О ТОЖДЕСТВАХ В СВЯЗНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУППАХ

И.Н. ЗЯБРЕВ, Е.А. РЕЗНИЧЕНКО

В 1957 году Немыцкий в [1] доказал следующий факт: если в локально компактной или в абелевой связной группе существует окрестность единицы, в которой выполняется какое-либо тождество, то оно выполняется и во всей группе. Там же был поставлен следующий вопрос:

Пусть G есть связная топологическая группа, в некоторой окрестности единицы группы G выполняется тождество $x^3 \equiv 1$. Верно ли, что тогда тождество $x^3 \equiv 1$ выполняется во всей группе G?

Тот же вопрос ставится и для тождества $gx^2 \equiv x^2 g$, где g есть фиксированный элемент группы. Платонов в [2] под номером 2.48 сформулировал следующую обобщенную постановку задачи Мыцельского:

Пусть G есть связная топологическая группа, f есть некоторое тождество, V — окрестность единицы группы G. Верно ли, что из $f_V \equiv 1$ следует $f_G \equiv 1$?

В настоящей работе дается отрицательный ответ на вопрос Платонова, точнее, доказана следующая

Теорема. *Пусть $n > 10^{10}$ — нечетное число. Существуют связная топологическая группа G и окрестность единицы V такие, что*

$$x_V^n \equiv 1, \qquad x_G^n \not\equiv 1.$$

В дальнейшем полагаем везде $n > 10^{10}$ — нечетное число.

§1. Метрики и сжимающие отображения на свободных группах

Пусть X — множество с отмеченной точкой $e \in X$. Через $F(X,e)$ обозначим свободную группу над X, в которой e является единицей. Положим $\widetilde{X} = X \cup X^{-1}$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим отображение

$$j_k : \widetilde{X}^k \to F(X,e),$$

которое элемент $(x_1, \ldots, x_k)$ переводит в слово $x_1 \ldots x_k$. Пусть $F_k(X,e) = j_k(\widetilde{X}^k)$.

Пусть на X задана некоторая метрика d (в дальнейшем в некоторых случаях ее вид будет определен явно). Ее можно продолжить до инвариантной метрики ρ на всей группе $F(X,e)$ (см., например, [3]). Продолжим метрику d с X на $\widetilde{X}$ следующим образом: $\bar{d}(x,y) = d(x,y)$, $\bar{d}(x^{-1},y^{-1}) = d(x,y)$, $\bar{d}(x,y^{-1}) = \bar{d}(x^{-1},y) = d(x,e) + d(e,y)$, где $x \in X$, $y \in X$ и $\bar{d}$ есть продолжение метрики d. Метрику ρ можно задать с помощью некоторой нормы N на группе: $\rho(x,y) = N(xy^{-1})$.

Определение. Скажем, что перестановка $\alpha \in S_k$ принадлежит множеству σ_k, если выполнены следующие условия:

а) для любого $i \in \{1,\ldots,k\}$ $\alpha^2(i) = i$;

б) для любых i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant k$, выполняется одна из следующих возможностей:

1) $\alpha(j) < i$ и $\alpha(j) < \alpha(i) < j$;
2) $\alpha(i) > j$ и $i < \alpha(j) < \alpha(i)$;
3) $i < \alpha(j)$, $\alpha(i) < \alpha(j)$ и $\alpha(i) < j$;
4) $\alpha(j) = i$.

Пусть $x \in F(X,e)$, $x = x_1 \ldots x_k$, где $x_i \in \widetilde{X}$, $i = 1,\ldots,k$. Введем следующую функцию:

$$N(x) = N(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{2} \min \left\{ \sum_{i=1}^{k} \bar{d}(x_i, x_{\alpha(i)}^{-1}), \alpha \in \sigma_k \right\}. \qquad (\star)$$

Верна следующая

Лемма 1.1. *Функция $N(x)$ является инвариантной нормой на группе $F(X,e)$, и метрика ρ такая, что $\rho(x,y) = N(x,y^{-1})$, является инвариантным продолжением метрики d с X на $F(X,e)$, причем для любой другой инвариантной метрики ρ_1 на $F(X,e)$ такой, что ρ_1 есть продолжение метрики d, имеем $\rho_1(x,y) \leqslant \rho(x,y)$ для любых x, y из $F(X,e)$.*

Доказательство. I) Пусть $x \in F(X,e)$, $x = x_1 \ldots x_k \overline{\underline{\circ}}\, x'$, $x_i \in \widetilde{X}$ — несократимая запись слова x, а $x = y_1 \ldots y_{k+2m} \overline{\underline{\circ}}\, y'$, $y_j \in \widetilde{X}$, — любая другая запись слова x, где знак $\overline{\underline{\circ}}$ обозначает графическое равенство. Докажем, что $N(x') = N(y')$. Действительно, слово y' отличается от слова x' несколькими вставками вида yy^{-1}, $y \in \widetilde{X}$. В силу конечности множества σ_{k+2m} существует перестановка $\beta \in \sigma_{k+2m}$ такая, что

$$N(y') = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k+2m} \bar{d}(y_j, y_{\beta(j)}^{-1}).$$

Пусть $m > 0$. Тогда в слове $y_1 \ldots y_{k+2m}$ существует i такое, что $y_i = y_{i+1}^{-1}$. Пусть $z' = y_1 \ldots y_{i-1} y_{i+2} \ldots y_{k+2m}$. Рассмотрим случаи:

