересекается с конечным количеством элементов $(W_n)_n$. Если же $x \in \bigcap_n V_n$, то окрестность P_x точки x не пересекается ни с одним W_n, так как $x \in V_n$ и $V_n \times W_n \cap P = \varnothing$.

Мы доказали, что X β–благоприятно для $G(OD, b)$, противоречие. $\square$

В псевдокомпатном пространстве любая стратегия для игрока α выигрышная в игре $G(OD, b)$, так что верно

Предложение 1. *Любо регулярное псевдокомпатное пространство α–$G(OD, b)$–благоприятно.*

Пусть $Y \subset X$. Назовем Y *C–плотным*, если для любого счетного семейства γ открытых подмножеств X, семейство γ локально конечно если и только если семейство $\{U \cap Y : U \in \gamma\}$ локально конечно в Y. Для тихоновского X, Y C–плотно в X если и только если Y плотно в X и C–вложено в X.

Предложение 2. *Если регулярное пространство X β–$G(OD, b)$–неблагоприятно, $Y \subset X$,*

а) Y плотное G_δ–подмножество X

б) или Y C–плотно в X

в) или Y открыто в X

то Y β–$G(OD, b)$–неблагоприятно.

Доказательство. Для открытого в Y множества $U \subset Y$ обозначим $E(U) = X \setminus \overline{Y \setminus U}$. Для случая а), пусть $Y = \bigcap_n G_n$, где G_n открытые плотные подмножества X. Предположим противное, то есть, что Y β–благоприятно для игры $G(OD, b)$. Пусть t выигрышная стратегия для игрока β. Для случая в) стратегия t также является выигрышной стратегией для β в $G(OD, b)$ на X, так что в дальнейшем будем рассматривать случаи а) и б). Определим стратегию s для игрока β в игре $G(OD, b)$ на пространстве X.

Построим по индукции последовательности открытых множеств $(V_n, W_n, U_n)_n$ пространства X и $(V'_n, W'_n, U'_n)_n$ пространства Y. На n–ом ходу игрок β выбирает $U'_{n-1} \subset Y$ таким образом, что

а) $\overline{U'_{n-1}} \subset U_{n-1} \cap G_n$

б) $\overline{U'_{n-1}} \subset U_{n-1}$

Положим $(V'_n, W'_n) = t(V'_0, W'_0, U'_0, \ldots, V'_{n-1}, W'_{n-1}, U'_{n-1})$,

$$s(V_0, W_0, U_0, \ldots, V_{n-1}, W_{n-1}, U_{n-1}) = (V_n, W_n) = (E(V'_n), E(W'_n)).$$

Игрок α выбирает $U_n \subset V_n$.

Игра $(V'_0, W'_0, U'_0, \dots)$ выигрышная для β, поэтому множество P предельных в X точек семейства $(W'_n)_n$ не пересекается с Y. В случае a), по построению, $P \subset Y$, поэтому P пусто. В случае b), P пусто, так как Y C–плотно в X. Так как $W'_n = W_n \cap Y$ для каждого n, то $(W_n)_n$ локально конечно. Следовательно, s выигрышная стратегия для β и X β–благоприятно. Противоречие. $\square$

Пусть семейство $\mathcal{F}$ подмножеств X. Назовем $\mathcal{F}$ *ограниченным*, если для любого локально конечного семейства γ существует $F \in \mathcal{F}$, для которого $\{M \in \gamma : M \cap F \neq \varnothing\}$ конечно.

Для $K \subset X$, будем говорить, что $\mathcal{F}$ *сходится к* K, если для любой окрестности $U \supset K$ множество $\{F \in \mathcal{F} : F \not\subset U\}$ конечно.

Правила игра BM. Первый ход. Игрок β выбирает открытое непустое $V_0 \subset X$, α выбирает открытое непустое $U_0 \subset U_0$. n–ый ход. Игрок β выбирает открытое непустое $V_n \subset U_{n-1}$, α выбирает открытое непустое $U_n \subset U_n$.

Правила определения победителя в игре BM. Игрок α выиграл, если

(i) $\bigcap_n U_n \neq \varnothing$;

(b) $(U_n)_n$ ограниченное семейство;

(k) $(U_n)_n$ сходится к некоторому компакту $K \subset X$;

Игра $G(BM, i)$ — это игра Банаха-Мазура. С помощью игры Банаха-Мазура Сан-Ремон [11] получил полезную характеристику беровских пространств: пространство X является беровским если и только если X β–неблагоприятно для игры $G(BM, i)$.

Если w одно из определенных правил выигрыша для игры OD или BM то через w^* будем обозначать следующие правило выигрыша игрока α: либо $\bigcap_n U_n = \varnothing$, либо выполняется w. Если пространство не беровское, то оно β–благоприятное для $G(R, w^*)$, где R либо OD, либо BM.

Предложение 3. *Если беровское пространство X α–благоприятно для игры $G(OD, b^*)$, то X β–неблагоприятно для $G(OD, b)$.*

Доказательство. В силу теоремы Сан-Ремона [SR], достаточно показать, что если X β–благоприятно для $G(OD, b)$ и α–благоприятно для

$G(OD, b^*)$, то X β–благоприятно для $G(BM, i)$. Пусть t_1 выигрышная стратегия для β в игре $G(OD, b)$ и t_2 выигрышная стратегия для α в игре $G(OD, b^*)$. Определим выигрышную стратегию t для β в игре $G(BM, i)$.

Первый шаг. Пусть $(V_0', W_0) = t_1(\varnothing)$, $V_0 = t_2(V_0', W_0)$. Положим $t(\varnothing) = V_0$. Пусть α выбирает $U_0 \subset V_0$.

n–**ый шаг.** Пусть $(V_n', W_n) = t_1(V_0', W_0, U_0, \dots, V_{n-1}', W_{n-1}, U_{n-1})$, $V_n = t_2(V_0', W_0, V_0, \dots, V_n', W_n)$. Положим $t(V_0, U_0, \dots, V_{n-1}, U_{n-1}) = V_n$. Пусть α выбирает $U_n \subset V_n$.

Проверим, что t выигрышная стратегия для β в игре $G(BM, i)$, то есть $\bigcap_n U_n = \varnothing$. В экземпляре $(V_0', W_0, V_0, \dots, V_n', W_n, V_n, \dots)$ игры OD выиграл β по правилам b, следовательно, β выиграл по правилам b и в игре $\xi = (V_0', W_0, U_0, \dots, V_n', W_n, U_n, \dots)$. С другой стороны, α выиграл в ξ по правилам b^*. Из этого вытекает, что $\bigcap_n U_n = \varnothing$. □

Предложение 4. *Пусть X пространство, G_1 и G_2 одна из следующих пар игр: $G(BM, k^*)$ и $G(BM, b^*)$; $G(OD, k^*)$ и $G(OD, b^*)$; $G(BM, k^*)$ и $G(OD, k^*)$; $G(BM, b^*)$ и $G(OD, b^*)$. Тогда если X α–благоприятна для G_1, то X α–благоприятна для G_2.*

Доказательство. Для первых двух пар, выигрышная стратегия для α в игре G_1 является выигрышной стратегией для α в G_2. В следующих двух парах, игрок α в G_2 использует стратегию α в G_1, игнорируя W_n. □

Лемма 1. *Пусть X пространство, $(\gamma_n)_n$ последовательность семейств открытых множеств, $\bigcup \gamma_n$ плотно в X для каждого n. Если для каждой последовательности $(W_n)_n$, $W_n \in \gamma_n$ с непустым пересечением*

а) $(W_n)_n$ ограниченное семейство, то X α–благоприятно для игры $G(BM, b^*)$;

б) $(W_n)_n$ сходится к некоторому компакту, то X α–благоприятно для игры $G(BM, k^*)$.

Доказательство. Определим для α выигрышную стратегию. На n–ом шаге будем выбирать U_n таким образом, что $U_n \subset V_n \cap W_n$ для некоторого $W_n \in \gamma_n$. □

Пространство X называется *p–пространством* если и только если существует последовательность $(\gamma_n)_n$ открытых покрытий X, таких что если последовательность $(W_n)_n$, $W_n \in \gamma_n$ имеет непустое пересечение, то $(W_n)_n$ сходится к некоторому компакту. Из леммы 1б вытекает, следующие предложение.

Предложение 5. *Любое p–пространство α–благоприятно для игры $G(BM, k^*)$*

Предложение 6. *Σ–пространство α–благоприятно для игры $G(BM, b^*)$. Сильно Σ–пространство α–благоприятно для игры $G(BM, k^*)$.*