1) $\beta(i) = i+1$. Тогда из определения функции N сразу же вытекает, что $N(y') = N(z')$.
2) $\beta(i) = j$, $j \neq i$, $j \neq i+1$. Имеются две возможности:
   а) $\beta(i+1) = l \neq i+1$. Рассмотрим перестановку $\beta_1 \in \sigma_{k+2m}$ такую, что $\beta_1(j) = l$, $\beta_1(i) = i+1$, $\beta_1(r) = \beta(r)$, если $r \notin \{j, l, i, i+1\}$. Вычислим разность:

$$N(y') - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k+2m} \bar{d}(y_j, y^{-1}_{\beta_1(j)}) =$$
$$= \frac{1}{2}[\bar{d}(y_i, y_j^{-1}) + \bar{d}(y_i, y_j^{-1}) + \bar{d}(y_{i+1}, y_l^{-1}) + \bar{d}(y_l, y_{i+1}^{-1}) -$$
$$- \bar{d}(y_l, y_j^{-1}) - \bar{d}(y_j, y_l^{-1}) - \bar{d}(y_i, y_{i+1}^{-1})] =$$
$$= \bar{d}(y_i, y_j^{-1}) + \bar{d}(y_l, y_{i+1}^{-1}) - \bar{d}(y_l, y_j^{-1}) =$$
$$= \bar{d}(y_l, y_i) + \bar{d}(y_i, y_j^{-1}) - \bar{d}(y_l, y_j^{-1}) \geqslant 0.$$

   Значит, $N(y') = \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{k+2m} \bar{d}(y_j, y^{-1}_{\beta(j)})$, и все сводится к случаю 1).

   б) $\beta(i+1) = i+1$. Рассмотрим перестановку $\beta_2 \in \sigma_{k+2m}$ такую, что $\beta_2(j) = j$, $\beta_2(i) = i+1$, $\beta_2(r) = \beta(r)$, если $r \notin \{i, i+1, j\}$. Вычислим разность:

$$N(y') - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k+2m} \bar{d}(y_j, y^{-1}_{\beta_2(j)}) =$$
$$= \frac{1}{2}[\bar{d}(y_i, y_j^{-1}) + \bar{d}(y_j, y_i^{-1}) + \bar{d}(y_{i+1}, y_{i+1}^{-1}) -$$
$$- \bar{d}(y_i, y_{i+1}^{-1}) - \bar{d}(y_{i+1}, y_i^{-1}) - \bar{d}(y_j, y_j^{-1})] =$$
$$= \frac{1}{2}[\bar{d}(y_j, y_i^{-1}) + \bar{d}(y_i, y_j^{-1}) + \bar{d}(y_j, y_j^{-1}) \geqslant 0.$$

   Дальше доказательство по аналогии со случаем 2а).
3) $\beta(i+1) = j$, $j \neq i+1$, $j \neq i$ — случай аналогичен случаю 2).
4) $\beta(i) = i$, $\beta(i+1) = i+1$. Рассмотрим перестановку $\beta_3 \in \sigma_{k+2m}$ такую, что $\beta_3(i) = i+1$, $\beta_3(r) = \beta(r)$, если $r \notin \{i, i+1\}$. Тогда очевидно, что

$$N(y') - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k+2m} \bar{d}(y_j, y^{-1}_{\beta_3(j)}) \geqslant 0,$$

   и все опять сводится к случаю 2).

Итак, какой бы вид ни имела перестановка $\beta \in \sigma_{k+2m}$, после сокращения $y_i y_{i+1}$ мы получаем слово z' такое, что $N(y') = N(z')$. Очевидно, что после m сокращений мы получим, что $N(y') = N(x')$. Итак, значение функции $N(x)$ не зависит от записи слова $x \in \in F(X, e)$. Докажем, что функция N — инвариантная норма на группе $F(X,e)$. Свойства нормы очевидны. Инвариантность вытекает из следующих неравенств:

$$N(x) \geqslant N(gxg^{-1}) \geqslant N(g^{-1}(gxg^{-1})g) = N(x),$$

откуда $N(x) = N(gxg^{-1})$ для любого $g \in F(X,e)$.

II) Пусть теперь ρ_1 — некоторое инвариантное продолжение метрики d на группу $F(X,e)$. Оно порождает некоторую норму N_1: $\rho_1(x,y) = N_1(xy^1)$ для любых $x,y \in F(X,e)$. Для завершения доказательства леммы нам достаточно показать, что для любого $x \in F(X,e)$ $N_1(x) \leqslant N(x)$. Доказательство проведем индукцией по длине слова x.

При $x \in \widetilde{X}$ $N_1(x) = \rho_1(x,e) = đ(x,e) = N(x)$.

При $x,y \in \widetilde{X}$ $N_1(xy^{-1}) = \rho_1(x,y) \leqslant \rho_1(x,e) + \rho_1(e,y) = đ(x,e) + đ(e,y) = đ(x,y) = N(xy^{-1})$.

Пусть для любого слова $x = x_1 \dots x_k$, $x_i \in \widetilde{X}$, $N_1(x) \leqslant N(x)$. Докажем теперь, что и для слов вида $x = x_1 \dots x_{k+1}$ имеет место то же неравенство: $N_1(x) \leqslant N(x)$. Ввиду конечности множества σ_{k+1} существует перестановка $\alpha \in \sigma_{k+1}$ такая, что

$$N(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k+1} đ(y_i, y^{-1}_{\alpha(i)}).$$

Рассмотрим два случая:

а) Пусть $\alpha(1) = l < k+1$. Тогда

$$\begin{aligned} N(x) &= N(x_1 \dots x_{k+1}) = \\ &= N(x_1 \dots x_l) + N(x_{l+1} \dots x_{k+1}) \geqslant \\ &\geqslant N_1(x_1 \dots x_l) + N_1(x_{l+1} \dots x_{k+1}) \geqslant N_1(x). \end{aligned}$$

б) $\alpha(1) = k+1$. Так как N, N_1 — инвариантные нормы, то

$$\begin{aligned} N_1(x) &= N_1(x_1^{-1} x x_1) = N_1(x_2 \dots x_{k+1} x_1), \\ N(x) &= N(x_2 \dots x_{k+1} x_1), \end{aligned}$$

и доказательство сводится к случаю а).

Лемма 1.1 доказана. □

Лемма 1.2. *Пусть задано отображение $h\colon X \to X$ такое, что*

а) $h(e) = e$;

б) *h является сжимающим отображением, т.е. для любых $x,y \in X$ имеем $d(h(x),h(y)) \leqslant d(x,y)$.*

Тогда h продолжается до гомоморфизма $\hbar\colon F(X,e) \to F(X,e)$, и отображение $\hbar$ тоже является сжимающим. Если, кроме того, существует такая константа γ, $0 < \gamma < 1$, что $d(h(x),h(y)) = \gamma d(x,y)$, то для любых $x',y' \in F(X,e)$ выполняется равенство $\rho(\hbar(x'),\hbar(y')) = \gamma\rho(x',y')$.

Доказательство. Отображение h продолжается до отображения $\hbar\colon \widetilde{X} \to \widetilde{X}$: $\hbar(x^{-1}) = (h(x))^{-1}$, где $x \in X$. Тогда положим

$$\hbar(x_1 \dots x_k) = \hbar(x_1) \dots \hbar(x_k).$$

Очевидно, что отображение $\hbar$ является сжимающим относительно метрики $\tilde{d}$, а если, кроме того, $d(h(x), h(y)) = \gamma d(x, y)$ для $x, y \in X$, то и $\tilde{d}(\hbar(x), \hbar(y)) = \gamma \tilde{d}(x, y)$ для $x, y \in \widetilde{X}$. Из того, что $\hbar$ сжимающее и из формулы $(\star)$ для функции N вытекает, что для $x \in F(X, e)$ выполняется неравенство

$$N(\hbar(x)) \leqslant N(x) \qquad (N(\hbar(x)) = \gamma N(x)).$$

Лемма 1.2 доказана. □

Лемма 1.3. *На отрезке* $[0,1]$ *введем метрику* d: $d(x, y) = |x - y|$. *Пусть дано конечное множество* $Y \subset [0,1]$, *содержащее точку* 0, *и некоторое сжимающее отображение* $h^*\colon Y \to [0,1]$ *такое, что* $h^*(0) = 0$. *Тогда отображение* h^* *продолжается до сжимающего отображения* $h\colon [0,1] \to [0,1]$.

Доказательство. Для $t \in [0,1] \setminus Y$ определим $h(t)$. Рассмотрим два случая:

1) Существует такое $y_1 \in Y$, что $t \in (t_1, 1]$ и $[t_1, 1] \cap Y = \varnothing$. Тогда $h(t) = h^*(t_1)$.
2) Существуют такие $t_1, t_2 \in Y$, что $t \in (t_1, t_2)$ и $(t_1, t_2) \cap Y = \varnothing$. Тогда положим

$$h(t) = h^*(t_1)\frac{t - t_1}{t_1 - t_2} + h^*(t_2)\frac{t - t_1}{t_2 - t_1}.$$

Непосредственно проверяется, что отображение h является сжимающим.

Лемма 1.3 доказана. □

Метрики, аналогичные метрике ρ из леммы 1.1, впервые рассматривались Граевым в работе [3]. Поэтому в дальнейшем метрику, порожденную нормой N из $(\star)$, будем называть продолжением по Граеву. Отметим, что формула $(\star)$ получена впервые.

Лемма 1.4. *Пусть* G *— свободная группа с единицей* e, $X_1 \subset G$, $X_2 \subset G$, $e \in X_1$, $e \in X_2$ *и* $X_1 \setminus \{e\}$, $X_2 \setminus \{e\}$ *— базисы в* G. *На* X_1 *задана метрика* d_1, *а на* X_2 *— метрика* d_2. *Инвариантные метрики* ρ_1 *и* ρ_2 *есть продолжения по Граеву метрик* d_1 *и* d_2 *соответственно. Если ограничения метрик* ρ_2 *на* X_1 *и* ρ_1 *на* X_2 *совпадают соответственно с* d_1 *и* d_2, *то метрики* ρ_1 *и* ρ_2 *совпадают.*

Доказательство. Как уже отмечалось в лемме 1.1, для любого инвариантного продолжения ρ' метрики d $\rho'(x, y) \leqslant \rho(x, y)$, где $x, y \in F(X, e)$, а $\rho(x, y) = N(xy^{-1})$.

Отсюда получаем, что для любых $x, y \in G$ $\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y)$ и $\rho_2(x,y) \leqslant \rho_1(x,y)$.

Лемма 1.4 доказана. □

§2. Построение окрестности единицы

Произвольному множеству $Y \subset F(X,e)$ сопоставим множество

$$[Y]_1 = \bigcup \{ \overline{F_k(X,e) \cap Y}^{\,k}, k \in \mathbb{N} \},$$

где $\overline{F_k(X,e) \cap Y}^{\,k}$ есть замыкание множества $F_k(X,e) \cap Y$ в $F_k(X,e)$, причем на $F_k(X,e)$ рассматривается топология, индуцированная отображением $j_k \colon \widetilde{X}^k \to F_k(X,e)$, т.е. множество $F \subset F_k(X,E)$ замкнуто в $F_k(X,e)$ тогда и только тогда, когда множество $J_k^{-1}(F)$ замкнуто в $\widetilde{X}^k$. По трансфинитной индукции для каждого ξ определим множества $[Y]_\xi$ и $[Y]_\xi^*$. Множество $[Y]_1$ уже определено, положим $[Y]_1^* = Y$. Пусть для трансфинитов $\xi' < \xi$ множества $[Y]_\xi$ и $[Y]_\xi^*$ уже определены. Тогда положим

$$[Y]_\xi^* = \bigcup \{ [Y]_{\xi'}, \xi' < \xi \}, \qquad [Y]_\xi] = [[Y]_\xi^*]_1.$$

В работе [3] доказано следующее

Утверждение 2.1. *Пусть X — компакт. Множество $Y \subset \subset F(X,e)$ замкнуто в топологии свободной топологической группы $F(X,e)$ тогда и только тогда, когда для любого $k \in \mathbb{N}$ $F_k(X,e) \cap Y$ замкнуто в $F_k(X,e)$.*

Обозначим через $\overline{Y}$ замыкание множества Y в топологии свободной топологической группы. В дальнейшем полагаем $X = [0,1]$ с отмеченной точкой 0. Через ω_1 обозначим первый трансфинит такой, что $|\{\xi : \xi < \omega_1\}| = \aleph_1$.