Доказательство. Пусть X (сильно) Σ–пространство. Тогда существует σ–локально конечное семейство $\mathcal{F}$ замкнутых множеств и покрытие $\mathcal{K}$, состоящие из замкнутых счетнокомпактных (компактных) множеств, так что для каждого $K \in \mathcal{K}$ и окрестности $U \supset K$ существует $F \in \mathcal{F}$, для которого $K \subset F \subset U$. Пусть $\mathcal{F} = \bigcup_n \mathcal{F}_n$, где $\mathcal{F}_n$ локально конечно и $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$.Пусть γ_n есть семейство открытых $U \subset X$, таких что для каждого $F \in \mathcal{F}_n$, если $U \cap F \neq \varnothing$, то $U \subset F$. Так как $\mathcal{F}_n$ локально конечно и состоит из замкнутых множеств, то $\bigcup \gamma_n$ плотно в X. Тогда любая последовательность $(W_n)_n$, $W_n \in \gamma_n$, имеющая непустое пересечение G, сходится к любому $K \in \mathcal{K}$, пересекающему G. Если K счетнокомпактно, то $(W_n)_n$ ограничено, а если K компактно, то $(W_n)_n$ сходится к компакту. Из леммы 1 вытекает утверждение теоремы. $\square$

Предложение 7. *Пусть $\{X_a : a \in A\}$ семейство α–$G(OD, k^*)$–благоприятных пространств. Тогда произведение $X = \prod_{a\in A} X_a$ α–$G(OD, k^*)$–благоприятно.*

Доказательство. Пусть t_a выигрышная стратегия для игрока α в игре $G(OD, k^*)$ на пространстве X_a. Построим выигрышную стратегию t для α на X. По индукции будем строить конечные попарно непересекающиеся $A_n \subset A$ и открытые непустые $V_n, W_n, U_n \subset X$, $V^a_n, W^a_n, U^a_n \subset X_a$ для $a \in A_n$ таким образом, что

(1) $V_{n+1}, W_{n+1} \subset U_n \subset V_n$;

(2) $U_n = P_n \times \prod_{i=0,\dots,n} \prod_{a\in A_i} U^a_{n-i}$, где $P_n = \prod_{a\in A\setminus A^*_n}$ и $A^*_n = \bigcup_{i=0,\dots,n} A_i$;

(3) $V^*_n \subset V_n$ и $W^*_n \subset W_n$, где $V^*_n = P_n \times \prod_{i=0,\dots,n} \prod_{a\in A_i} V^a_{n-i}$ и $W^*_n = P_n \times \prod_{i=0,\dots,n} \prod_{a\in A_i} W^a_{n-i}$;

(4) $V^a_{n+1}, W^a_{n+1} \subset U^a_n \subset V^a_n$ и $U^a_n = t_a(V^a_0, W^a_0, U^a_0, \dots, V^a_n, W^a_n)$ для $a \in A^* = \bigcup_n A_n$.

Положим $A_{-1} = \varnothing$ и $U_{-1} = X$. На n–ом шаге игрок β выбирает открытые непустые $V_n, W_n \subset U_{n-1}$. Существует конечное $A_n \subset A \setminus A^*_{n-1}$ и открытые непустые $V^a_{n-i}, W^a_{n-i} \subset X_a$ для $a \in A_i$ и $i = 0, \dots, n$, так что выполняется (3). Положим $U^a_{n-i} = t_a(V^a_0, W^a_0, U^a_0, \dots, V^a_{n-i}, W^a_{n-i})$ для

$a \in A_i$ и $i = 0, \ldots, n$ и определим U_n в соответствии с (2). Положим $t(V_0, W_0, U_0, \ldots, V_n, W_n) = U_n$.

Если $\bigcap U_n^a = \varnothing$ для некоторого $a \in A^*$, то $\bigcap U_n = \varnothing$ и игрок α выиграл. В противном случае, из (4) вытекает, что для $a \in A^*$ существует компакт $K^a \subset X_a$, так что $K^a \cap W_n^a \neq \varnothing$ для всех n. Пусть $p \in \prod_{a \in A \setminus A^*}$ и $K = \{p\} \times \prod_{a \in A^*} K^a$. Тогда $K \cap W_n \neq \varnothing$ для всех n. Мы доказали, что стратегия t выигрышная и X α–благоприятно. □

Предложение 8. *Пусть X α–$G(OD, k^*)$–благоприятное пространство и Y α–$G(OD, k^*)$–благоприятное пространство. Тогда $X \times Y$ Пусть $\{X_a : a \in A\}$ семейство α–$G(OD, k^*)$–благоприятных пространств. Тогда произведение $X \times Y$ α–$G(OD, b^*)$–благоприятно.*

Доказательство. Пусть p выигрышная стратегия для α в $G(OD, k^*)$ на X и q выигрышная стратегия для α в $G(OD, b^*)$ на Y. Определим стратегию t для α в игре $G(OD, b^*)$ на $X \times Y$. Положим $U_{-1}^X = X$ и $U_{-1}^Y = Y$. На n–ом шаге игрок β выбирает открытые непустые $V_n, W_n \subset U_{n-1} = U_{n-1}^X \times U_{n-1}^Y$. Существуют отрытые непустые $V_n^X, W_n^X \subset U_{n-1}^X$ и $V_n^Y, W_n^Y \subset U_{n-1}^Y$, так что $V_n^X \times V_n^Y \subset V_n$ и $W_n^X \times W_n^Y \subset W_n$. Положим $U_n^X = p(V_0^X, \ldots, V_n^X)$, $U_n^Y = p(V_0^Y, \ldots, V_n^Y)$ и $t(V_0, \ldots, V_n) = U_n = U_n^X \times U_n^Y$.