Лемма 2.1. *Пусть $Y \subset F(X,e)$. Тогда $\overline{Y} = [Y]_{\omega_1}^*$.*

Доказательство. Очевидно, что $[Y]_1 \subset \overline{Y}$, а значит, для любого трансфинита ξ имеем $[Y]_1 \subset \overline{Y}$ и $[Y]_\xi^* \subset Y$. В частности, $[Y]_{\omega_1}^* \subset Y$. Предположим, что $\overline{Y} \setminus [Y]_{\omega_1}^* \neq \varnothing$. Тогда существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\overline{[Y]_{\omega_1}^* \cap F_k(X,e)}^{\,k} \setminus ([Y]_{\omega_1}^* \cap F_k(X,e)) \neq \varnothing$$

(это следует из утверждения 2.1). Пусть

$$x \in \overline{[Y]_{\omega_1}^* \cap F_k(X,e)}^{\,k} \setminus ([Y]_{\omega_1}^* \cap F_k(X,e)).$$

Пространство $F_k(X,e)$ — метрический компакт, так как оно является непрерывным образом метрического компакта $\widetilde{X}^k$. Из метризуемости пространства $F_k(X,e)$ следует, что существует такая последовательность $\eta = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$, что

$$\eta \subset [Y]^*_{\omega_1} \cap F_k(X, e)$$

и η сходится к точке x в пространстве $F_k(X, e)$. Так как $[Y]^*_{\omega_1} = \bigcup\{[Y]_\xi : \xi, \omega_1\}$ и $\eta \subset [Y]^*_{\omega_1}$, то для каждого $i \in \mathbb{N}$ существует такое $\xi_i < \omega$, что $x_i \in [Y]_{\xi_i}$. Из определения трансфинита ω_1 следует, что существует такое $\xi < \omega_1$, что для любого $i \in \mathbb{N}$ $\xi_i < \xi$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ $x \in [Y]^*_\xi$. Из определения оператора $[\cdot]_1$ вытекает, что если $\eta \subset Z$, $\eta \subset F(X, e)$ и η сходится к точке x в пространстве $F_k(X, e)$, то $x \in [Z]_1$. Поэтому

$$x \in [[Y]^*_\xi]_1 = [Y]_\xi.$$

Мы получили, что $x \in [Y]_\xi \subset [Y]^*_{\omega_1}$. Противоречие.

Лемма 2.1 доказана. $\square$

На $[0, 1]$ рассмотрим метрику d: $d(x, y) = |x - y|$. Пусть $c \in (0, +\infty)$, тогда $U_c = \{x \in F(X, e), N(x) < c\}$,

$$\widetilde{H}_c = \{x^n, x \in U_c\}, \qquad H_c = \mathrm{gp}\{\widetilde{H}_c\},$$

где N из $(\star)$.

Подгруппа H_c нормальна, так как U_c инвариантно относительно сопряжений.

Лемма 2.2. *Рассмотрим гомоморфизм $\hbar$: $F(X, e) \to F(X, e)$, являющийся сжимающим относительно метрики ρ, порожденной нормой N из $(\star)$. Тогда $\hbar(H_c) \subset H_c$.*

Доказательство. Пусть $x \in H_c$. Тогда $x = x_1^n \ldots x_k^n$, где для $i \in \{1, \ldots, k\}$ имеем $N(x_i) < c$. Так как $\hbar$ есть гомоморфизм, то $\hbar(x) = (\hbar(x_1))^n \ldots (\hbar(x_k))^n$. Но $\hbar$ — сжимающее отображение, и для $i \in \{1, \ldots, k\}$ $N(\hbar(x_i)) \leqslant N(x_i) < c$. Значит, и $\hbar(x) \in H_c$.

Лемма 2.2 доказана. $\square$

Лемма 2.3. *Если $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, то $[H_{c_1}]_1 \subset H_{c_2}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют такие $k \in \mathbb{N}$ и $y \in \overline{H_{c_1} \cap F_k(X, e)}^{\,k}$, что $y \notin H_{c_2}$. Введем на пространстве $\widetilde{X}^k$ метрику l: для любых $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \widetilde{X}^k$ и $x' = (x'_1, \ldots, x'_k) \in \widetilde{X}^k$ положим

$$l(x, x') = \max\{\bar{d}(x_i, x'_i) : i \in \{1, \ldots, k\}\}.$$

Из того, что $y \in \overline{H_{c_1} \cap F_k(X, e)}^{\,k}$, следует, что существует точка $\bar{y} \in j_k^{-1}(y)$ такая, что $l(\bar{y}, j_k^{-1}(F_k(X, e) \cap H_{c_1})) = 0$. Пусть $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_k)$. Введем в пространстве $\widetilde{X}$ функцию $\|\cdot\|$: $\|x\| = x$, $x \in X$. Пусть γ такое, что $0 < \gamma < 1$ и $c_1 < \gamma < c_2$. Положим $R = \{\|y_i\|, i = 1, \ldots, k\} \cup \{0\}$, $\Delta = \min\{d(a, b),\ a \neq b,\ a, b \in R\}$, $\varepsilon = (1 - \gamma) \cdot \Delta/2$. Так как $l(\bar{y}, j_k^{-1}(F_k(X, e) \cap H_{c_1})) = 0$, то существует

$\bar{z} \in j_k^{-1}(F_k(X,e) \cap H_{c_1})$ такое, что $l(\bar{y}, \bar{z}) < \varepsilon$. Пусть $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_k)$. Обозначим $\mathbb{Y} = \{0\} \cup \{\|z_i\|, i = 1, \ldots, k\}$. Зададим отображение $h^*\colon \mathbb{Y} \to X = [0,1]$. Для $a \in \mathbb{Y}$ определим $h^*(a)$: если $a = 0$, то $h^*(a) = 0$, если $a \neq 0$, то существует $i \in \{1, \ldots, k\}$ такое, что $a = \|z_i\|$. Тогда положим

$$h^*(a) = \gamma \|y_i\|.$$

За счет соответствующего выбора ε и точки $\bar{z}$ функция h^* определена корректно и является сжимающим отображением. Действительно, имеем

$$d(h^*(\|z_i\|), h^*(\|z_j\|)) = d(\gamma\|y_i\|, \gamma\|y_j\|) = \gamma d(\|y_i\|, \|y_j\|).$$

Но, с другой стороны,

$$\begin{aligned} d(\|y_i\|, \|y_j\|) &\leqslant [d(\|y_i\|, \|z_i\|) + d(\|z_i\|, \|z_j\|) + d(\|z_j\|, \|y_j\|)] \leqslant \\ &\leqslant \bar{d}(y_i, z_i) + \bar{d}(y_j, z_j) + d(\|z_i\|, \|z_j\|) \leqslant \\ &\leqslant 2\varepsilon + d(\|z_i\|, \|z_j\|) \leqslant \\ &\leqslant (1-\gamma) d(\|y_i\|, \|y_j\|) + d(\|z_i\|, \|z_j\|), \end{aligned}$$

откуда

$$\gamma d(\|y_i\|, \|y_j\|) \leqslant d(\|z_i\|, \|z_j\|)$$

и

$$d(h^*(\|z_i\|), h^*(\|z_j\|)) \leqslant d(\|z_i\|, \|z_j\|),$$

что и требовалось. По лемме 1.3 продолжим h^* до сжимающего отображения $h\colon [0,1] \to [0,1]$. Так как $h(0) = 0$, то по лемме 1.2 отображение h можно продолжить до сжимающего гомоморфизма $\bar{h}$. Пусть h_γ есть отображение: $h_\gamma\colon [0,1] \to [0,1]$, $h_\gamma(t) = \gamma^t$. Очевидно, что $d(h_\gamma(a), h_\gamma(b)) = \gamma d(a,b)$ для любых $a, b \in X$. По лемме 1.2 h_γ продолжается до гомоморфизма $\bar{h}_\gamma$, для которого если $a, b \in F(X,e)$, то $\rho(\bar{h}_\gamma(a), \bar{h}_\gamma(b)) = \gamma \rho(a,b)$. Из построения следует, что $\bar{h}(j_k(\bar{z})) = \bar{h}_\gamma(j_k(\bar{y})) = \bar{h}_\gamma(y)$. Положим $j_k(\bar{z}) = z$. По построению $\bar{z} \in j_k^{-1}(F_k(X,e) \cap H_{c_1})$, и поэтому $z \in H_{c_1}$. Но $\bar{h}$ — сжимающий гомоморфизм, поэтому из леммы 2.2 следует, что $\bar{h}(z) \in H_{c_1}$. Итак, мы получили, что $\bar{h}_\gamma(y) \in H_{c_1}$. Учитывая то, что для $x \in F(X,e)$ $N(h_\gamma(x)) = \gamma N(x)$, имеем: $y \in H_{c_1/\gamma}$. Но $c_1/\gamma < c_2$, а для $c' < c_2$ $H_{c'} \subset H_{c_2}$, откуда $y \in H_{c_1/\gamma} \subset H_{c_2}$. Получили противоречие.

Лемма 2.3 доказана. □

Лемма 2.4. *Если* $0 < c_1 < c_2 < +\infty$, *то* $\overline{H}_{c_1} \subset H_{c_2}$.

Доказательство. Как показано в лемме 2.1, $\overline{H}_{c_1} = [H_{c_1}]^*_{\omega_1}$. Так как $[H_{c_1}]^*_{\omega_1} = \bigcup\{[H_{c_1}]_\xi, \xi < \omega_1\}$, то достаточно проверить, что для любого $\xi < \omega_1$ имеем $[H_{c_1}]_\xi \subset H_{c_2}$. Этот факт докажем по трансфинитной индукции. По лемме 2.3 $[H_{c_1}]_1 \subset H_{c_2}$. Пусть для $\xi' < \xi$ и для $0 < c_1' < c_2' < +\infty$ доказано, что $[H_{c_1'}]_{\xi'} \subset H_{c_2'}$. Пусть $c = \frac{c_1+c_2}{2}$.

По предположению индукции имеем для $\xi' < \xi$: $[H_{c_1}]_{\xi'} \subset H_c$. Так как

$$[H_{c_1}]^*_\xi = \bigcup\{[H_{c_1}]_{\xi'} : \xi' < \xi\},$$

то, по предположению индукции, получим $[H_{c_1}]^*_\xi \subset H_c$. Тогда по лемме 2.3:

$$[H_{c_1}]_\xi = [[H_{c_1}]^*_\xi]_1 \subset [H_c]_1 \subset H_{c_2}.$$

Лемма 2.4 доказана. □

§3. Переход к дискретным группам

Лемма 3.1. *Пусть $G = \langle f_1, \dots, f_m\rangle$, e — единица в G. На множестве $X = \{e, f_1, \dots, f_m\}$ задать метрику d:*

$$d'(e_i, e_j) = 2 \quad \textit{при} \quad i \neq j, \qquad d'(e_i, e_i) = 0, \qquad d'(e_i, e) = 1$$

и продолжить метрику d' до инвариантной метрики ρ' по Граеву, то ρ' совпадает с ρ, где ρ есть продолжение по Граеву метрики d.