Проверим, что t выигрышная стратегия. Если $\bigcap_n U_n^X$ или $\bigcap_n U_n^Y$ пусто, то α выиграл. В другом случае, существует компакт $K \subset X$, который пересекает все W_n^X и $(W_n^Y)_n$ накапливается к некоторой точке $y \in Y$. Тогда $(W_n)_n$ накапливается к (x, y) для некоторого $x \in K$.Предположим, что такой точки $y \in K$ нет. Тогда существует окрестность O точки y, для которой $K \times O$ пересекается с конечным числом элементов $(W_n)_n$ и O пересекается с конечным числом элементов $(W_n^Y)_n$, противоречие. □

Аналогично предложению 2 доказывается следующие два предложения.

Предложение 9. *Если регулярное пространство X α–$G(OD, b^*)$–благоприятно, $Y \subset X$, Y плотное G_δ–подмножество X или Y C–плотно в X или Y открыто в X то Y α–$G(OD, b^*)$–благоприятно.*

Предложение 10. *Если регулярное пространство X α–$G(OD, k^*)$–благоприятно, $Y \subset X$, Y плотное G_δ–подмножество X или Y открыто в X, то Y α–$G(OD, k^*)$–благоприятно.*

Из предложений 1, 3, 4, 5, 6, 8, 7, 9 и 10 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{P}_b$ *класс всех регулярных* α*–*$G(OD, b^*)$*–благоприятных пространств и* $\mathcal{P}_k$ *класс всех регулярных* α*–*$G(OD, k^*)$*–благоприятных пространств. Тогда*

а) класс $\mathcal{P}_k$ *содержит сильно* Σ*–пространства и* p*–пространства;*

б) класс $\mathcal{P}_k$ *замкнут относительно произведений, перехода к открытым подпространствам, плотным* G_δ*–подпространствам;*

в) $\mathcal{P}_k \subset \mathcal{P}_b$*;*

г) класс $\mathcal{P}_b$ *содержит* Σ*–пространства и псевдокомпактные пространства;*

д) класс $\mathcal{P}_b$ *замкнут относительно перехода к открытым подпространствам, плотным* G_δ*–подпространствам,* C*–плотным подпространствам;*

е) если $X \in \mathcal{P}_k$ *и* $Y \in \mathcal{P}_b$*, то* $X \times Y \in \mathcal{P}_b$*.*

Если $X \in \mathcal{P}_b$ *является беровским пространством, то* X β*–*$G(OD, b)$*–неблагоприятное,* Δ*–беровское пространство.*

Если X *гомеоморфно паратопологической группе* G*, то* G *является топологической группой.*

Список литературы

[1] D. Montgomery, *Continuity in topological groups*, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (1936) 879-882.

[2] R. Ellis, *A note on the continuity of the inverse*, Proc. Amer. Math. Soc. 8 (1957) 372-373.

[3] W. Zelazko, *A theorem on B_0 division algebras*, Bull. Acad. Pol. Sci. 8 (1960), 373-375.

[4] N. Brand, *Another note on the continuity of the inverse*, Arch. Math. 39 (1982), 241-245.

[5] H. Pfister, *Continuity of the inverse*, Proc. Amer. Math. Soc. 95 (1985), 312-314.

[6] E.A. Reznichenko, *Extensions of functions defined on products of pseudocompact spaces and continuity of the inverse in pseudocompact groups*, Topology Appl. 59 (1994) 233-244.

[7] A. Bouziad, *Every Čech-analytic Baire semitopological group is a topological group*, Proc. Amer. math. Soc. 24:3 (1998) 953-959.

[8] A.V. Arhangel'skii and E.A. Reznichenko, *Paratopological and semitopological groups versus topological groups*, Topology Appl. 151, (2005) 107-119.

[9] G. Choquet, *Lectures on Analysis*, Vol. I, W. A. Benjamin Inc, New York, (1969).

[10] R. Telgarsky, *Topological games: On the 50th anniversary of the Banach-Mazur game*, Rocky Mt. J. Math. 17, (1987) 227-276

[11] J. Saint Raymond, *Jeux topologiques et espaces de Namioka*, Proc. Amer. Math. Soc. 87 (1983), 499–504.