Доказательство. По условию $f_i = e_1 \dots e_i$. Если воспользоваться формулой $(\star)$ из леммы 1.1, то непосредственно проверяется, что ρ', ограниченная на X, и ρ, ограниченная на X', совпадают соответственно с d и d'. Поэтому можно применить лемму 1.4.

Лемма 3.1 доказана. □

Лемма 3.2. *Пусть $G = \langle e_1, \dots, e_m\rangle$, e — единица в G. На множестве $X = \{e, e_1, \dots, e_m\}$ задана метрика d: $d(e, e_i) = 1$, $d(e_i, e_i) = 0$, $d(e_i, e_j) = 2$, $i \neq j$. Пусть ρ — продолжение метрики d по Граеву, N — из формулы $(\star)$, $\widetilde{X} = X \cup X^{-1}$. Положим*

$$U = \{gag^{-1}, g \in G, a \in \widetilde{X}\}, \qquad V = \{x \in G, N(x) < m\}.$$

Тогда $U^{m-1} = V$, где $U^{m-1} = \{x : x = u_1 \dots u_{m-1}, u_i \in U\}$.

Доказательство. Пусть $x \in U^{m-1}$. Тогда $x = a_1 \dots a_{m-1}$, где $a_i \in U$. Из инвариантности нормы N следует, что $N(a_i) \leqslant 1$. Так как N — норма на G, то

$$N(x) \leqslant \sum_{i=1}^{m-1} N(a_i) \leqslant m - 1.$$

Итак, $U^{m-1} \subset V$.

Докажем, что $V \subset U^{m-1}$. Метрика d продолжается до метрики $\bar{d}$ на $\widetilde{X}$: $\bar{d}(a, b) = 2$, если $a, b \in \widetilde{X} \setminus \{e\}$ и $a \neq b$; $\bar{d}(a, e) = \bar{d}(e, a) = 1$, $a \in \widetilde{X} \setminus \{e\}$; $\bar{d}(a, a) = 0$, $a \in \widetilde{X}$. Пусть $y \in V$, $y = y_1 \dots y_n$, $y_i \in \widetilde{X}$. По формуле $(\star)$

$$N(y) = \frac{1}{2} \min\Big\{\sum_{i=1}^{n} \bar{d}(y_i, y^{-1}_{\alpha(i)}), \alpha \in \sigma_n\Big\}.$$

Так как множество σ_n конечно, то существует $\alpha \in \sigma_n$ такое, что $N(y) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{d}(y_i, y^{-1}_{\alpha(i)})$. По перестановке $\alpha \in \sigma_n$ построим перестановку $\beta \in \sigma_n$. Для $i \in \{1,\dots,n\}$ определим $\beta(i)$:

если $\bar{d}(y_i, y^{-1}_{\alpha(i)}) \neq 0$, то $\beta(i) = i$;

если $\bar{d}(y_i, y^{-1}_{\alpha(i)}) = 0$, то $\beta(i) = \alpha(i)$.

Непосредственно проверяется, что $\beta \in \sigma_n$ и

$$N(y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{d}(y_i, y^{-1}_{\alpha(i)}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \bar{d}(y_i, y^{-1}_{\beta(i)}).$$

Положим $\mathbb{Y} = \{i \in \{1,\dots,n\}, \bar{d}(y_i, y^{-1}_{\beta(i)}) \neq 0\}$. Из построения β следует, что если $i \in \mathbb{Y}$, то $\beta(i) = i$. Легко проверить, что $N(y) = |\mathbb{Y}|$. Так как $y \in V$, то $N(y) < m$ и $|\mathbb{Y}| \leqslant m-1$. Ясно, что y представляется в виде: $y = \rho_0 a_1 \rho_1 a_2 \dots a_{N(y)}\rho_{N(y)}$, где a_j — i-й член множества $\{y_i, i \in \mathbb{Y}\}$, а $\rho_0 \dots \rho_{N(y)} = e$. Тогда легко видеть, что y можно записать следующим образом:

$$y = g_1 a_1 g_1' \dots g_{N(y)} a_{N(y)} g^{-1}_{N(y)}, \qquad a_1 \in \widetilde{X}, \quad g_i \in G,$$

т.е. $g_i a_i g_i^{-1} \in U$ и $y \in U^{N(y)} \subset U^{m-1}$.

Лемма 3.2 доказана. □

Лемма 3.3. *Пусть $X = [0,1]$ и $e = 0$. Пусть Q — множество рациональных чисел на $[0,1]$. Группа $F(Q,e)$ естественным образом вкладывается в $F(X,e)$. Метрики d, $\bar{d}$, ρ и норму N возьмем следующим образом: метрику d так же как на с. 7 перед леммой 2.2, а остальные — как на с. 2 в начале §1. Пусть $0 < c < +\infty$. Тогда если $x \in H_c \cap F(Q,e)$, то существуют такие $q_1,\dots,q_k \in F(Q,e)$, что $x = q_1^n \dots q_k^n$ и $N(q_i) < c$.*

Доказательство. Так как $x \in H_c$, то существуют такие $x_1,\dots,x_n \in F(X,e)$, что $x = x_1 \dots x_n$ и $N(x_i) < c$. Заменим все иррациональные числа в словах $x_1,\dots,x_n$ на переменные, причем каждое из них будем всякий раз заменять одной и той же переменной. Итак, мы получим, что $x \equiv x_1^n(u_1,\dots u_l)\dots x_k^n(u_1,\dots,u_l)$, где x — постоянное, а x_1, …, x_k зависят от переменных u_1,…, u_l. Старые значения функции $x_1(u_1,\dots,u_l)$, …, $x_k(u_1,\dots,u_l)$ принимают на некотором наборе u_1^0, …, u_l^0. Из формулы ($\star$) видно, что набор u_1^0, …, u_l^0 можно «пошевелить» до рационального набора u_1', …, u_l' так, что для $i \in \{1,\dots,n\}$ будем иметь

$$N(x_i(u_1',\dots,u_l')) < c.$$

Положим $q_i = x_i(u_1',\dots,u_l')$.

Лемма 3.3 доказана. □

Лемма 3.4. *Пусть даны два условия:*

А. *Элемент $(1)^n$ принадлежит H_1, где $H_1 = H_c$ при $c = 1$.*

Б. *Существует* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что в* $G = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ *с инвариантной метрикой* ρ *из леммы 3.1* $f_m^n = a_1^n \ldots a_k^n$, *где* $N_m(a_i) < m$ (*норма* N_m *на* G *совпадает с продолжением по Граеву метрики* ρ).

Тогда из А *следует* Б.

Доказательство. Пусть $(1)^n \in H_1$. Тогда по лемме 3.3 $(1)^n = q_1^n \ldots q_k^n$, где $q_i \in F(Q,e)$ и $N(q_i) < c = 1$. Так как $q_i \in F(Q,e)$, то $q_i = q_{i1} \ldots q_{ie_i}$, где $q_{ij} \in \widetilde{Q} = Q \cup Q^{-1}$. Можно положить, что $q_{ij} = \left(\frac{p_{ij}}{m}\right)^{\varepsilon_{ij}}$, где $p_{ij} \in \mathbb{N}$, а $\varepsilon_{ij} = \pm 1$. Пусть

$$X_m = \left\{0, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{m}{m}\right\}.$$

Группа $F(X_m, e)$ естественным образом вкладывается в группу $F(X,e)$, и на ней индуцируется некоторая метрика группы $F(X,e)$. Пусть $\varphi\colon X_m \to \{e, f_1, \ldots, f_m\}$, $\varphi\left(\frac{k}{m}\right) = f_k$, $\varphi(0) = e$. Отображение φ увеличивает метрику в m раз, поэтому продолженный гомоморфизм $\bar{\varphi}$ тоже увеличивает метрику ровно в m раз. Значит, множество $U_1 \cap F(X_m, e)$ переходит в множество $\{x \in G, N_m(x) < m\}$. Тогда $\bar{\varphi}((1)^n) = f_m^n$ и $f_m^n = \bar{\varphi}^n(q_1) \ldots \bar{\varphi}^n(q_k)$, где $N_m(\bar{\varphi}(q_i)) < m$. Лемма 3.4 доказана. □

Определение. Пусть $G' = \langle e_1, \ldots, e_m \rangle$. Для каждого m определим

$$H^m = \mathrm{gp}\{x^n, x \in V = U^{m-1}\} \qquad \text{в } G.$$

Лемма 3.5. *Из условия Б леммы 3.4 следует условие*

- *В. Существует* $m \in \mathbb{N}$ *такое, что* $(e_1, \ldots, e_m)^n \in H^m$.

Доказательство. Аналогично лемме 3.4 с использованием лемм 3.1 и 3.2. □

Пусть $B(m,n) = \langle e_1, \ldots, e_m \mid c_1^n = 1, \ldots, c_2^n = 1, \ldots \rangle$ — свободная бернсайдова группа, где c_i определены так же, как в [4].

Лемма 3.6. *Систему определяющих соотношений* $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$, *удовлетворяющую условиям работы* [4], *можно выбрать так, чтобы для некоторого* i_0 $c_{i_0} \mathrel{\overset{\circ}{=}} e_1 \ldots e_m$.

Доказательство. Пусть в старой системе $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ $k \in \mathbb{N}$ таково, что $|c_k| < m$, $c_{k+1} \geqslant m$. Положим $c_i' = c_i$, $i \leqslant k$, $c_{k+1}' = e_1 \ldots e_m$ и $i_0 = k+1$. Докажем, что c_{i+0}' удовлетворяет условиям работы [4], т.е. что c_{i_0} имеет бесконечный порядок в ранге k (определение см. в [4]) и c_{i_0} — минимальное по длине слово с таким условием.

Минимальность c_{i_0} следует из выбора k. Пусть $c_{i_0}^l \overset{k}{=} 1$. Тогда существует минимальная диаграмма ранга k с меткой контура, равной $c_{i_0}^l$. По лемме 5.5 из [4] существует $i \leqslant k$ такое, что $c_i^{n_1} \mathrel{\overset{\circ}{=}} X_1 c_{i_0}^{n_2} X_2$, где $n_1 > \frac{n}{6}$, $n_2 > 0$, X_1 и X_2 — некоторые конец и начало слова c_{i_0}. Используя $|X_1 c_{i_0}^{n_2} X_2| < |c_i| + |c_{i_0}|$, получим, что c_{i_0}

содержит $c_i^{n_3}$, $n_3 > \frac{n}{12}$. Отсюда легко получаем, что $c_i \in \langle c_{i_0} \rangle$. Противоречие.

Лемма 3.6 доказана. $\square$

Определение. Пусть G — некоторая группа. Скажем, что слово $g \in G$ V-приводимо относительно X в G, если

$$g^G = g_1 a_1 g_1^{-1} \dots g_{m-1} a_{m-1} g_{m-1}^{-1},$$

где $g_i \in G$, $a_i \in X \cup X^{-1} \cup \{e\}$, X — базис в G. В частности, слово g V-приводимо в свободной группе $G = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ тогда и только тогда, когда $g \in V$.

Лемма 3.7. $(e_1 \dots e_m)^n \notin H^m$ *для любого* $m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Для $m = 1$ утверждение леммы очевидно. Пусть $m > 1$. Рассмотрим свободную бернсайдову группу

$$B(m, n) = \langle e_1, \dots, e_m \mid c_1^n = 1, c_2^n = 1, \dots \rangle,$$

где система $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ выбрана так же, как в лемме 3.6. Рассмотрим разбиение $\mathbb{N} = I_1 \cup I_2$, $I_1 \cap I_2 = \varnothing$, так что $i \in I_1$ тогда и только тогда, когда существует $k \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$, такое, что c_i^k / V-приводимо в группе $B(m, n)$.

Докажем от противного, что $i_0 \notin I_1$.

Пусть $i_0 \in I_1$. Обозначим через $f_{e_i}(X)$ сумму показателей при e_i в записи слова X, $i = 1, \dots, m$. Мы допустили, что существует $0 < k < n$ такое, что

$$c_{i_0}^k = g_1 a_1 g_1^{-1} \dots g_{m-1} a_{m-1} g_{m-1}^{-1} \qquad \text{в } B(m, n),$$

где $g_i \in B(m, n)$, $a_i \in \{e_1, \dots, e_m, e, e_m^{-1}, \dots, e_1^{-1}\}$.

Пусть $G' = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$. Тогда

$$c_{i_0}^k = g_1 a_1 g_1^{-1} \dots g_{m-1} a_{m-1} g_{m-1}^{-1} X_1 c_{l_1}^{\pm n} X_1^{-1} \dots X_j c_{l_j}^{\pm n} X_j^{-1} \qquad \text{в } G',$$

и мы имеем для любого i

$$\begin{aligned} k &= f_{e_i}(c_{i_0}^k) = \\ &= f_{e_i}(g_1 a_1 g_1^{-1} \dots g_{m-1} a_{m-1} g_{m-1}^{-1} X_1 c_{l_1}^{\pm n} X_1^{-1} \dots X_j c_{l_j}^{\pm n} X_j^{-1}) = \\ &= f_{e_i}(a_1 \dots a_{m-1}) + k_i \cdot n. \end{aligned}$$

Но очевидно, что существует $1 \leqslant i \leqslant m$ такое, что $f_{e_i}(a_1 \dots a_{m-1}) = 0$. Тогда $k \equiv 0 \pmod n$. Противоречие. Итак, $i_0 \in I_2$.

Как показано в работе [5], существует центральное расширение $A(m, n)$ группы $B[m, n]$ такое, что

$$A(m, n)/\langle c_1^n, c_2^n, \dots \rangle = B(m, n), \qquad Z(A(m, n)) = \langle c_1^n \rangle \times \langle c_2^n \rangle \times \dots$$

и система $\{c_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ независимо порождает $Z(A(m, n))$ как свободную абелеву группу. Рассмотрим группу $A_1 = A(m, n)/\langle c_i^n, i \in I_1 \rangle$. В ней, как следует из [5], $c_i^{ni} = 1$ для всех $i \in I_2$.

Заметим, что если $b \in U^{m-1}$ в G', то b V-приводимо в G'. Тогда b V-приводимо и в $B(m,n)$, т.е. $b = Xc_i^l X^{-1}$ в $B(m,n)$, где $i \in I_1$, $|l| < n$ (это следует из того, что в $B(m,n)$ любое слово сопряжено со степенью c_k для некоторого $k \in \mathbb{N}$ по лемме 4.6 из [4] и из определения множества I_1). Тогда

$$b = Xc_i^l X^{-1} Y_1 c_{i_1}^{\pm n} Y_1^{-1} \dots Y_k c_{i_k}^{\pm n} Y_k^{-1} \qquad \text{в } G'.$$

Но тогда $b = Xc_i^l X^{-1} z_b$ в $A(m,n)$, где $z_b \in Z(A(m,n))$, и мы имеем

$$b^n = Xc_i^{ln} X^{-1} z_b^n \quad \text{в } A(m,n) \qquad \text{и} \qquad b^n = 1 \quad \text{в группе } A_1.$$

Значит, если $b \in H^m$, то $b \overset{A_1}{=} 1$. Но из независимости системы $\{c_i^n\}_{i=1}^{\infty}$ вытекает, что $c_{i_0}^n \overset{A_1}{=} 1$. Значит, $c_{i_0}^n \notin H^m$ для любого $m \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.7 доказана. □

Лемма 3.8. *Элемент $(1)^n$ не содержится в H_1.*

Доказательство. Утверждение леммы вытекает из лемм 3.4, 3.5 и 3.7. □

Доказательство теоремы. Пусть $X = [0,1]$, $e = 0$. Рассмотрим $H_{1/2}$ и положим $B = F(X,e)/\overline{H}_{1/2}$. Естественный гомоморфизм из $F(X,e)$ в B обозначим через ψ (взятие фактора допустимо, так как $H_{1/2}$ нормальна в $F(X,e)$, а значит, и $\overline{H}_{1/2}$ нормальна). Группа B наделяется фактор-топологией. Тогда ψ является открытым отображением. Множество $\psi(U_{1/2})$ является окрестностью единицы в группе B. Для любого $x \in U_{1/2}$ имеем $x^n \in H^{1/2}$, и поэтому для любого $g \in \psi(U_{1/2})$ $g^n = e$. По лемме 3.8 $(1)^n \notin H_1$. Предположим, что $\psi(1)^n = 1$. Тогда $(1)^n \in \overline{H}_{1/2}$. По лемме 2.4 получаем, что $(1)^n \in \overline{H}_{1/2} \subset H_1$. Противоречие. Значит, $(1)^n \neq e$ в B.

Группа B связна как непрерывный образ связной группы $F(X,e)$.

Теорема доказана. □

Литература

[1] Mycielski J., On the extension of equalities in connected topological groups, *Fund. Math.* **44** (3) (1957).

[2] *Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп*, 8-е изд., Новосибирск, 1982.

[3] Граев М.И., Топологические группы I // УМН, т. 5, № 2(36), 1950.

[4] Ольшанский А.Ю., О теореме Новикова–Адяна // Мат. сборник, т. 118, № 2, 1982.

[5] Ашманов И.С., Ольшанский А.Ю., Об абелевых и центральных расширениях асферических групп // Изв. вузов, мат., № 11, 1985.